

# ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 1ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ  
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ



# Διδακτέα Ύλη

- ✓ Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής
- ✓ Όρια και Συνέχεια
- ✓ Αντίστροφες και Υπερβατικές συναρτήσεις
- ✓ Παράγωγοι, βασικά θεωρήματα και γεωμετρική ερμηνεία
- ✓ Παράγωγος Διανύσματος
- ✓ Διαφορικά και γραμμικές προσεγγίσεις
- ✓ Εφαρμογές παραγώγων – Ακρότατα και ασύμπτωτες
- ✓ Σειρές Taylor και Maclaurin
- ✓ Βασικές Ακολουθίες και σύγκλιση
- ✓ Ολοκλήρωση συναρτήσεων, Τεχνικές
- ✓ Ορισμένα και Γενικευμένα ολοκληρώματα
- ✓ Εφαρμογές (Εμβαδά μεταξύ επίπεδων καμπύλων, μέση τιμή)

# Προτεινόμενο σύγγραμμα



R.L. FINNEY • M.D. WEIR • F.R. GIORDANO

THOMAS  
Απειροστικός  
λογισμός

Απόδοση στα ελληνικά – Επιστημονική επιμέλεια  
Μαρίλης Ανταγογιάννης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



The Observatory of the University of Thessaloniki [\[more images\]](#)

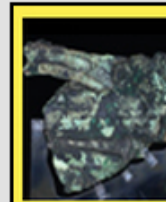
open night

The next open night will take place

**in October, 2015**

[learn more >](#)

## Laboratory of Astronomy



News about the ongoing  
**Antikythera Mechanism  
Research Project**



[Courses \(in Greek\)](#)



[Lectures / Seminars](#)



[Annual Reports](#)



[e - Library](#)



[Conferences](#)



[Astronomy Links](#)



[Administrative issues \(in Greek\)](#)



[Contact Us](#)

## ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι - Τμήμα Τ1

Διδάσκων: [N. Στεργιούλας](#)

**ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ:** Για την παρακολούθηση του τμήματος Τ1 απαιτείται η εγγραφή στην [σελίδα e-learning του μαθήματος](#) με τη μέθοδο της *αυτο-εγγραφής*. Θα σας ζητηθεί να εισάγετε τον *κωδικό αυτο-εγγραφής*, ο οποίος είναι: **gm2015**.

**Πρόγραμμα διδασκαλίας 2014-15:** αίθουσα «B. Ξανθόπουλος» στο Αστεροσκοπείο

Δευτέρα 12 - 2μμ

Τετάρτη 2 - 4μμ

(το πρόγραμμα διδασκαλίας των άλλων δύο τμημάτων, Τ2 και Τ3, βρίσκεται στην [ιστοσελίδα του Τμήματος Φυσικής](#)).

**Προτεινόμενο σύγγραμμα:**

*Απειροστικός Λογισμός*, Thomas, G. B., Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (2012)



**Ασκήσεις:** Στο e-learning θα ανεβαίνουν τα σετ ασκήσεων και εκεί θα παραδίδετε τις λύσεις τους.



  Τα μαθήματά μου ▾  Ελληνικά (el) ▾  Οι ενέργειές μου ▾  Οδηγοί ▾  Επικοινωνία

 Διαμορφώστε το μάθημά σας μετά τη μεταφορά ▾  Αίτηση δημιουργίας νέου μαθήματος ▾

Έχετε εισέλθει ως Νικόλαος Στεργιούλας (Έξοδος)

 ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 

## Θεολογική Σχολή



[περισσότερα...](#)

Τμήματα ▾

## Φιλοσοφική Σχολή



[περισσότερα...](#)

Τμήματα ▾

## Σχολή Θετικών Επιστημών



[περισσότερα...](#)

Τμήματα ▾



ΠΛΟΗΓΗΣΗ



- 🏠 Αρχή
- Η αρχική μου
- 📁 Σελίδες ιστοτόπου
- 📁 Το προφίλ μου
- 📁 Τα μαθήματά μου
- 📁 Μαθήματα
  - 📁 Θεολογική Σχολή
  - 📁 Φιλοσοφική Σχολή
  - 📁 Σχολή Θετικών Επιστημών
    - 📁 Τμήμα Μαθηματικών
    - 📁 Τμήμα Χημείας
    - 📁 Τμήμα Φυσικής
      - 📁 **Προπτυχιακά Μαθήματα**
        - 📁 Γενικά Μαθηματικά I (N. Στεργιούλας)
        - Εργαστήριο Ηλεκτρονικής

Αναζήτηση μαθημάτων:

Μεταβείτε

Σελίδα: 1 2 3 4 (Επόμενο)

## MAY201 Γενικά Μαθηματικά I (N. Στεργιούλας)



Διδάσκοντας: [Νικόλαος Στεργιούλας](#)

Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής – Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής – Όρια και Συνέχεια – Αντίστροφες και Υπερβατικές συναρτήσεις. Παράγωγοι, Βασικά θεωρήματα και γεωμετρική ερμηνεία, Παράγωγος Διανύσματος - Διαφορικά και γραμμικές προσεγγίσεις, Εφαρμογές παραγώγων – Ακρότατα και ασύμπτωτες. Σειρές Taylor και Maclaurin, Βασικές Ακολουθίες και σύγκλιση. Ολοκλήρωση συναρτήσεων – Τεχνικές. Ορισμένα και Γενικευμένα ολοκληρώματα – Εφαρμογές (Εμβαδά μεταξύ επίπεδων καμπύλων, μέση τιμή).

Οδηγίες: Πατώντας πάνω στο όνομα της ενότητας θα εμφανιστεί / κρυφτεί η ενότητα.

## ▼ Πληροφορίες μαθήματος

Σκοπός του μαθήματος είναι η ολοκληρωμένη εκμάθηση του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

- Το μάθημα διδάσκεται σε τρία αυτόνομα τμήματα. Σε κάθε τμήμα θα δίνονται διαφορετικά σετ ασκήσεων, όμως η εξεταστέα ύλη και τα θέματα των εξετάσεων θα είναι κοινά για όλα τα τμήματα.
- Σε τακτικά διαστήματα (ανά μία ή δύο εβδομάδες) θα έχετε να παραδώσετε σετ ασκήσεων.
- Όσοι παραδώσουν τουλάχιστον το 70% των ασκήσεων θα λαμβάνουν μπόνους +1 μονάδα στον τελικό βαθμό, με την προϋπόθεση ότι το γραπτό της τελικής εξέτασης έχει βαθμολογηθεί τουλάχιστον με 5.

Οι ώρες διδασκαλίας του τμήματος T1 είναι

Δευτέρα 12 - 2μμ

Τετάρτη 2 - 4μμ

Το τμήμα T1 διδάσκεται στην αίθουσα «Β. Ξανθόπουλος» στο Αστεροσκοπείο.

- ✉ Δημιουργία νέου Email
- ✎ Υπογραφές
- ⚙ Εμφάνιση Πρόχειρων
- ⚙ Ιστορικό
- ✎ Εναλλακτικά Emails
- ⚙ Διαμόρφωση

 ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ 

 Συμμετέχοντες

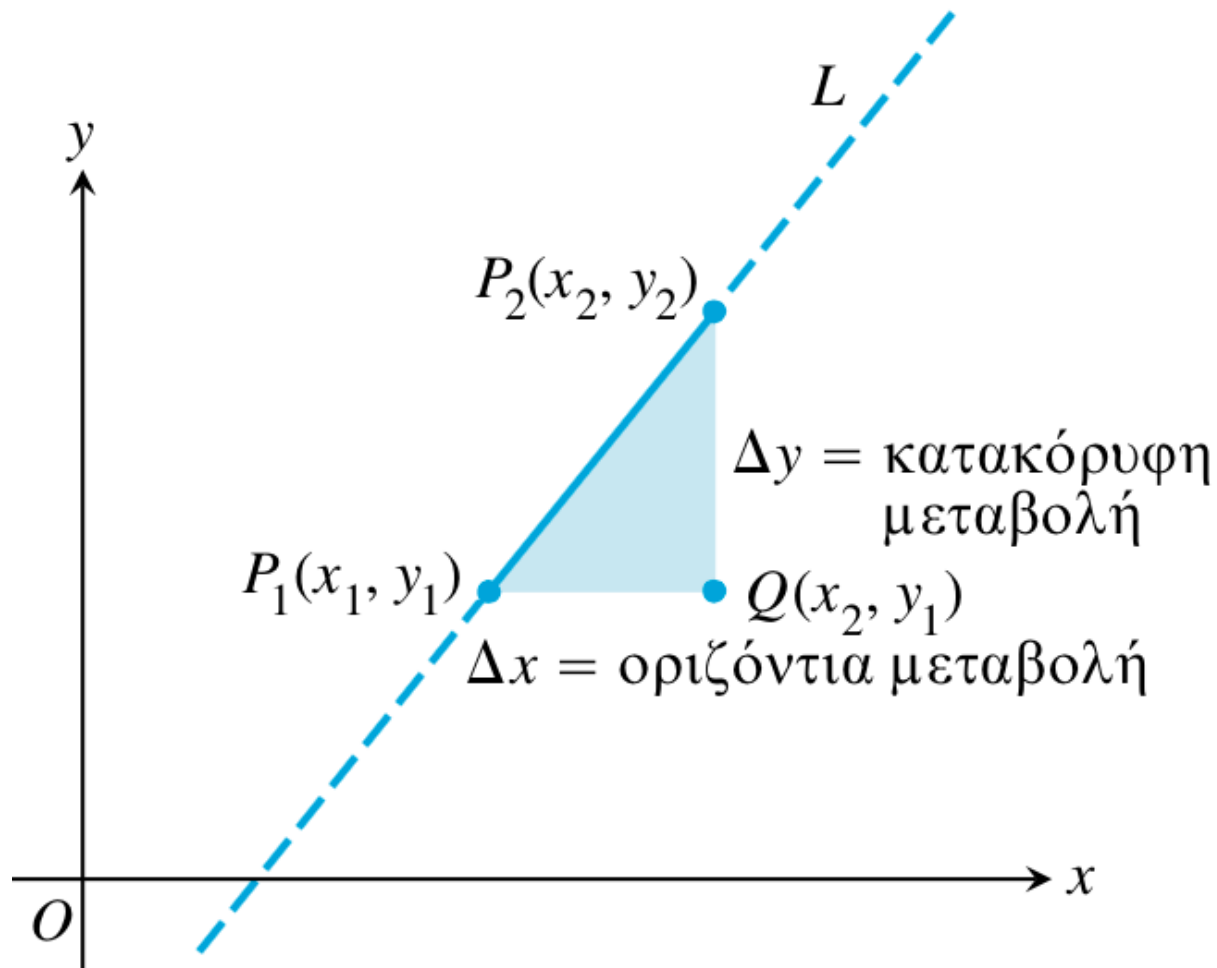
 ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟ 

◀ Σεπτέμβριος 2015 ▶

Κυρ	Δευ	Τρι	Τετ	Πεμ	Παρ	Σαβ
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19



# Μεταβολές - Κλίση



**ΣΧΗΜΑ 1** Η κλίση της ευθείας  $L$  είναι

$$m = \frac{\text{κατακόρυφη μεταβολή}}{\text{οριζόντια μεταβολή}} = \Delta y / \Delta x.$$

# Μεταβολές - Κλίση

**Ορισμός**      **Εξίσωση σημείου-κλίσεως**

Η εξίσωση

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

περιγράφει την ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $(x_1, y_1)$  με κλίση  $m$ . Για λόγους συντομίας θα καλούμε την εξίσωση αυτή **εξίσωση σημείου-κλίσεως**.

