ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗ

1- Εισαγωγή στη Ρευστομηχανική

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

16/10/2013

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

• Τα *ρευστά* περιλαμβάνουν τα *αέρια* και τα *υγρά*, ενώ ισχύουν οι ίδιες εξισώσεις και για τα δύο.

• Η *ρευστομηχανική* περιλαμβάνει τη *στατική* (χρονικώς ανεξάρτητη ισορροπία) και τη *δυναμική* των ρευστών (ροές).

• Στην αστροφυσική, ακόμη και νέφη πολύ χαμηλής πυκνότητας μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε ως ρευστά, αρκεί η *μέση ελεύθερη διαδρομή* l των σωματιδίων να είναι πολύ μικρότερη της έκτασης L που καταλαμβάνει το ρευστό:

$$l = \frac{1}{n\sigma} \ll L$$

όπου n είναι η *αριθμητική πυκνότητα των σωματιδίων* και σ η *ενεργός διατομή* για ελαστικές συγκρούσεις.

• Ρευστά, στα οποία μπορούμε να αγνοήσουμε την απώλεια ενέργειας λόγω των εσωτερικών συγκρούσεων (ιξώδες) ονομάζονται *ιδανικά*.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

• Για ένα *ιδανικό ρευστό ενός συστατικού:*

$\varrho = mn$ $\rightarrow$ πυκνότητα μάζας

P $\rightarrow$ πίεση

$e = U/m$ $\rightarrow$ ειδική εσωτερική ενέργεια

$\vec{v}$ $\rightarrow$ διάνυσμα της ταχύτητας

όπου m είναι η μάζα ενός σωματιδίου. Άρα έχουμε *3 βαθμωτές μεταβλητές* και *1 διανυσματική* και χρειαζόμαστε αντίστοιχο αριθμό εξισώσεων για να έχουμε πλήρη περιγραφή.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: στη θέση της e μπορεί να χρησιμοποιηθεί, εναλλακτικά, είτε η *ειδική εντροπία*, $s = S/m$ (εντροπία ανά μονάδα μάζας), είτε η *θερμοκρασία* T.

ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

• Μία από τις βασικές εξισώσεις που χρειαζόμαστε για την πλήρη περιγραφή είναι η *καταστατική εξίσωση*, δηλ. η σχέση που συνδέει την πίεση με τις άλλες θερμοδυναμικές μεταβλητές. Για ένα ιδανικό ρευστό ενός συστατικού, η πίεση είναι συνάρτηση των άλλων *δύο μεταβλητών*

$$P = P(\varrho, e)$$

(*δι-παραμετρική* καταστατική εξίσωση). Η επιλογή μιας συγκεκριμένης καταστατικής εξίσωσης εξαρτάται από το πρόβλημα που προσπαθούμε να επιλύσουμε (διαφορετική για τα διάφορα ήδη αστέρων) και προκύπτει από τη μικρο-φυσική.

Βαροτροπικό ρευστό: Αν $e = e(\varrho)$ ή $e \approx 0$, τότε θεωρούμε ότι

$$P = P(\varrho)$$

(*μονο-παραμετρική* καταστατική εξίσωση).

• Η προσθήκη ενός ποσού θερμότητας $dQ=TdS$ σε ένα ρευστό προκαλεί, κατά ένα μέρος, αύξηση της εσωτερικής του ενέργειας κατά ποσό dU και, κατά το άλλο μέρος, παραγωγή έργου κατά ποσό PdV. Οπότε,

$$TdS = dU + PdV$$

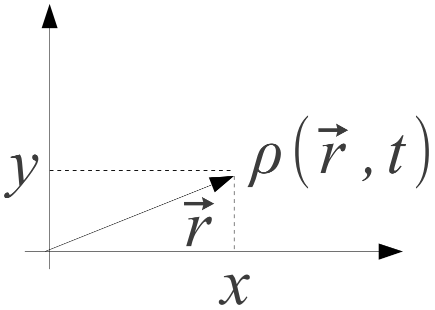
Αδιαβατική ροή: Αν $dS=0$, τότε $dU=-PdV$.

Ισεντροπική ροή: Η *ομαλή* αδιαβατική ροή είναι *ισεντροπική* (ειδάλλως, εάν υπάρχουν κρουστικά κύματα, υπάρχει αύξηση της εντροπίας στην περιοχή του κρουστικού κύματος).

