ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗ

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

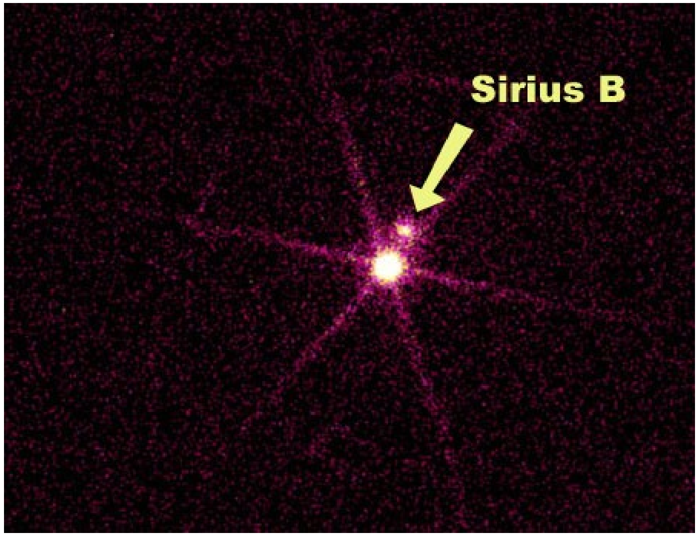
ΛΕΥΚΟΙ ΝΑΝΟΙ

• Ο πρώτος γνωστός λευκός νάνος ήταν ο Sirius B, που ανακαλύφθηκε το 1862. Αρχικά ήταν γνωστή μόνο η φωτεινότητά του

$$L_{SB} \approx 0.03\, L_{\odot}$$

και η μάζα του

$$M_{SB} \approx 1\, M_{\odot}$$



και θεωρούνταν πως πρόκειται για ένα πολύ ψυχρό αστέρα, καθώς για τους αστέρες σε ισορροπία ισχύει ο νόμος των Stefan-Boltzmannn

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

Όμως, το 1915 μετρήθηκε η θερμοκρασία του Sirius B ως

$$T_{SB} \simeq 27{,}000\, K$$

ΛΕΥΚΟΙ ΝΑΝΟΙ

• Γνωρίζοντας ότι $T_\odot \approx 6{,}000\ K$ μπορούμε να υπολογίσουμε

$$\frac{R_{SB}^2 T_{SB}^4}{L_{SB}} = \frac{R_\odot^2 T_\odot^4}{L_\odot}$$

$$\Rightarrow \quad R_{SB} = \left(\frac{T_\odot}{T_{SB}}\right)^2 \left(\frac{L_{SB}}{L_\odot}\right)^{1/2} R_\odot$$

$$\approx 0.01\, R_\odot$$

$$\approx R_{ΓΗΣ}$$

Η ύπαρξη τέτοιων συμπαγών αστέρων, όπου μια μάζα Ηλίου συρρικνώνεται στις διαστάσεις της Γης, εξηγήθηκε τελικά το 1926 από τον Fowler, με βάση την κβαντομηχανική πίεση ενός εκφυλισμένου αερίου ηλεκτρονίων.

• Μέση πυκνότητα: $\bar{\rho}_{SB} \sim \dfrac{3\,M}{4\pi\, R^3} \sim 10^6\, \bar{\rho}_\odot$

• Επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια: $g_{SB} \sim \dfrac{GM}{R^2} \sim 10^4\, g_\odot$

ΠΛΗΡΩΣ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΟ ΑΕΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

• Λόγω της απαγορευτικής αρχής του Pauli, δύο φερμιόνια δεν μπορούν να βρεθούν στον ίδιο χώρο στην ίδια ακριβώς ενεργειακή κατάσταση. Σε ένα αέριο υπό κανονικές συνθήκες πυκνότητας, μόνο 1 στις 10^7 επιτρεπτές ενεργειακές στάθμες είναι κατειλημμένη, οπότε η απαγορευτική αρχή του Pauli δεν έχει κάποιο ορατό αποτέλεσμα.