**Ορισμός**      **Εξίσωση κλίσεως-τεταγμένης**

Η εξίσωση

$$y = mx + b$$

περιγράφει την ευθεία που έχει κλίση  $m$  και τεταγμένη  $b$ . Για λόγους συντομίας θα καλούμε την εξίσωση αυτή **εξίσωση κλίσεως-τεταγμένης**.

**Ορισμός**      **Γενική γραμμική εξίσωση**

Η εξίσωση

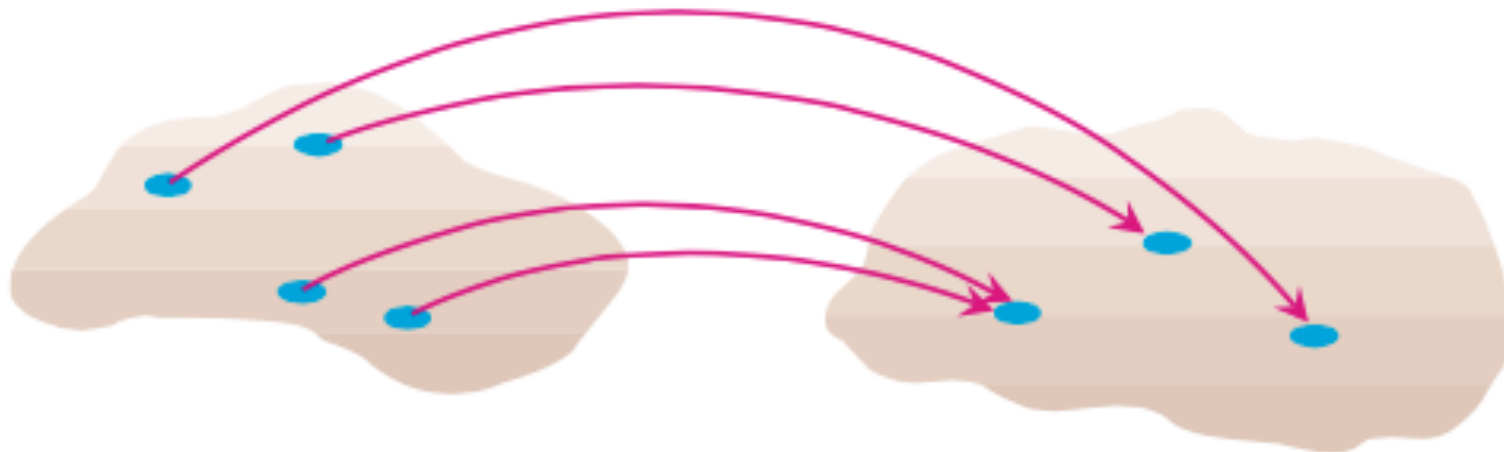
$$Ax + By = C \quad (A \text{ και } B \text{ όχι ταυτοχρόνως μηδέν})$$

είναι μια γενική γραμμική εξίσωση των  $x$  και  $y$ .

# Συνάρτηση

## Ορισμός **Συνάρτηση**

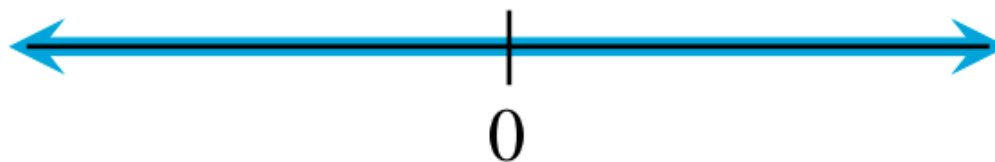
**Συνάρτηση** από ένα σύνολο  $D$  σε ένα σύνολο  $R$  είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει ένα μοναδικό στοιχείο του  $R$  σε κάθε στοιχείο του  $D$ .



$D$  είναι  
το πεδίο ορισμού

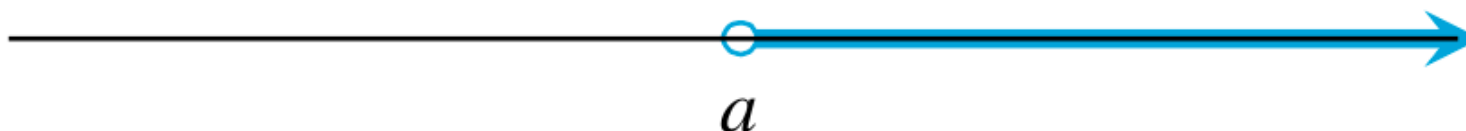
Το σύνολο  $R$  περιέχει  
τις τιμές

# Πεδίο Ορισμού Συνάρτησης



Όνομα: Το πλήρες σύνολο των πραγματικών αριθμών

Συμβολισμός:  $-\infty < x < \infty$  ή  $(-\infty, \infty)$



Όνομα: Το σύνολο των αριθμών που είναι μεγαλύτεροι του  $a$

Συμβολισμός:  $a < x$  ή  $(a, \infty)$

# Πεδίο Ορισμού Συνάρτησης



Όνομα: Το σύνολο των αριθμών που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του  $a$

Συμβολισμός:  $a \leq x$  ή  $[a, \infty)$



Όνομα: Το σύνολο των αριθμών που είναι μικρότεροι του  $b$

Συμβολισμός:  $x < b$  ή  $(-\infty, b)$



Όνομα: Το σύνολο των αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του  $b$

Συμβολισμός:  $x \leq b$  ή  $(-\infty, b]$

# Πεδίο Ορισμού Συνάρτησης



Όνομα: Ανοικτό διάστημα  $ab$   
Συμβολισμός:  $a < x < b$  ή  $(a, b)$



Κλειστό στο  $a$  και ανοικτό στο  $b$   
Συμβολισμός:  $a \leq x < b$  ή  $[a, b)$