• Για την ισεντροπική ροή, η καταστατική εξίσωση ανάγεται σε μονο-παραμετρική, $P = P(\varrho)$. Για παράδειγμα, για ένα *ιδανικό αέριο*, η καταστατική εξίσωση $P = P(\varrho,T) = (\varrho/m)k_B T$ (όπου k_B η σταθερά του Boltzmann) ανάγεται στην $P = k\varrho^{\gamma}$ (*πολυτροπική* καταστατική εξίσωση), όπου k και γ σταθερές, που παίρνουν τιμές ανάλογα με το είδος του αερίου (π.χ. $\gamma=1$ για ισόθερμο αέριο).

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ EULER

- Οι θερμοδυναμικές μεταβλητές εκφράζονται συναρτήσει του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ και του χρόνου t σε ένα *αδρανειακό* σύστημα συντεταγμένων.

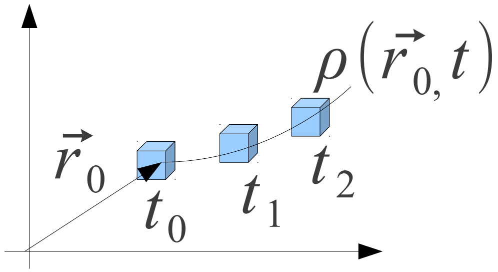


Τοπική παράγωγος: Οι χρονικές μεταβολές μιας μεταβλητής του ρευστού μετρώνται τοπικά στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\vec{r}=\sigma\tau\alpha\theta.}$$

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ LAGRANGE

• Οι θερμοδυναμικές μεταβλητές εκφράζονται ως προς έναν *κινούμενο στοιχειώδη όγκο* dV, που ορίζεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_0$ που έχει τη χρονική στιγμή $t=t_0$.



Ο στοιχ. όγκος dV περιλαμβάνει πάντοτε τα *ίδια σωματίδια* και η *τροχιά* του είναι μια μονο-παραμετρική καμπύλη

$$\vec{r}=\vec{r}(\vec{r}_0, t)$$

***Ολική παράγωγος**:* Οι χρονικές μεταβολές μιας μεταβλητής του ρευστού μετρώνται ως προς κινούμενο στοιχειώδη όγκο dV, κατά μήκος της τροχιάς του:

$$\frac{D\rho}{Dt}=\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0=\sigma\tau\alpha\theta.}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ

- Η ταχύτητα του ρευστού ορίζεται σε μεταβλητές Lagrange:

$$\vec{v}=\frac{D\vec{r}}{Dt}=\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0=\sigma\tau\alpha\theta.}$$

- ***Σχέση μεταξύ ολικής και τοπικής παραγώγου***:

Επειδή

$$\begin{aligned}\rho&=\rho\left(\vec{r},t\right)\\&=\rho\left(\vec{r}\left(\vec{r}_{0,}t\right),t\right)\\&=\rho\left(x\left(\vec{r}_{0,}t\right),y\left(\vec{r}_{0,}t\right),z\left(\vec{r}_{0,}t\right),t\right)\end{aligned}$$

βρίσκουμε

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0=\sigma\tau\alpha\theta.}=\left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{\vec{r}=\sigma\tau\alpha\theta.}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0=\sigma\tau\alpha\theta.}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0=\sigma\tau\alpha\theta.}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0=\sigma\tau\alpha\theta.}$$

ή

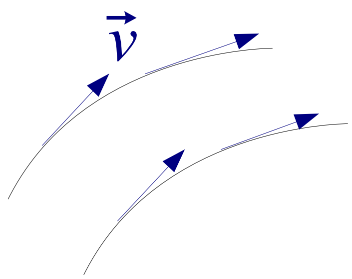
$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho$$

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ, ΓΡΑΜΜΕΣ ΡΟΗΣ

- *Η επιτάχυνση του ρευστού ορίζεται επίσης σε μεταβλητές Lagrange*

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$$

- ***Γραμμές ροής:*** Σε κάποια συγκεκριμένη χρονική σιγμή $t = t_0$, οι *γραμμές ροής* είναι γραμμές των οποίων το *εφαπτόμενο διάνυσμα* σε κάθε σημείο τους είναι παράλληλο προς το πεδίο ταχυτήτων $\vec{v}$, δηλαδή $d\vec{r} \parallel \vec{v}$.



- ***Μόνιμη ροή***: Αν μια ροή δεν εξαρτάται από τη χρονική συντεταγμένη t, δηλαδή

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

τότε είναι *μόνιμη*, και οι γραμμές ροής συμπίπτουν με τις τροχιές.

ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ, ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΡΟΗ

• Ορίζουμε ως το *διάνυσμα του στροβολισμού*:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{v}$$

Για κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega}$, η ροή ονομάζεται *σύγχρονη*, εάν

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega}$$

• ***Δυναμική ροή***: Εάν το πεδίο ταχυτήτων δίνεται από την κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης (δυναμικό) φ, η ροή ονομάζεται *δυναμική*

$$\vec{v} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Τότε:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$$

και άρα

$$\vec{\omega} = 0$$

Δηλαδή, η *δυναμική ροή* είναι *αστρόβιλη*, και αντιστρόφως.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΑΖΑΣ, ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

• ***Δυνάμεις μάζας*** είναι αυτές που δρουν σε όλη την *έκταση* του ρευστού (π.χ. βαρύτητα, δύναμη Lorentz κ.λ.π.). Εάν $\Delta\vec{F}$ η συνισταμένη των δυνάμεων μάζας, τότε ορίζουμε την *πυκνότητα δυνάμεων μάζας* ως

$$\vec{f} = \lim_{m \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m}$$

π.χ. για την περίπτωση της βαρύτητας, $\vec{f} = \vec{g}$ (επιτάχυνση).

• ***Επιφανειακές δυνάμεις***: Σε ένα ιδανικό ρευστό, η πίεση είναι *ισοτροπική* και ασκείται μόνο στην *κάθετη διεύθυνση* προς την επιφάνεια. Σε μια στοιχειώδη επιφάνεια εμβαδού dA, η *δύναμη* που ασκείται λόγω της πίεσης του ρευστού είναι

$$d\vec{F}_{\varepsilon\pi.} = -P\,\hat{n}\,dA$$

(όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια με *φορά προς τα έξω*). Ολοκληρώνοντας σε κλειστή επιφάνεια εμβαδού A που περικλείει όγκο V και εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss:

$$\vec{F}_{\varepsilon\pi.} = -\int_A P\,\hat{n}\,dA = -\int_V \vec{\nabla} P\,dV$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΑΖΑΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ)

• Η μάζα που περικλείεται σε μια χρονική στιγμή t σε όγκο V του ρευστού είναι

$$m = \int_V \rho(\vec{r}, t)\, dV$$

ενώ σε μια άλλη χρονική στιγμή $t+dt$ ο όγκος έχει μεταβληθεί σε V', περικλείοντας μάζα

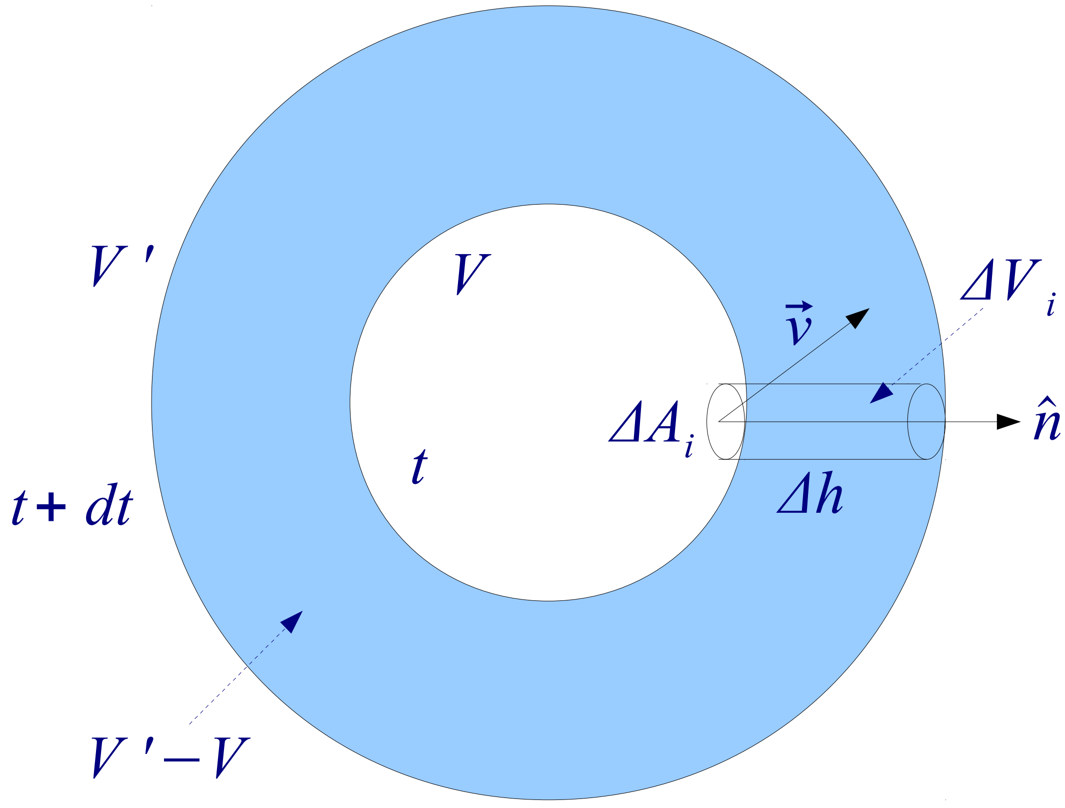
$$m' = \int_{V'} \rho(\vec{r}, t+dt)\, dV$$