Σ' ένα λευκό νάνο όμως, θα δείξουμε ότι η πυκνότητα είναι αρκετά μεγάλη ώστε όλες σχεδόν οι ενεργειακές καταστάσεις να είναι κατειλημμένες, δηλαδή το αέριο ηλεκτρονίων είναι (σχεδόν) *πλήρως εκφυλισμένο*.

Ένα αέριο ηλεκτρονίων περιγράφεται από τη στατιστική Fermi-Dirac, σύμφωνα με την οποία η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων με ορμή μεταξύ p και $p+dp$ είναι

$$\begin{aligned} dn &= n(p)\,dp \\ &= F(p)\,\frac{8\pi}{h^3}\,p^2\,dp \end{aligned}$$

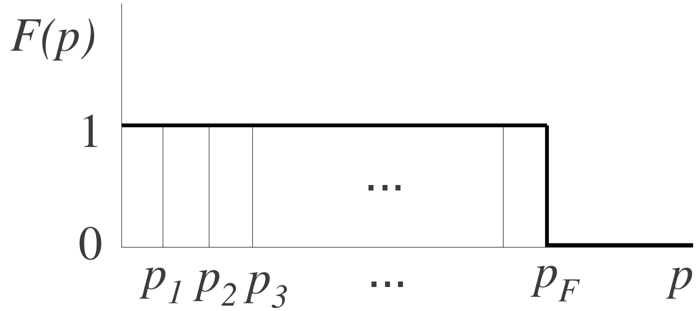
όπου $F(p)$ είναι η συνάρτηση κατανομής των ηλεκτρονίων στις διάφορες επιτρεπτές στάθμες ορμής p.

ΠΛΗΡΩΣ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΟ ΑΕΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

• Σε ένα πλήρως εκφυλισμένο αέριο όλες οι επιτρεπτές στάθμες είναι κατειλημμένες, δηλ. υπάρχει ένα ηλεκτρόνιο σε κάθε στάθμη, μέχρι την τιμή ορμής p_F (*ορμή Fermi*) που έχει το ηλεκτρόνιο με την υψηλότερη ενέργεια από όλα τα υπόλοιπα. Άρα, η συνάρτηση κατανομής έχει τη μορφή:

$$F(p)=\begin{cases}1 & , p \leqslant p_F \\ 0 & , p > p_F\end{cases}$$

όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



ΠΛΗΡΩΣ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΟ ΑΕΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

- Η αριθμητική πυκνότητα του αερίου είναι

$$\begin{aligned} n &= \int dn \\ &= \int_0^{\infty} n(p)\,dp \\ &= \frac{8\pi}{h^3}\int_0^{p_F} p^2\,dp \\ &= \frac{8\pi}{3h^3}p_F^3 \end{aligned}$$

κι έτσι, η ορμή Fermi είναι

$$p_F = \left(\frac{3h^3}{8\pi}n\right)^{1/3}$$

Η αντίστοιχη *ενέργεια Fermi*, για *μη-σχετικιστικό* αέριο, είναι

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2 n_e^{2/3}}{8m_e}$$

ΠΛΗΡΩΣ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΟ ΑΕΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

• Στους λευκούς νάνους με σύνθεση άνθρακα και οξυγόνου το μέσο μοριακό βάρος ανά ηλεκτρόνιο είναι

$$\mu_e = \frac{A}{Z} \simeq 2$$

όπου A είναι ο μαζικός αριθμός και Z ο ατομικός αριθμός των νουκλεονίων του πυρήνα. Η αριθμητική πυκνότητα των βαρυονίων είναι

$$n_B \simeq A\, n_+$$

όπου n_+ είναι η αριθμητική πυκνότητα των θετικά φορτισμένων πυρήνων. Για να υπάρχει *ηλεκτρική ουδετερότητα*, θα πρέπει $Z\, n_+ = n_e$, οπότε

$$n_B = \mu_e n_e$$

και η *πυκνότητα μάζας* (αγνοώντας τη συνεισφορά των ηλεκτρονίων) είναι

$$\rho = m_B\, \mu_e\, n_e$$

όπου m_B είναι η *μάζα ανά βαρυόνιο*.