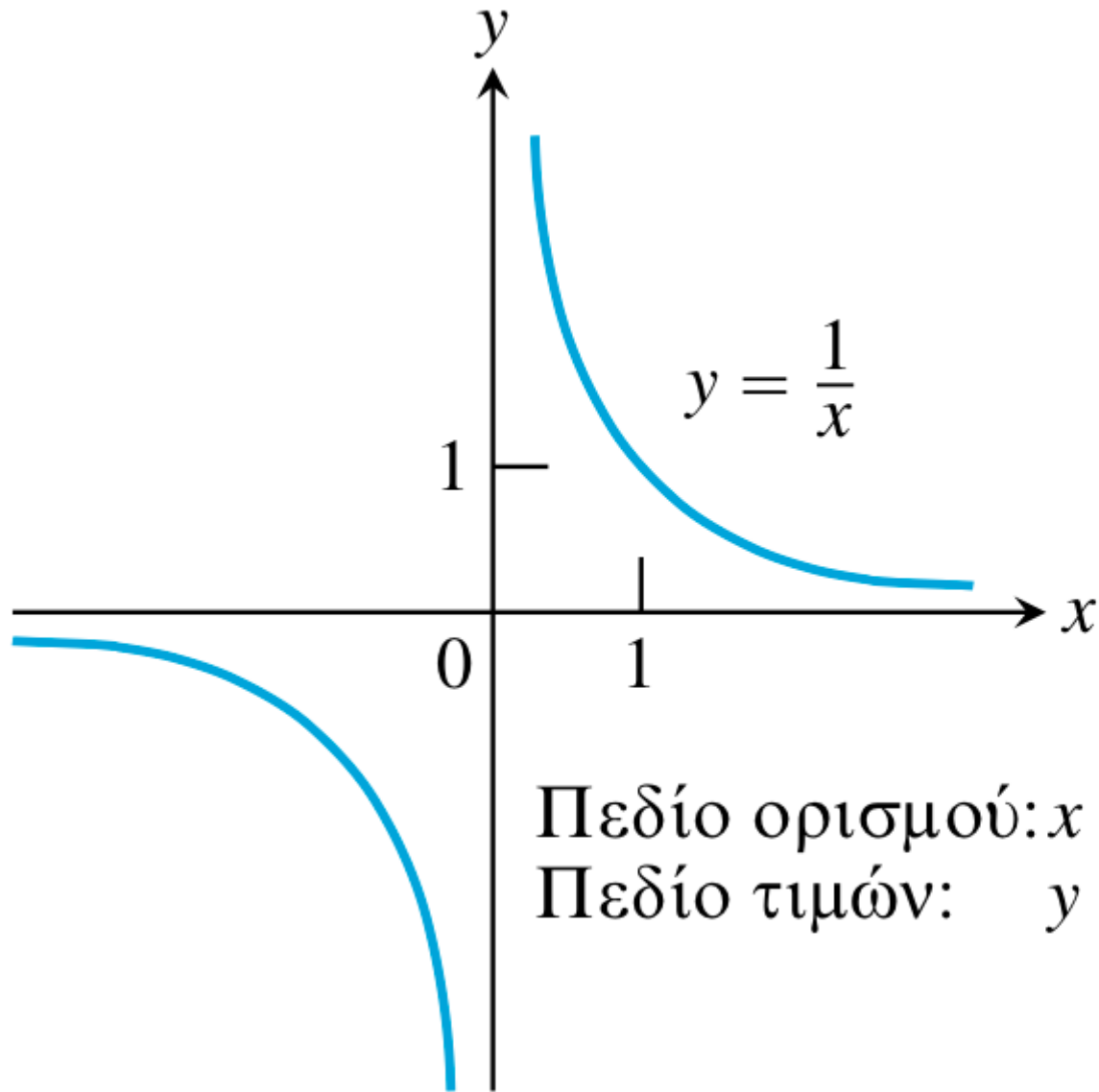


Όνομα: Κλειστό διάστημα  $ab$   
Συμβολισμός:  $a \leq x \leq b$  ή  $[a, b]$

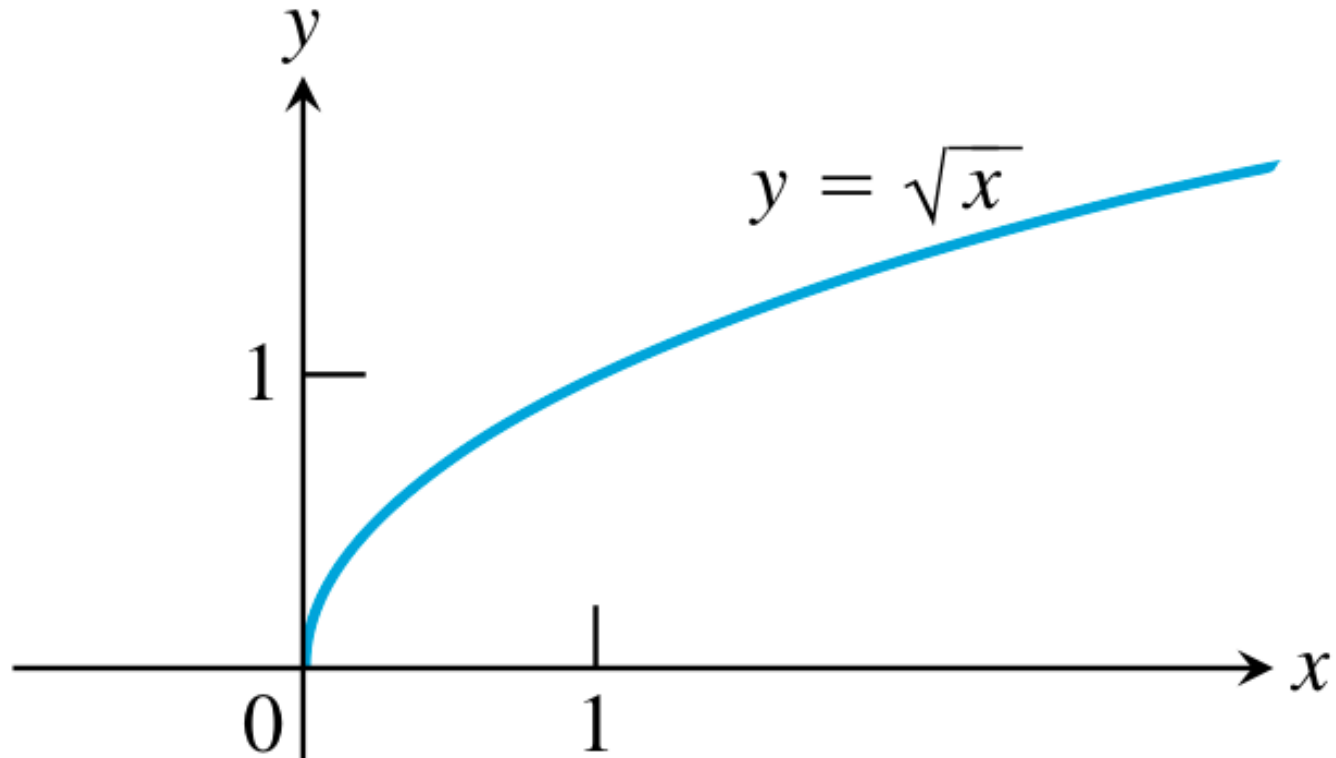


Ανοικτό στο  $a$  και κλειστό στο  $b$   
Συμβολισμός:  $a < x \leq b$  ή  $(a, b]$

# Γραφικές Παραστάσεις



# Γραφικές Παραστάσεις



Πεδίο ορισμού:  $0 \leq x < \infty$

Πεδίο τιμών:  $0 \leq y < \infty$



# Αύξουσες / Φθίνουσες Συναρτήσεις

Συνάρτηση	Αύξουσα στο	Φθίνουσα στο
$y = x^2$	$0 \leq x < \infty$	$-\infty < x \leq 0$
$y = x^3$	$-\infty < x < \infty$	Πουθενά
$y = 1/x$	Πουθενά	$-\infty < x < 0, 0 < x < \infty$
$y = 1/x^2$	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$y = \sqrt{x}$	$0 \leq x < \infty$	Πουθενά
$y = x^{2/3}$	$0 \leq x < \infty$	$-\infty < x \leq 0$

# Άρτιες / Περιττές Συναρτήσεις

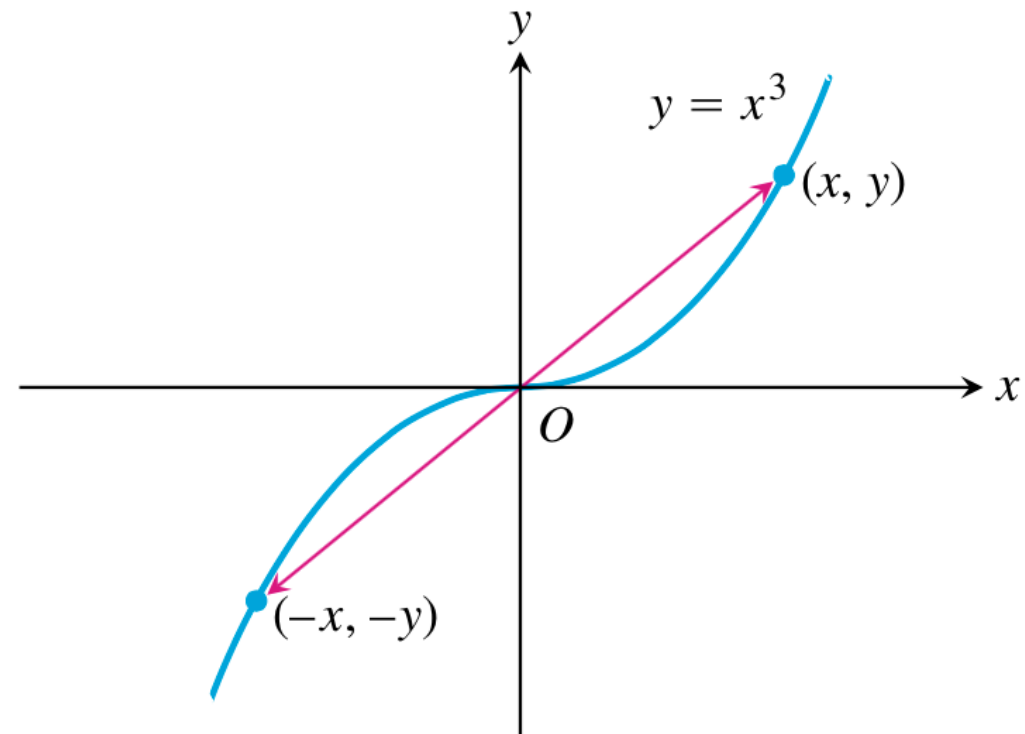
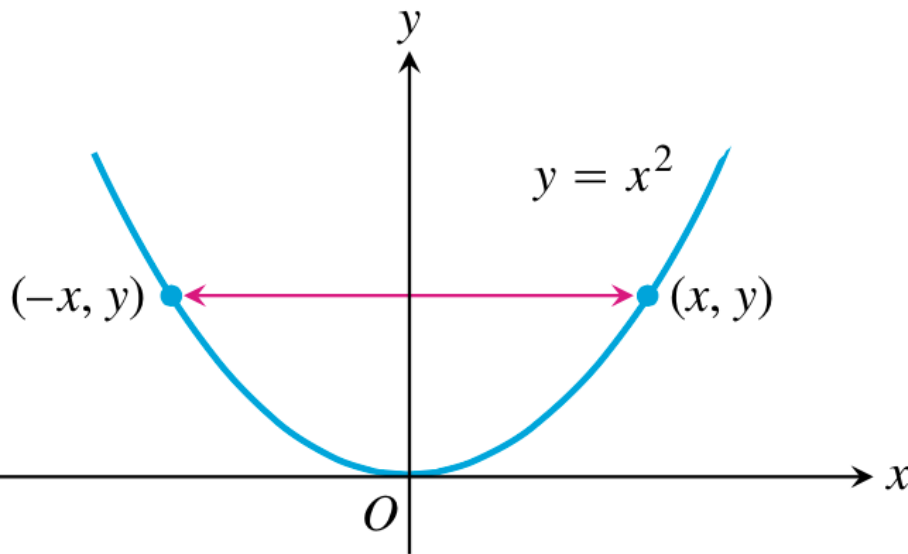
**Ορισμός** Άρτια συνάρτηση, περιττή συνάρτηση