Εάν ο όγκος V' περιλαμβάνει το ίδιο σύνολο σωματιδίων με τον όγκο V, τότε η μάζα διατηρείται και αυτό μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{Dm}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = 0$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΑΖΑΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ)

- Υπολογισμός:



ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΑΖΑΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ)

- Υπολογισμός (συνέχεια):

$$0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{V'}\rho(\vec{r},t+\Delta t)\,dV-\int_{V}\rho(\vec{r},t)\,dV}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V'-V}\rho(\vec{r},t+\Delta t)\,dV+\int_{V}\left[\rho(\vec{r},t+\Delta t)-\rho(\vec{r},t)\right]dV\right]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i}\rho(\vec{r},t+\Delta t)\frac{\Delta V_i}{\Delta t}+\int_{V}\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}\,dV$$

όπου το πρώτο ολοκλήρωμα όγκου μετατράπηκε σε άθροισμα κυλινδρικών όγκων

$$\Delta V_i=\Delta A_i\cdot\Delta h=\Delta A_i\cdot(\vec{v}\,\hat{n}\,\Delta t)$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΑΖΑΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ)

• Υπολογισμός (συνέχεια):

$$0=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_i \rho(\vec{r},t+\Delta t)\vec{v}\,\hat{n}\,\Delta A_i+\int_V \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t}dV$$

$$=\int_A \rho(\vec{r},t)\vec{v}\,\hat{n}\,dA+\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV$$

$$=\int_V \vec{\nabla}(\rho\vec{v})dV+\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV$$

$$=\int_V \left[\vec{\nabla}(\rho\vec{v})+\frac{\partial \rho}{\partial t}\right]dV$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα του Gauss. Σε *διαφορική μορφή*:

$$\vec{\nabla}(\rho\vec{v})+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

ή

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\vec{\nabla}\vec{v}=0$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΟΡΜΗΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ)

- Η ορμή ενός στοιχειώδους όγκου ΔV είναι

$$\Delta\vec{Q} = \Delta m\,\vec{v} = \rho\,\vec{v}\,\Delta V$$

ενώ η ολική ορμή είναι

$$\vec{Q} = \int_V \rho\,\vec{v}\,dV$$

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα προβλέπει:

$$\vec{F}_{ολ.} = \vec{F}_{μάζ.} + \vec{F}_{επ.} = \Delta m\,\vec{a} = \frac{D\vec{Q}}{Dt}$$

$$\Rightarrow \int_V \rho\,\vec{f}\,dV - \int_A p\,\hat{n}\,dA = \frac{D}{Dt}\int_V \rho\,\vec{v}\,dV$$

$$\Rightarrow \int_V \rho\,\vec{f}\,dV - \int_V \vec{\nabla}P\,dV = \frac{D}{Dt}\int_V \rho\,\vec{v}\,dV$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΟΡΜΗΣ (ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ)

- (συνέχεια): Όμως, επειδή ήδη δείξαμε ότι $Dm/Dt=0$

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\vec{v}\,dV=\frac{D}{Dt}\int_V \vec{v}\,dm=\int_V \frac{D\vec{v}}{Dt}\,dm=\int_V \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}\,dV$$

κι έτσι

$$\int_V \left[\rho\vec{f}-\vec{\nabla}P-\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}\right]dV=0$$

Σε διαφορική μορφή:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\vec{\nabla}P+\rho\vec{f}$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Ένα ρευστό περιέχει μακροσκοπική *κινητική ενέργεια* καθώς και *εσωτερική θερμική ενέργεια*. Η πυκνότητα της ενέργειας που έχει το ρευστό είναι

$$E = \varepsilon_{\kappa\iota\nu} + \varepsilon_{\varepsilon\sigma}$$

$$= \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε $\varepsilon_{\varepsilon\sigma} = U/V = (m/V)(U/m) = \rho e$).

Η *ολική ενέργεια* που περικλείεται στον όγκο του ρευστού είναι

$$\int_V E\, dV = \int_V \rho \left(v^2/2 + e \right) dV$$

Η ενέργεια ενός στοιχειώδους όγκου μπορεί να αλλάζει εξ' αιτίας:

• του έργου που παράγουν οι δυνάμεις μάζας που ασκούνται,
• του έργου που παράγουν οι επιφανειακές δυνάμεις που ασκούνται,
• της εσωτερικής παραγωγής θερμότητας (π.χ. λόγω θερμοπυρηνικών αντιδράσεων),
• της απώλειας ενέργειας λόγω διάδοσης θερμότητας ή ακτινοβολίας.