ΠΛΗΡΩΣ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΟ ΑΕΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

• Τελικώς, η ενέργεια Fermi μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση της πυκνότητας μάζας

$$\varepsilon_F = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{8m_e} \left(\frac{\rho}{\mu_e m_B}\right)^{2/3}$$

Η ενέργεια αυτή μπορεί να συγκριθεί με τη θερμική ενέργεια ανά ηλεκτρόνιο

$$\varepsilon_T \sim \frac{3}{2} k_B T$$

Για τον Sirius B, η εκτίμηση για την κεντρική θερμοκρασία είναι $T_c \sim 8 \times 10^7$ K, οπότε προκύπτει ότι

$$\varepsilon_T \ll \varepsilon_F$$

Άρα μπορούμε να αγνοήσουμε τη θερμική ενέργεια και δικαιολογείται η προσέγγιση του πλήρως εκφυλισμένου αερίου. Στο λευκό νάνο, η πίεση που αντιστέκεται στη βαρύτητα είναι καθαρά κβαντομηχανικής προέλευσης.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ

• Πρόχειρος υπολογισμός:

Λόγω της αρχής της απροσδιοριστίας του Heisenberg, γνωρίζουμε πως για ένα ηλεκτρόνιο ισχύει

$$\Delta x \, \Delta p \geqslant \hbar$$

οπότε, ένα ηλεκτρόνιο περιορισμένο σε ένα διάστημα Δx έχει ορμή τουλάχιστον

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x}$$

Εάν υπάρχει *ένα* ηλεκτρόνιο ενά κυβικό όγκο με πλευρά Δx, *τότε η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων είναι*

$$n = \frac{N}{V} \sim \frac{1}{\Delta x^3}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x \sim n^{-1/3}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ

Οπότε

$$\Delta p \sim \hbar n^{1/3}$$

$$\Rightarrow \quad m_e v \sim \hbar n^{1/3}$$

(θεωρώντας ότι $\Delta v \sim v$).

Από τη στατιστική φυσική, γνωρίζουμε ότι η πίεση ενός αερίου αριθμητικής πυκνότητας n δίνεται από τη σχέση

$$P = \frac{1}{3} n < pv >$$

(όπου με < > υποδηλώνουμε μέση τιμή). Προσεγγιστικά:

$$P \sim n \cdot \hbar n^{1/3} \cdot \frac{\hbar n^{1/3}}{m_e}$$

$$\Rightarrow \quad P \sim \frac{\hbar^2}{m_e} n^{5/3}$$

Με τον ακριβή υπολογισμό θα δείξουμε ότι βρήκαμε τη σωστή εξάρτηση.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ

- Ακριβής υπολογισμός:

Το διαφορικό της πίεσης είναι

$$\begin{aligned} dP &= \frac{1}{3} p\, v\, dn \\ &= \frac{1}{3} p\, v\, n(p)\, dp \\ &= \frac{1}{3} p\, v\, F(p) \frac{8\pi}{h^3} p^2\, dp \end{aligned}$$

κι έτσι η πίεση είναι

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} p^3\, v\, dp$$

Επειδή σε πολύ μεγάλες πυκνότητες τα ηλεκτρόνια μπορεί να αναπτύξουν *σχετικιστικές ταχύτητες*, στον ακριβή υπολογισμό θα χρησιμοποιήσουμε για την ορμή τη σχέση της Ειδικής Θεωρίας Σχετικότητας

$$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{p}{m_e} \left(1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2} \right)^{-1/2}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ

Οπότε

$$P = \frac{8\pi}{3h^3 m_e} \int_0^{p_F} \frac{p^4}{\sqrt{1 + p^2/(m_e c)^2}} dp$$

Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι

$$P = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \left\{ X\sqrt{1+X^2}\left(2X^2 - 3\right) + 3\ln\left(X + \sqrt{1+X^2}\right) \right\}$$

όπου ορίσαμε την αδιάστατη μεταβλητή

$$X = \frac{p_F}{m_e c}$$

η οποία αποτελεί μέτρο σύγκρισης της ορμής Fermi προς τη μη-σχετικιστική έκφραση της ορμή ενός ηλεκτρονίου, $m_e c$, εάν αυτό είχε ταχτύτητα ίση με αυτή του φωτός (θυμίζουμε ότι σε τέτοιες ταχύτητες η τιμή της ορμής διαφέρει από τη μη-σχετικιστική έκφραση και τείνει στο άπειρο).

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

• Μη-σχετικιστικό όριο: $X \ll 1 \quad (p_F \ll m_e c) \quad (\rho \ll 10^6\, g/cm^3)$

$$P = \frac{1}{20}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m_e}n_e^{5/3}$$

Η σχέση αυτή είναι χρήσιμη για λευκούς νάνους μικρής μάζας και δείχνει ότι η πίεση αποτελεί κατά βάση κβαντομηχανικό φαινόμενο (για $h \to 0$ δε θα υπήρχε).

• Σχετικιστικό όριο: $X \gg 1 \quad (p_F \gg m_e c) \quad (\rho \gg 10^6\, g/cm^3)$

$$P = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} h\, c\, n_e^{4/3}$$

Η σχέση αυτή είναι χρήσιμη για λευκούς νάνους μεγάλης μάζας και δείχνει ότι στο όριο αυτό η πίεση καθορίζεται και από τη Σχετικότητα, ενώ η ελάττωση της δύναμης από 5/3 σε 4/3 δείχνει ότι η ύλη συμπιέζεται πιο εύκολα (οδηγώντας τελικά σε κατάρρευση).

ΟΡΙΟ CHANDRASEKHAR

• Στο σχετικιστικό όριο, προκύπτει ότι η μάζα ενός λευκού νάνου έχει μια ανώτατη τιμή. Ένας πρόχειρος υπολογισμός μπορεί να γίνει ως εξής:

Εάν υποθέσουμε προσεγγιστικά ότι ο αστέρας είναι ομογενής, τότε γνωρίζουμε ότι η πίεση στο κέντρο του είναι

$$P_c = \frac{3\, G\, M^2}{8\pi\, R^4}$$

$$\Rightarrow \quad P_c = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{G}{2} M^{2/3} \rho^{4/3}$$

$$\Rightarrow \quad P_c = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{G}{2} M^{2/3} \left(\mu_e m_B n_e\right)^{4/3}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε την ηλεκτρική ουδετερότητα.

ΟΡΙΟ CHANDRASEKHAR

Ο λευκός νάνος διατηρείται σε ισορροπία και αποφεύγει τη βαρυτική κατάρρευση, για όσο η κβαντομηχανική πίεση του πλήρως εκφυλισμένου αερίου ηλεκτρονίων (στο σχετικιστικό όριο) είναι

$$P \geqslant P_c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} h\, c\, n_e^{4/3} \geqslant \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{G}{2} M^{2/3} \left(\mu_e m_B n_e\right)^{4/3}$$

$$\Rightarrow \quad M \leqslant \frac{3}{16\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{\left(m_e m_B\right)^2}$$

άρα η μάζα έχει πράγματι μια ανώτατη τιμή. Με την υπόθεση ότι ο αστέρας είναι ομογενής, το παραπάνω αποτέλεσμα δίνει 0.44 $M_\odot$. Ο ακριβής υπολογισμός δίνει 1.44 $M_\odot$.

Η παραπάνω σχέση συνδέει με μοναδικό τρόπο τις βασικές θεωρίες της φυσικής, δηλ. τη βαρύτητα, την κβαντομηχανική και τη σχετικότητα, μέσω των θεμελιωδών σταθερών G, h και c.