Μια συνάρτηση  $y = f(x)$  είναι

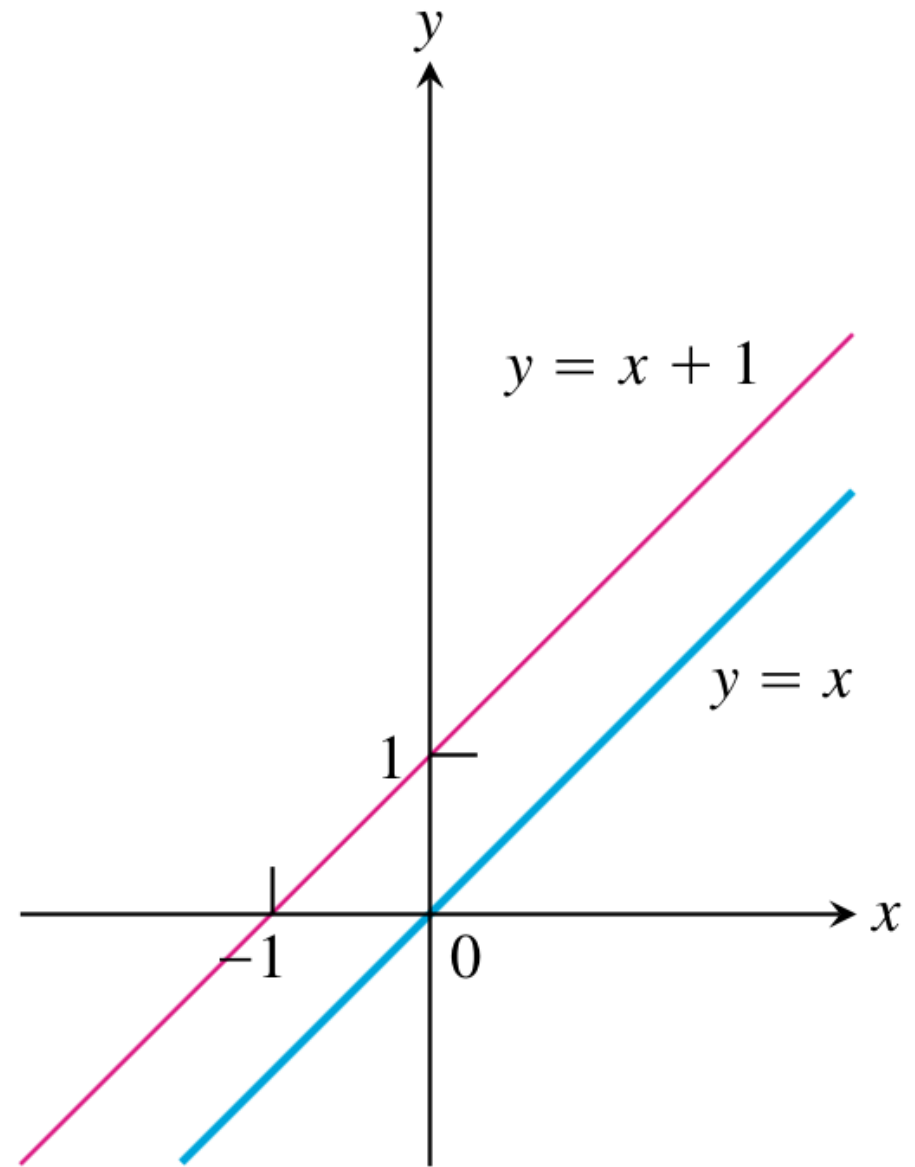
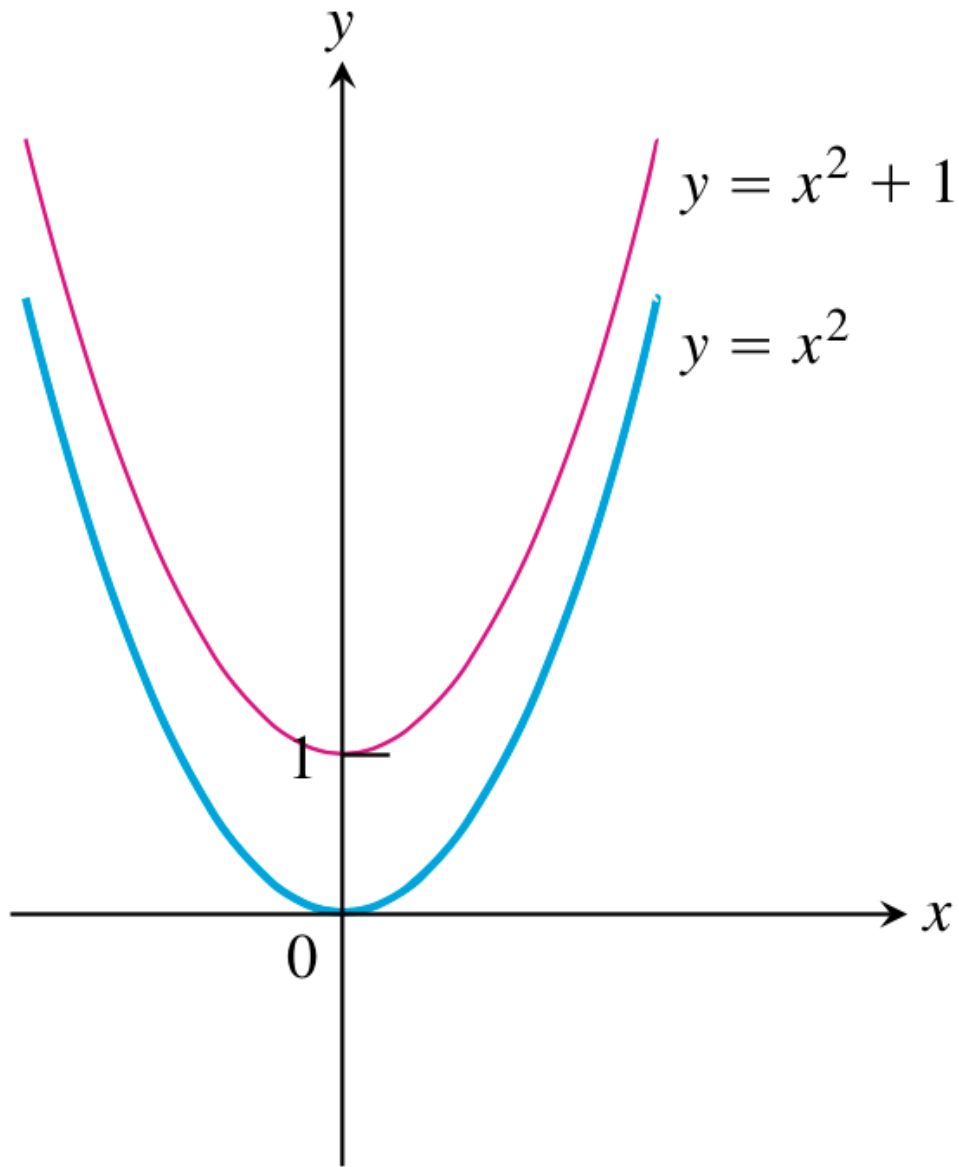
άρτια συνάρτηση του  $x$  αν  $f(-x) = f(x)$ ,

περιττή συνάρτηση του  $x$  αν  $f(-x) = -f(x)$ ,

για κάθε  $x$  που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως.

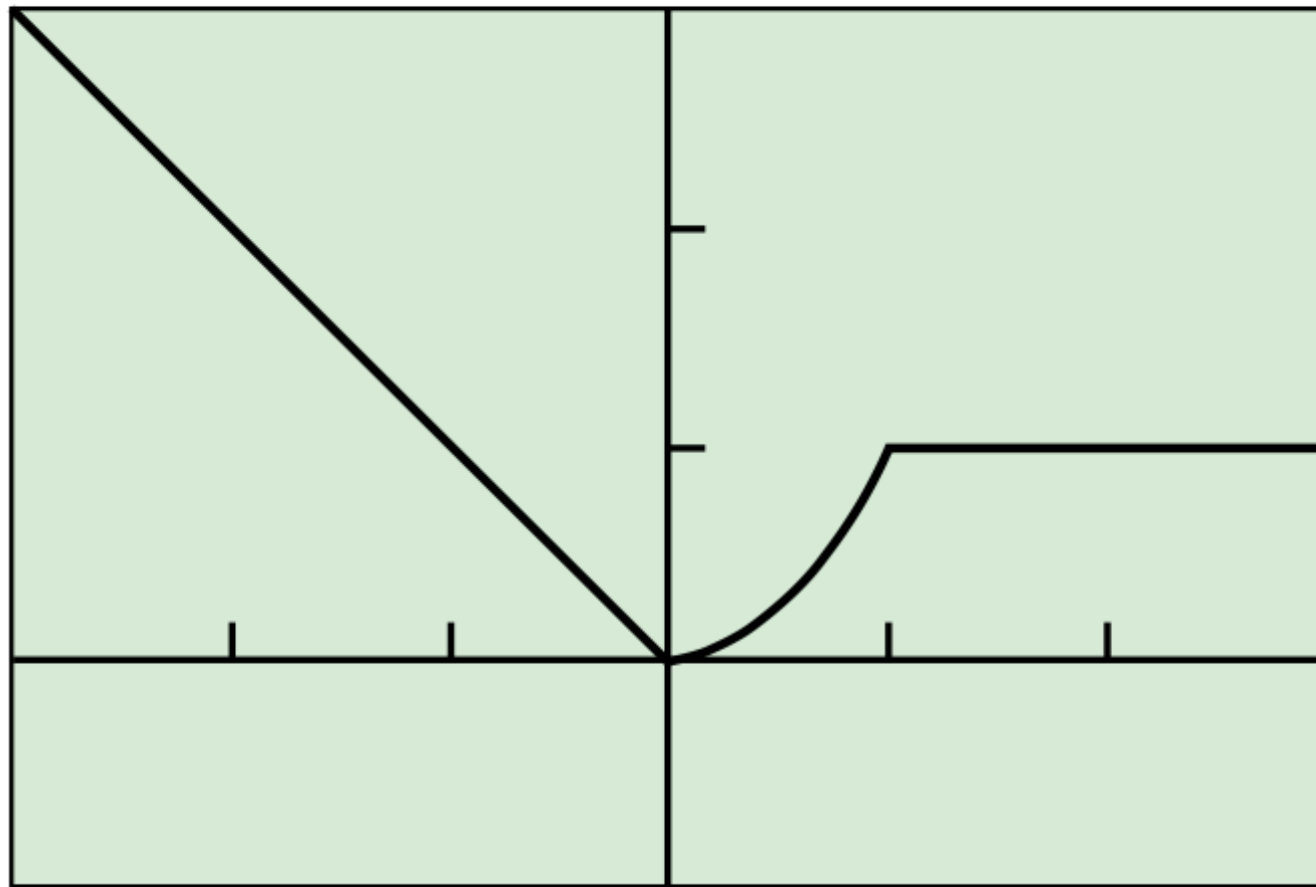


# Άρτιες / Περιττές Συναρτήσεις



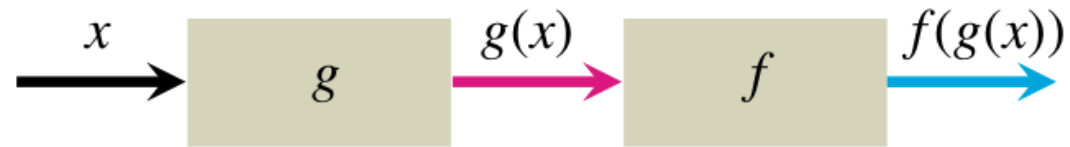
# Τμηματικά Οριζόμενες Συναρτήσεις

$$y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



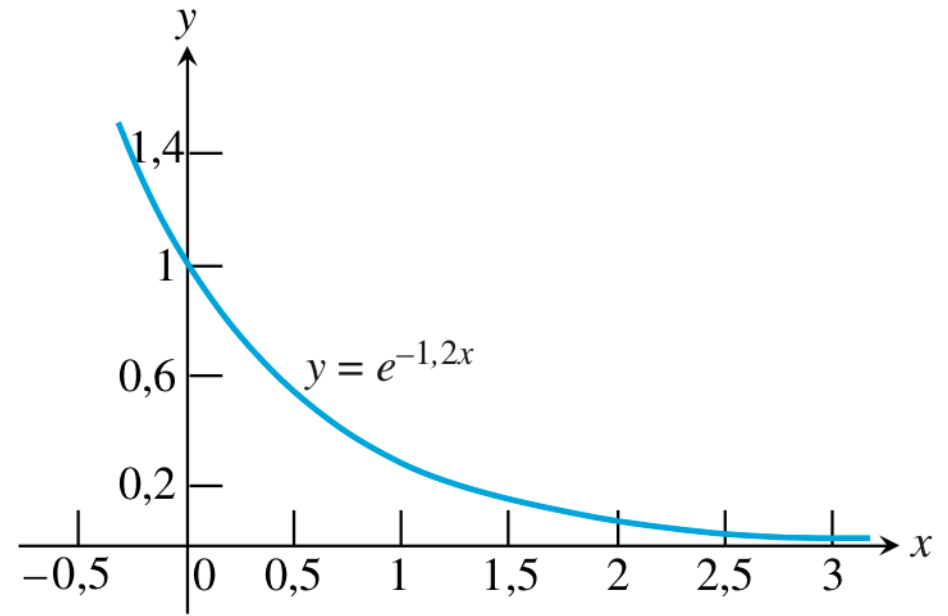
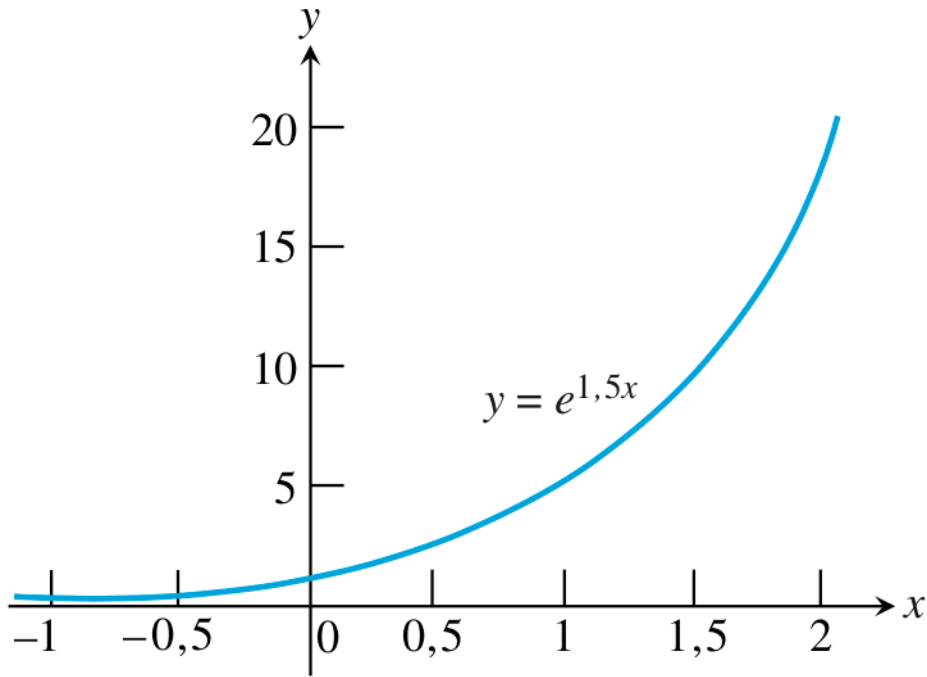
$[-3, 3]$  επί  $[-1, 3]$