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Το έργο που παράγεται από μια δύναμη που δρα πάνω σε ένα υλικό σημείο είναι $\vec{v} \cdot \vec{F}$. Άρα το έργο που παράγουν οι δυνάμεις μάζας στο ρευστό είναι

$$\int_V \vec{v} \cdot \rho \vec{f} \, dV$$

ενώ το έργο που παράγουν οι επιφανειακές δυνάμεις είναι

$$\int_A \vec{v} \cdot \left(-P \hat{n}\right) dA$$

Εάν ορίσουμε ως λ τον *ρυθμό παραγωγής εσωτερικής ενέργειας* ανά μονάδα μάζας, τότε ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ενέργειας λόγω εσωτερικής παραγωγής ενέργειας είναι

$$\int_V \lambda \, \rho \, dV$$

Εάν ορίσουμε ως $\vec{F}_{\theta\varepsilon\rho\mu}$ το *διάνυσμα της ροής θερμότητας* (θερμότητα που ρέει ανά μονάδα επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου), τότε ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ενέργειας λόγω ροής θερμότητας είναι

$$\int_A \vec{F}_{\theta\varepsilon\rho\mu} \cdot \left(-\hat{n}\right) dA$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Τελικά, η διατήρηση της ενέργειας εκφράζεται από τη σχέση:

$$\frac{D}{Dt}\int_V E\,dV = \int_V \rho\,\vec{v}\cdot\vec{f}\,dV - \int_A P\,\vec{v}\cdot\hat{n}\,dA + \int_V \lambda\,\rho\,dV - \int_A \vec{F}_{\theta\varepsilon\rho\mu}\cdot\hat{n}\,dA$$

Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της μάζας καθώς και το νόμο του Gauss, η παραπάνω σχέση μπορεί εύκολα να γραφεί στην εξής διαφορική μορφή:

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(v^2/2+e\right) = \rho\,\vec{v}\cdot\vec{f} - \vec{\nabla}\left(P\,\vec{v}\right) + \lambda\rho - \vec{\nabla}\,\vec{F}_{\theta\varepsilon\rho\mu}$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση κίνησης με την ταχύτητα και την αφαιρούμε από την παραπάνω εξίσωση. Χρησιμοποιώντας και την εξίσωση συνέχειας, τελικά προκύπτει ο διαφορικός νόμος

$$\frac{De}{Dt} = \frac{P}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} + \lambda - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\,\vec{F}_{\theta\varepsilon\rho\mu}$$

ΤΟ ΠΛΗΡΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ

• Για ένα ιδανικό ρευστό, οι μεταβλητές ϱ, P, e και $\vec{v}$ καθορίζονται από το *πλήρες σύστημα* των εξισώσεων:

$\varrho \rightarrow$ $$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\vec{\nabla}\vec{v}=0$$ (εξίσωση συνέχειας)

$P \rightarrow$ $$P = P(\varrho,\, e)$$ (καταστατική εξίσωση)

$\vec{v} \rightarrow$ $$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\vec{\nabla}P+\rho\vec{f}$$ (εξίσωση κίνησης)

$e \rightarrow$ $$\frac{De}{Dt}=\frac{P}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}+\lambda-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\vec{F}_{\theta\varepsilon\rho\mu}$$ (διατήρηση ενέργειας)

ΒΑΡΟΤΡΟΠΙΚΟ ΡΕΥΣΤΟ

• Εάν το ρευστό είναι βαροτροπικό, ώστε $P = P(\varrho)$, και με λ, $\vec{F}_{\theta\varepsilon\rho\mu}$ μηδενικά, τότε η ειδική εσωτερική ενέργεια e συνδέεται άμεσα με τις ϱ, P από τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής, που γίνεται

$$de = \frac{P}{\rho^2} d\rho$$

• Έτσι, η ειδική εσωτερική ενέργεια, δεν είναι πλέον ελεύθερη μεταβλητή και το πλήρες σύστημα για τις ϱ, P και $\vec{v}$ είναι

$\varrho \rightarrow$ $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \vec{v} = 0$$ (εξίσωση συνέχειας)

$P \rightarrow$ $$P = P(\varrho)$$ (καταστατική εξίσωση)

$\vec{v} \rightarrow$ $$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{f}$$ (εξίσωση κίνησης)