

Αστροφυσική

Ασκήσεις για εξάσκηση - 3

1) Η καταστατική εξίσωση που περιγράφει την κεντρική περιοχή ενός αστέρα νετρονίων δεν είναι γνωστή με ακρίβεια. Υπολογίστε τη μάζα ενός αστέρα νετρονίων ακτίνας $R = 10\text{km}$ και κεντρικής πυκνότητας $\rho_c = 2 \times 10^{15}\text{g/cm}^3$, υποθέτοντας ότι

α) η καταστατική εξίσωση είναι πολυτροπική με δείκτη $\gamma = 2$, και

β) ο αστέρας είναι ομογενής.

Τι παρατηρείτε; Δίνεται ότι για $\gamma = 2$ η λύση της εξίσωσης Lane-Emden είναι $\theta(\xi) = \sin(\xi)/\xi$.

2) Υποθέστε πως η σχέση πίεσης-πυκνότητας στο εσωτερικό ενός σχετικιστικού αστέρα είναι τέτοια, ώστε η ταχύτητα του ήχου στο εσωτερικό του να είναι σταθερή και ίση με το ανώτατο όριο της ταχύτητας του φωτός. Κατασκευάστε μια διαφορική εξίσωση 2ης τάξης (σε αδιάστατες μεταβλητές της επιλογής σας) που να περιγράφει την υδροστατική ισορροπία του αστέρα.

3) Η ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την έκρηξη ενός υπερκαινοφανούς τύπου II είναι της τάξης

$$E_{\text{SN}} \sim 10^{52}\text{erg}.$$

Ελέγξτε εάν η ενέργεια που απελευθερώνεται κατά τη δημιουργία ενός αστέρα νετρονίων επαρκεί για την τροφοδότηση της έκρηξης (υπολογισμός Baade-Zwicky).

4) α) Να δειχθεί ότι υπάρχει ανώτερο όριο για τη μάζα των αστέρων νετρονίων, χρησιμοποιώντας τις εξής δύο υποθέσεις μόνο :

ι) Λόγω της ειδικής θεωρίας σχετικότητας, η ταχύτητα διαφυγής στην επιφάνεια του αστέρα είναι μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός, και

ιι) η πυκνότητα είναι ομογενής και μεγαλύτερη μιας τιμής ρ_0 .

β) Υπολογίστε το ρ_0 ώστε το ανώτερο όριο μάζας να είναι 2.5 ηλιακές μάζες.

5) Να υπολογισθεί ο ρυθμός εκπομπής ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας ενός πάλσαρ, εάν προσεγγισθεί ως ένα περιστρεφόμενο μαγνητικό δίπολο.

6) Υποθέστε ότι η ελάττωση της περιστροφής ενός πάλσαρ περιγράφεται από ένα νόμο δύναμης'

$$\dot{\Omega} = -\kappa\Omega^n,$$

όπου κ και n σταθερές. Εάν P_i είναι η αρχική περίοδος περιστροφής, υπολογίστε την ηλικία του πάλσαρ. Για την περίπτωση της ακτινοβολίας μαγνητικού διπόλου στο κενό, δείξτε ότι οι μεγάλης ηλικίας πάλσαρ έχουν ηλικία $t \sim P/2\dot{P}$.

7) Ένα πάλσαρ έχει σημερινή περίοδο περιστροφής 10ms, η οποία αυξάνει με σχετικό ρυθμό

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{1000\text{yr}},$$

ενώ το νεφέλωμα στο οποίο βρίσκεται έχει φωτεινότητα $L = 10^{38}\text{erg/s}$.

α) Συσχετίστε τα δύο αυτά μεγέθη (κάνοντας απλές υποθέσεις για τη δομή του πάλσαρ).

β) Μετά από πόσα έτη θα έχει ο πάλσαρ περίοδο περιστροφής 100ms και με τι ρυθμό θα επιβραδύνεται αυτή;

8) Υποθέστε ότι η περιστροφή ενός πάλσαρ επιβραδύνεται σύμφωνα με τη σχέση $\dot{\Omega} = -\kappa\Omega^n$, όπου $\Omega = 2\pi\nu$ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και κ, n σταθερές.

α) Βρείτε μια έκφραση για τον δείκτη επιβράδυνσης n , ως συνάρτηση των $\Omega, \dot{\Omega}, \ddot{\Omega}$.

β) Βρείτε ισοδύναμες εκφράσεις του n ως συνάρτηση των $\nu, \dot{\nu}, \ddot{\nu}$ και P, \dot{P}, \ddot{P} , όπου $P = 1/\nu$ είναι η περίοδος περιστροφής.

γ) Για τον πάλσαρ στο νεφέλωμα του Καρκίνου, μετρήθηκαν: $\nu = 30\text{s}^{-1}$, $\dot{\nu} = 3.8 \times 10^{-10}\text{s}^{-2}$, $\ddot{\nu} = 1.21 \times 10^{-20}\text{s}^{-3}$. Υπολογίστε το δείκτη επιβράδυνσης n .

δ) Αν, αντιθέτως, υποθέσουμε πως το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται (και άρα $\kappa = \kappa(t)$), υπολογίστε την ποσοστιαία μεταβολή της έντασης του μαγνητικού πεδίου ανά έτος, ώστε οι παρατηρήσεις των $\nu, \dot{\nu}, \ddot{\nu}$ για τον πάλσαρ στο νεφέλωμα του Καρκίνου να δίνουν $n = 3$. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.