# Σύνθετες Συναρτήσεις

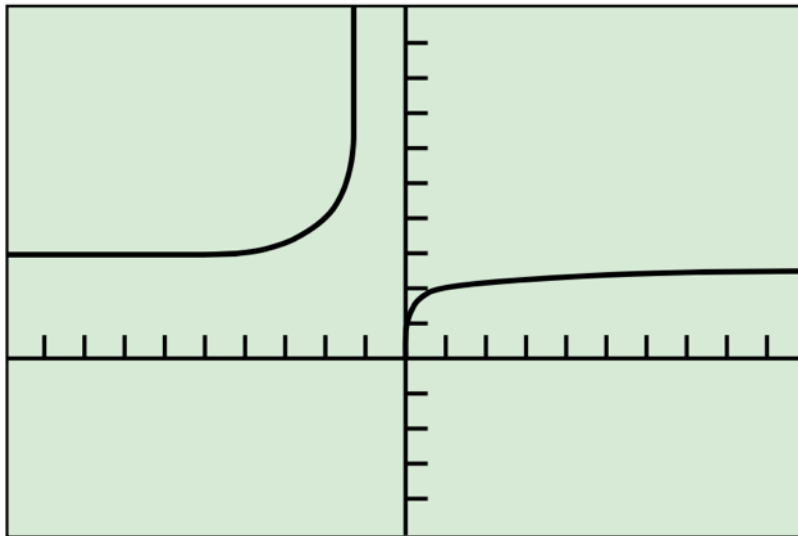


**ΣΧΗΜΑ 23** Δυο συναρτήσεις μπορούν να συντεθούν στο  $x$ , εφόσον η τιμή της πρώτης συναρτήσεως στο  $x$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της δεύτερης. Η σύνθετη συνάρτηση συμβολίζεται ως  $f \circ g$ .

# Εκθετικές Συναρτήσεις



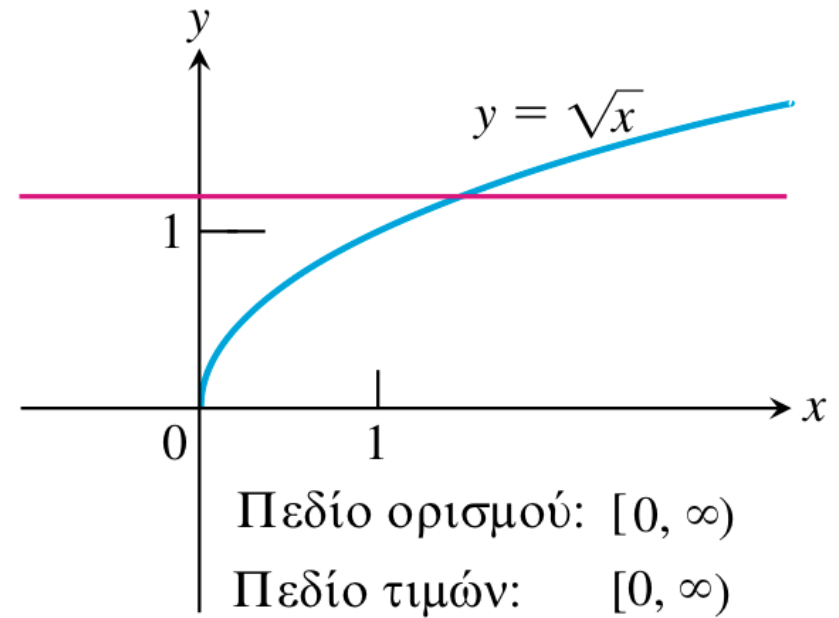
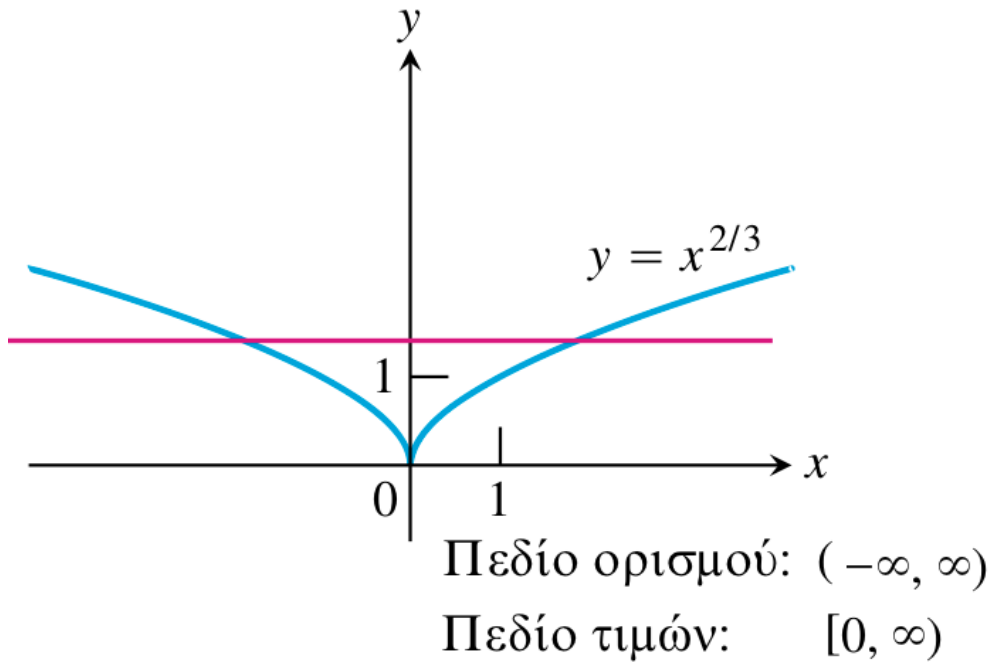
$$y = (1 + 1/x)^x$$



$[-10, 10]$  επί  $[-5, 10]$

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x$$

# Αμφιμονοσήμαντες (1-1) Συναρτήσεις



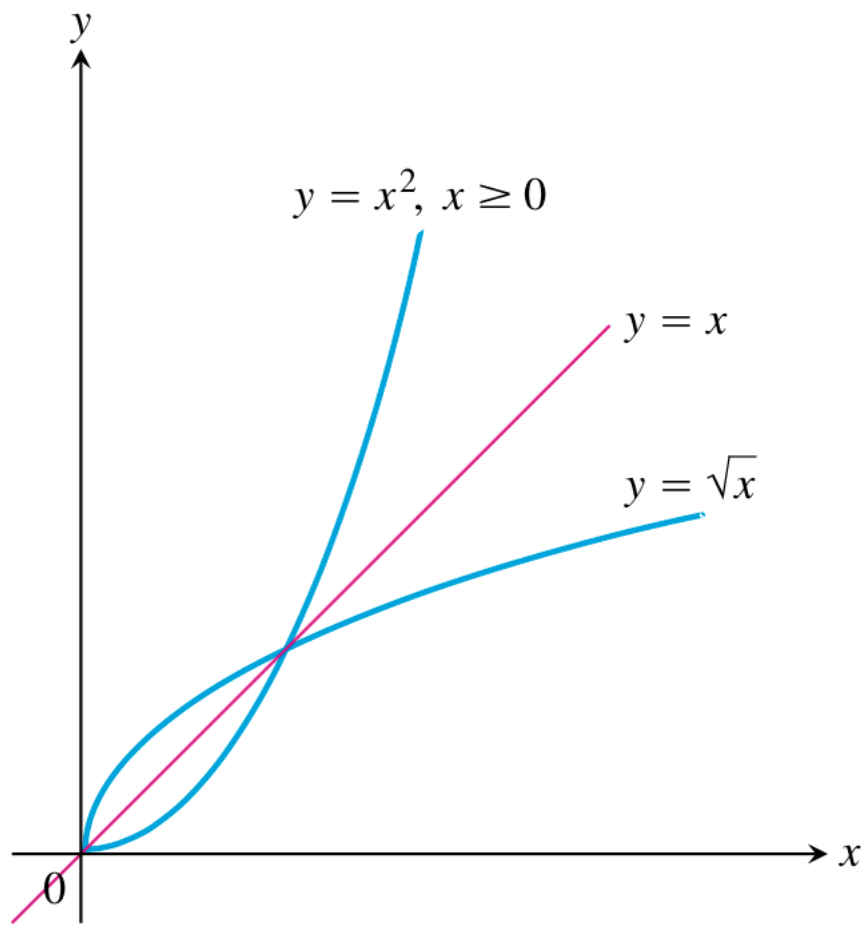
# Αντίστροφες Συναρτήσεις

## Κριτήριο αντιστρόφων

Οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  αποτελούν ζεύγος αντιστρόφων αν και μόνο αν

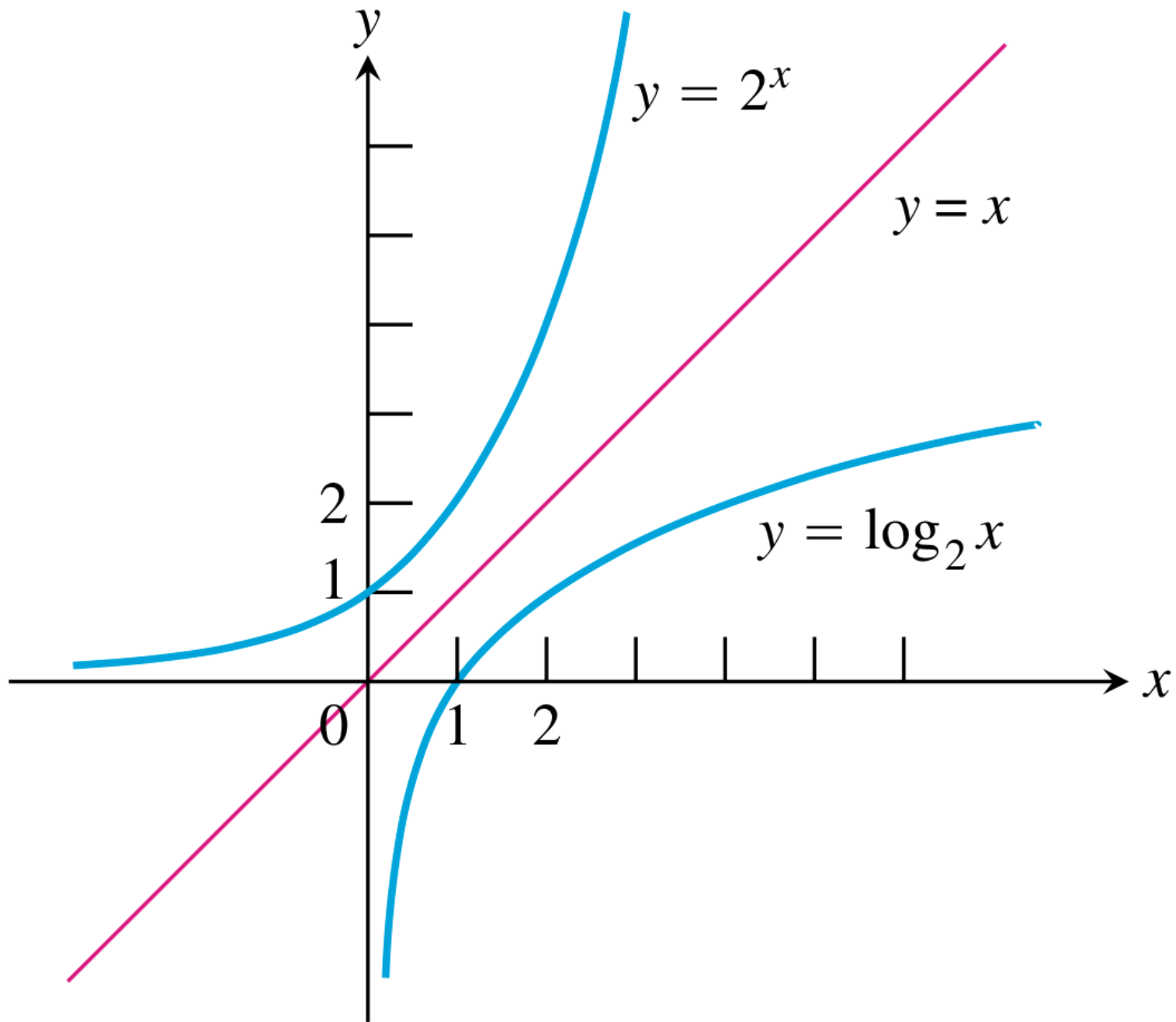
$$f(g(x)) = x \quad \text{και} \quad g(f(x)) = x.$$

Στην περίπτωση αυτή,  $g = f^{-1}$  και  $f = g^{-1}$ .





# Λογαριθμικές Συναρτήσεις



# Λογαριθμικές Συναρτήσεις

Κάθε εκθετική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως η φυσική εκθετική συνάρτηση υψωμένη στην κατάλληλη δύναμη.

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$\begin{aligned} a^x &= e^{\ln(a^x)} \\ &= e^{x \ln a} \end{aligned}$$

# Λογαριθμικές Συναρτήσεις

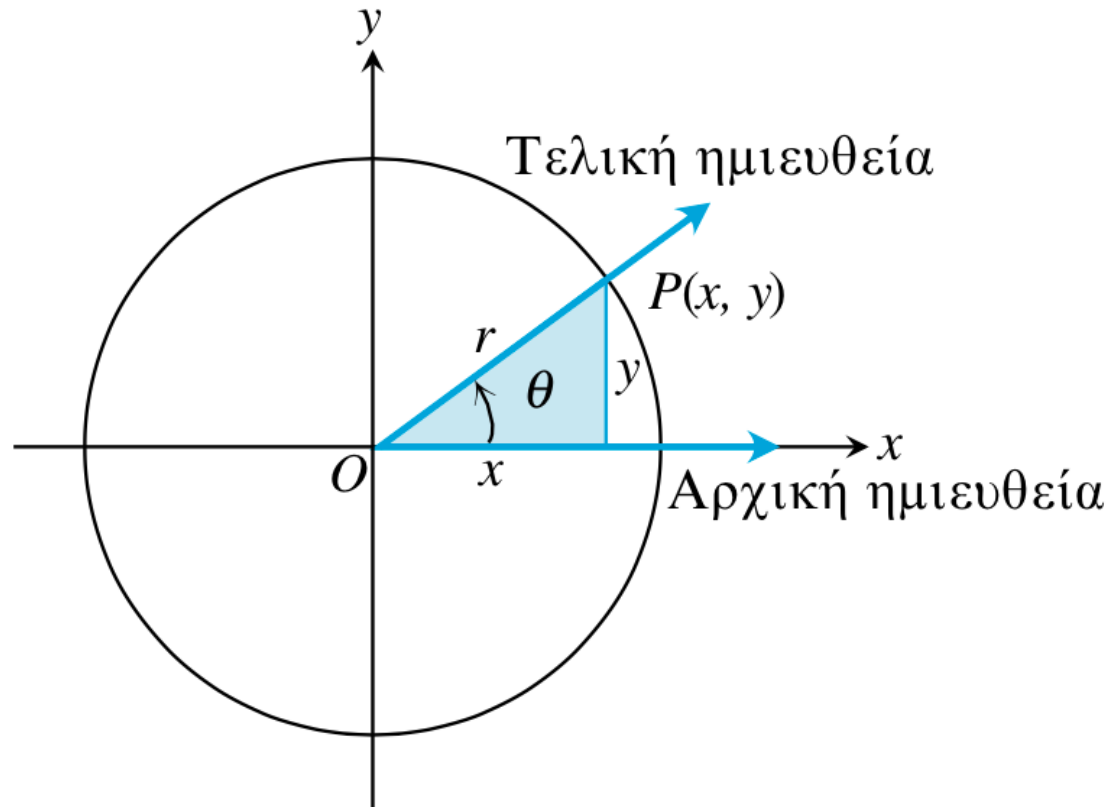
## Τύπος αλλαγής βάσης

Κάθε λογαριθμική συνάρτηση είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο του φυσικού λογαρίθμου.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln a^{\log_a x} \\ &= (\log_a x) \ln a \end{aligned}$$

# Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις



**sine:**  $\sin \theta = \frac{y}{r}$

**cosecant:**  $\csc \theta = \frac{r}{y}$

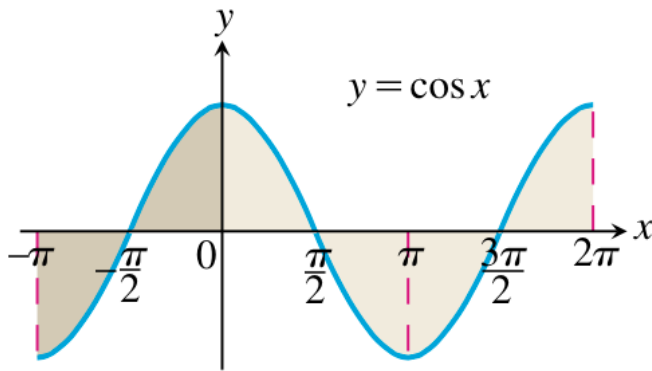
**cosine:**  $\cos \theta = \frac{x}{r}$

**secant:**  $\sec \theta = \frac{r}{x}$

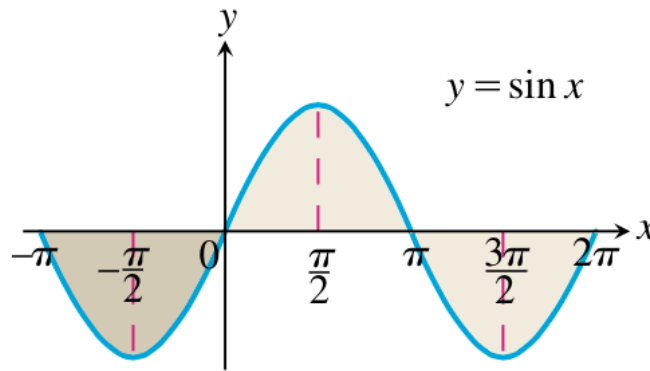
**tangent:**  $\tan \theta = \frac{y}{x}$

**cotangent:**  $\cot \theta = \frac{x}{y}$

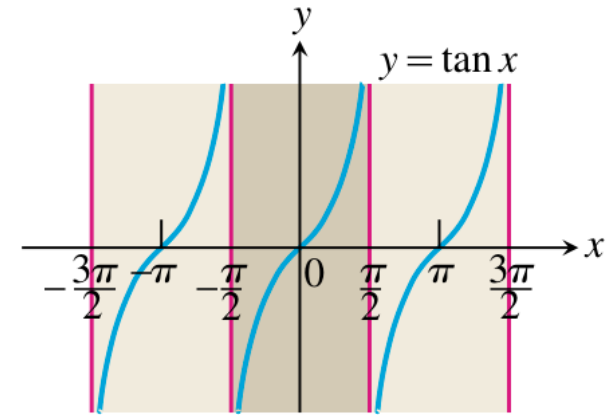
# Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις



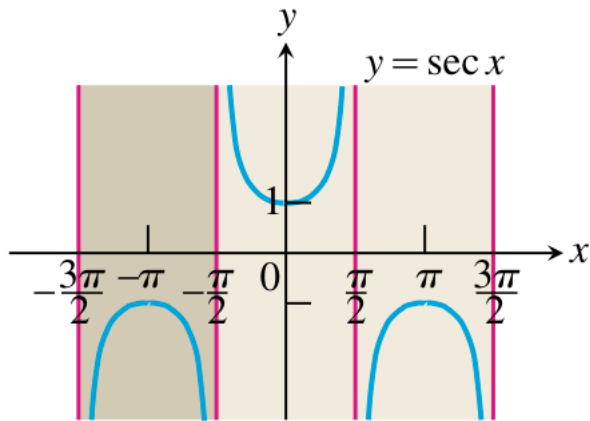
Πεδίο ορισμού:  $-\infty < x < \infty$   
 Πεδίο τιμών:  $-1 \leq y \leq 1$   
 Περίοδος:  $2\pi$



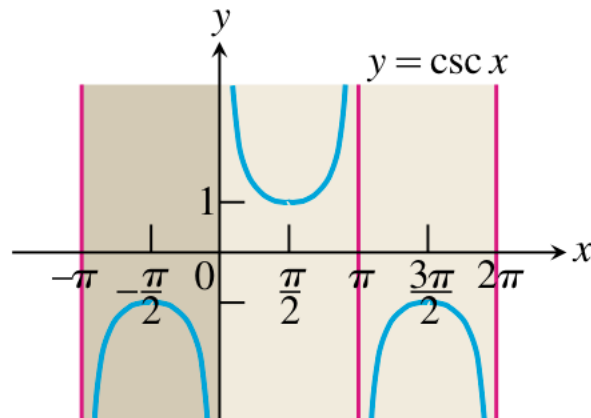
Πεδίο ορισμού:  $-\infty < x < \infty$   
 Πεδίο τιμών:  $-1 \leq y \leq 1$   
 Περίοδος:  $2\pi$



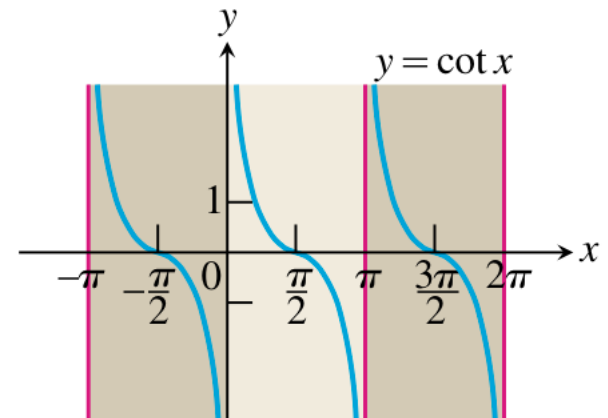
Πεδίο ορισμού:  $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$   
 Πεδίο τιμών:  $-\infty < y < \infty$   
 Περίοδος:  $\pi$



Πεδίο ορισμού:  $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$   
 Πεδίο τιμών:  $y \leq -1$  and  $y \geq 1$   
 Περίοδος:  $2\pi$



Πεδίο ορισμού:  $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$   
 Πεδίο τιμών:  $y \leq -1$  και  $y \geq 1$   
 Περίοδος:  $2\pi$



Πεδίο ορισμού:  $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$   
 Πεδίο τιμών:  $-\infty < y < \infty$   
 Περίοδος:  $\pi$

# Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

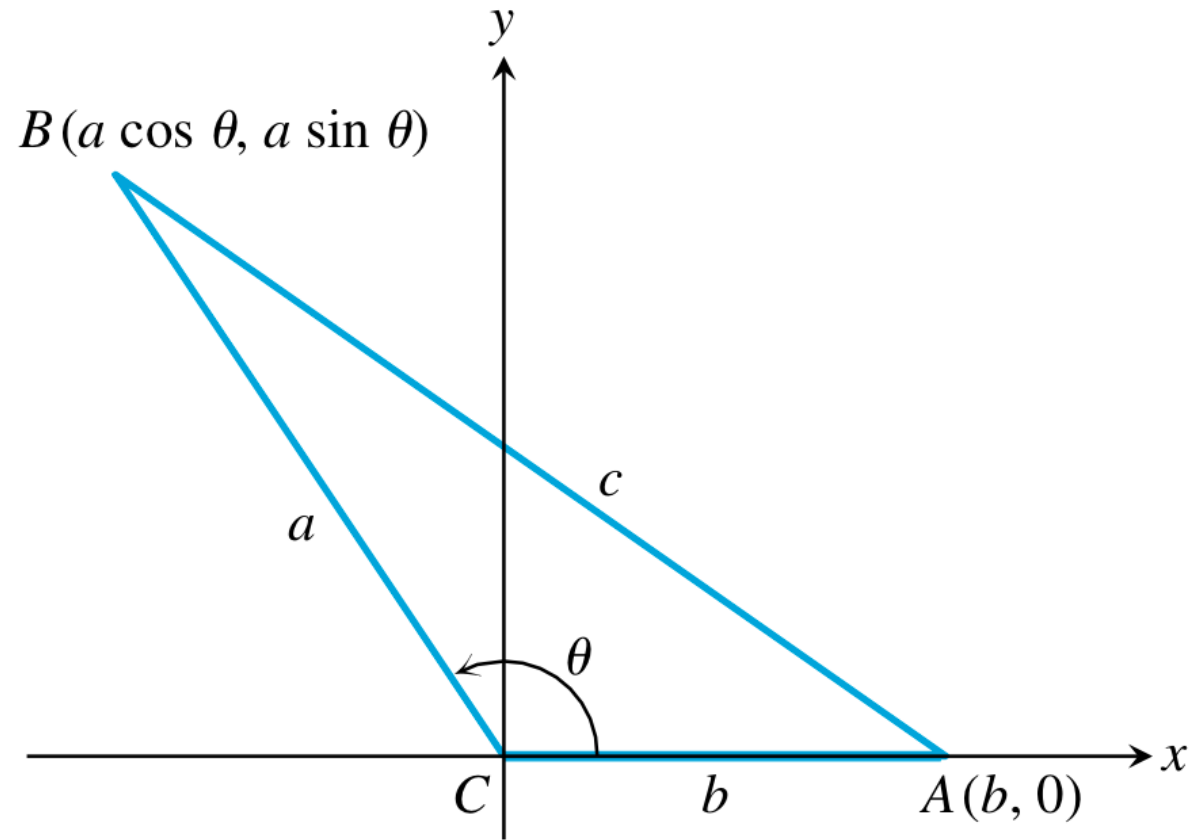
$$\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

# Νόμος των Συνημιτόνων

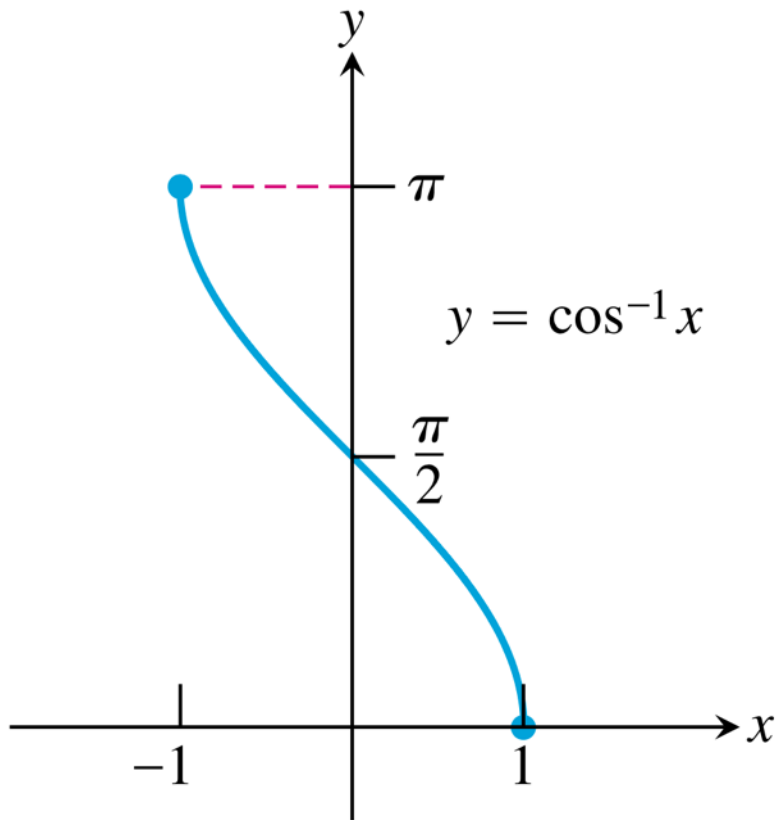


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

# Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

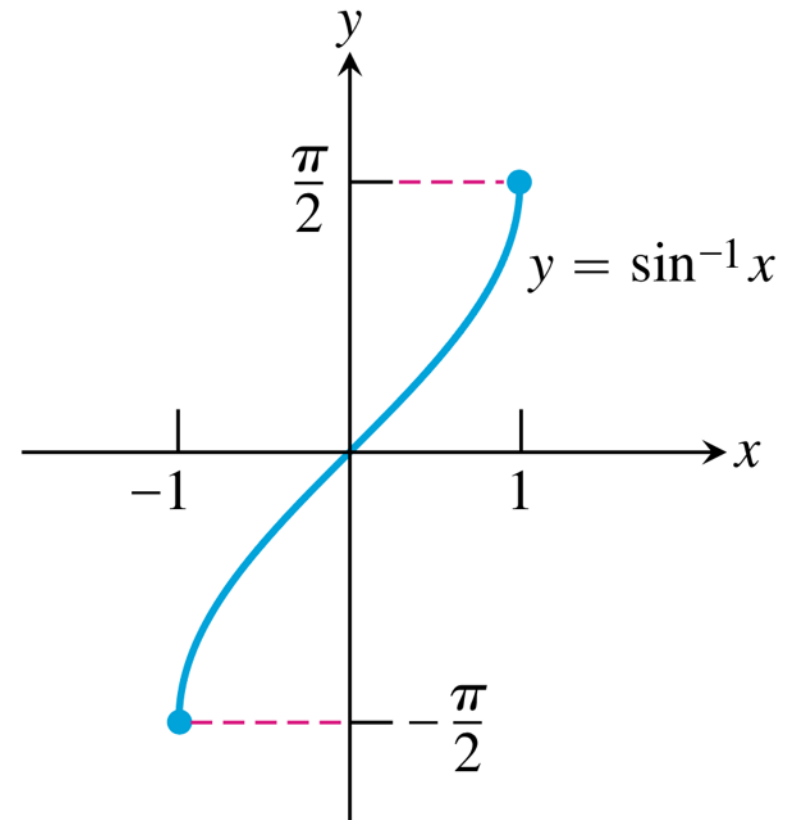
Πεδίο ορισμού:  $-1 \leq x \leq 1$

Πεδίο τιμών:  $0 \leq y \leq \pi$



Πεδίο ορισμού:  $-1 \leq x \leq 1$

Πεδίο τιμών:  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

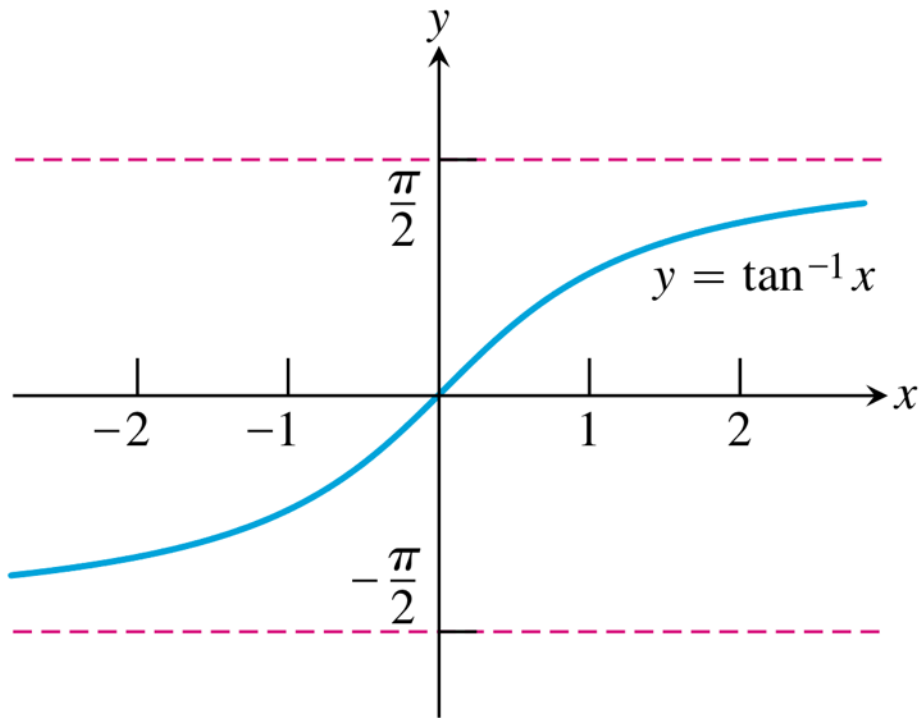




# Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

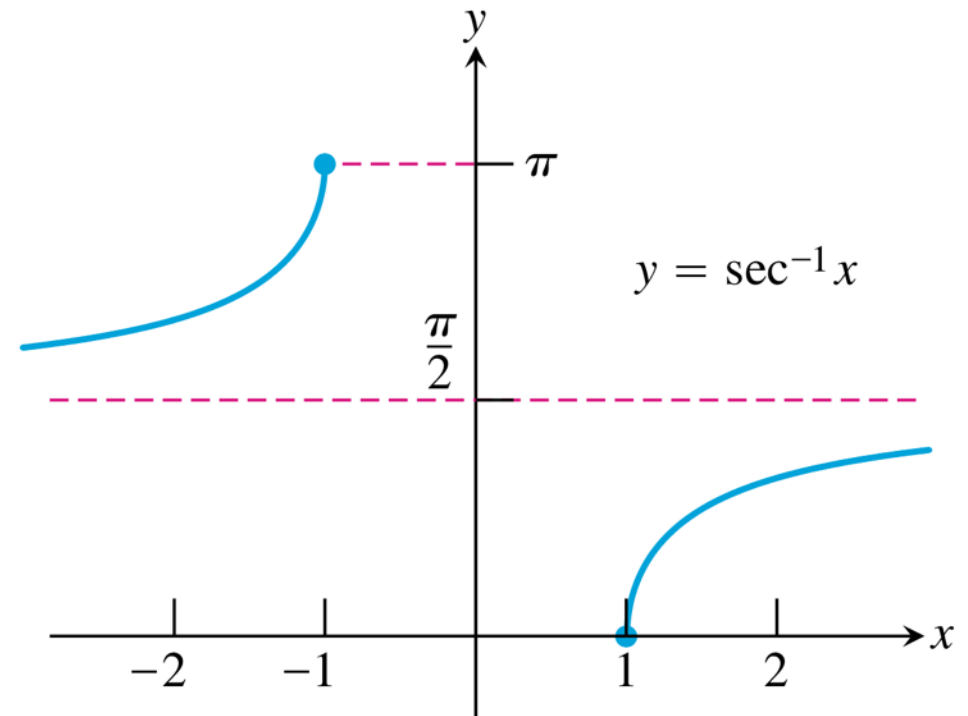
Πεδίο ορισμού:  $-\infty < x < \infty$

Πεδίο τιμών:  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



Πεδίο ορισμού:  $x \leq -1$  ή  $x \geq 1$

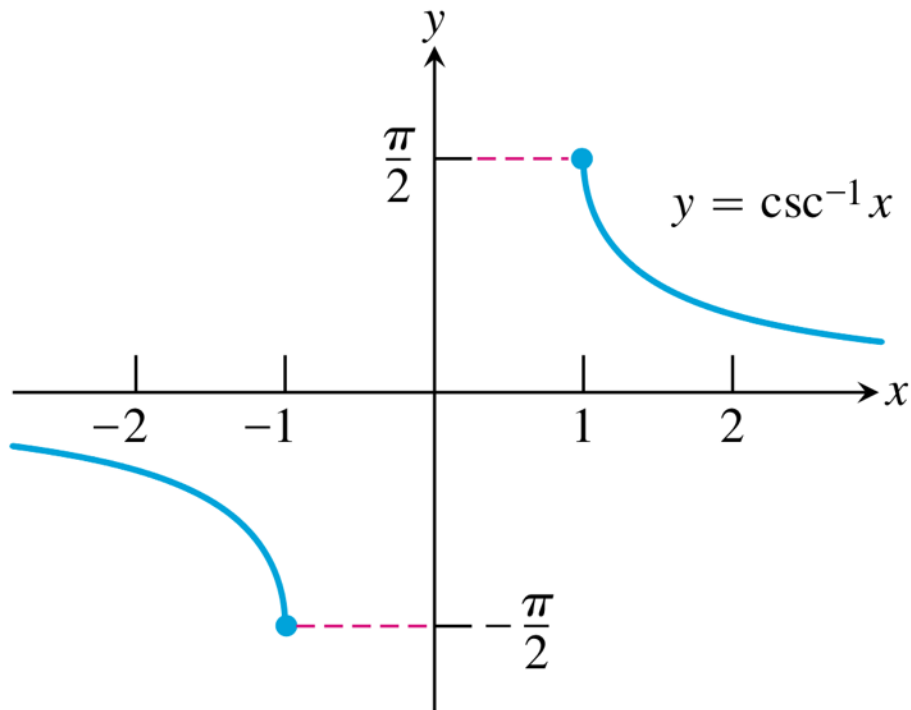
Πεδίο τιμών:  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



# Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

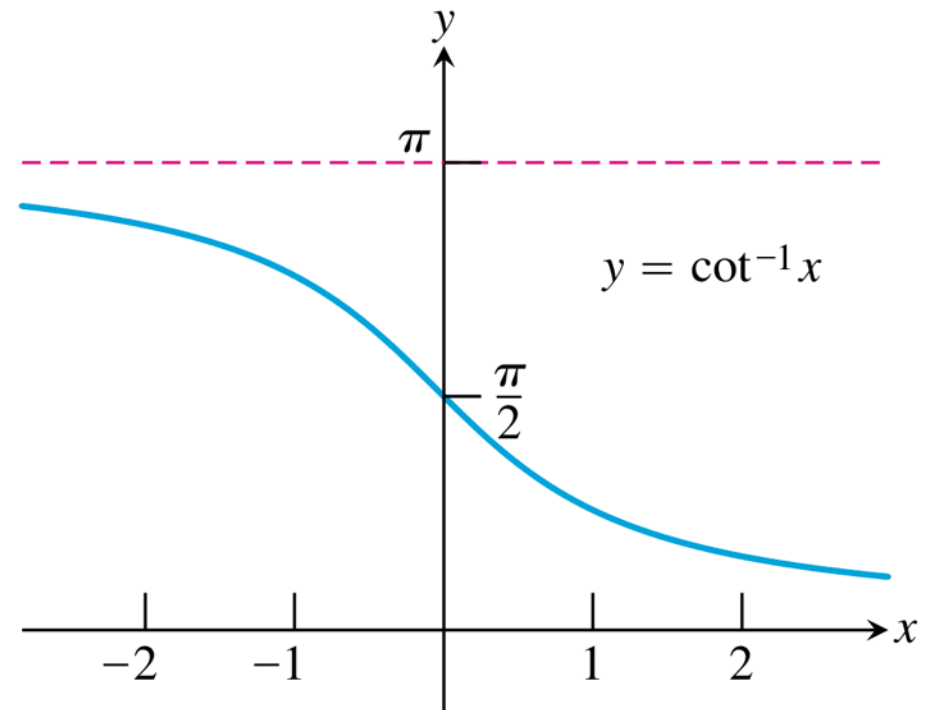
Πεδίο ορισμού:  $x \leq -1$  ή  $x \geq 1$

Πεδίο τιμών:  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, y \neq 0$



Πεδίο ορισμού:  $-\infty < x < \infty$

Πεδίο τιμών:  $0 < y < \pi$



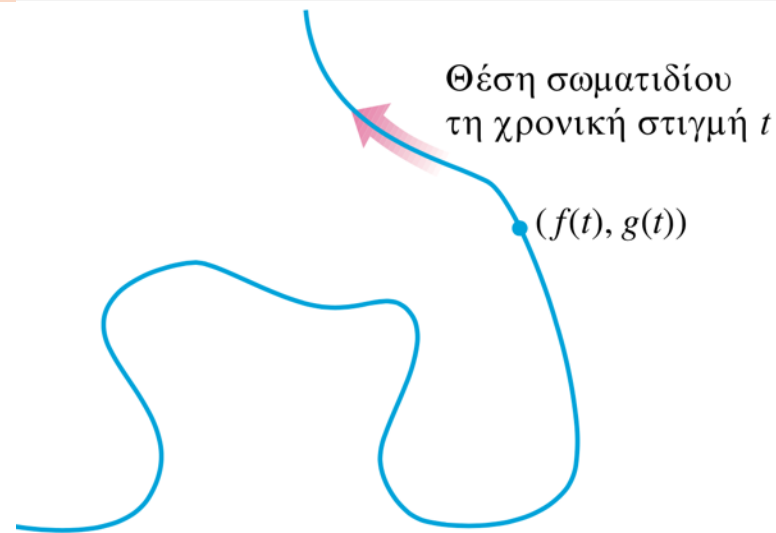
# Παραμετρικές Εξισώσεις

## Ορισμοί Παραμετρική καμπύλη, παραμετρικές εξισώσεις

Αν τα  $x$  και  $y$  δίδονται από τις συναρτήσεις

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

και το  $t$  παίρνει τιμές σε κάποιο διάστημα, τότε το σύνολο των σημείων  $(x, y) = (f(t), g(t))$  που ορίζονται από τις παραπάνω εξισώσεις αποτελεί μια **παραμετρική καμπύλη**. Οι εξισώσεις αυτές είναι οι **παραμετρικές εξισώσεις** της καμπύλης.



**ΣΧΗΜΑ 54** Η τροχιά ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο  $xy$  δεν μπορεί πάντα να θεωρηθεί ως η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης του  $x$  ή του  $y$ .

# Παραμετρικές Εξισώσεις

Περιγράψτε την κίνηση σωματιδίου του οποίου η θέση  $P(x, y)$  κατά τη χρονική στιγμή  $t$  δίδεται από τις εξισώσεις

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

