# ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

## Μέρος 10ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

# Παράδειγμα

Να βρεθεί η σειρά Taylor και τα πολυώνυμα Taylor τα οποία παράγει η $f(x) = \cos x$ στο $x = 0$.

# Παράδειγμα

Να βρεθεί η σειρά Taylor και τα πολυώνυμα Taylor τα οποία παράγει η $f(x) = \cos x$ στο $x = 0$.

Η σειρά Taylor που παράγεται από την $f$ στο 0 είναι

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

# Παράδειγμα

Να βρεθεί η σειρά Taylor και τα πολυώνυμα Taylor τα οποία παράγει η $f(x) = \cos x$ στο $x = 0$.

Η σειρά Taylor που παράγεται από την $f$ στο 0 είναι

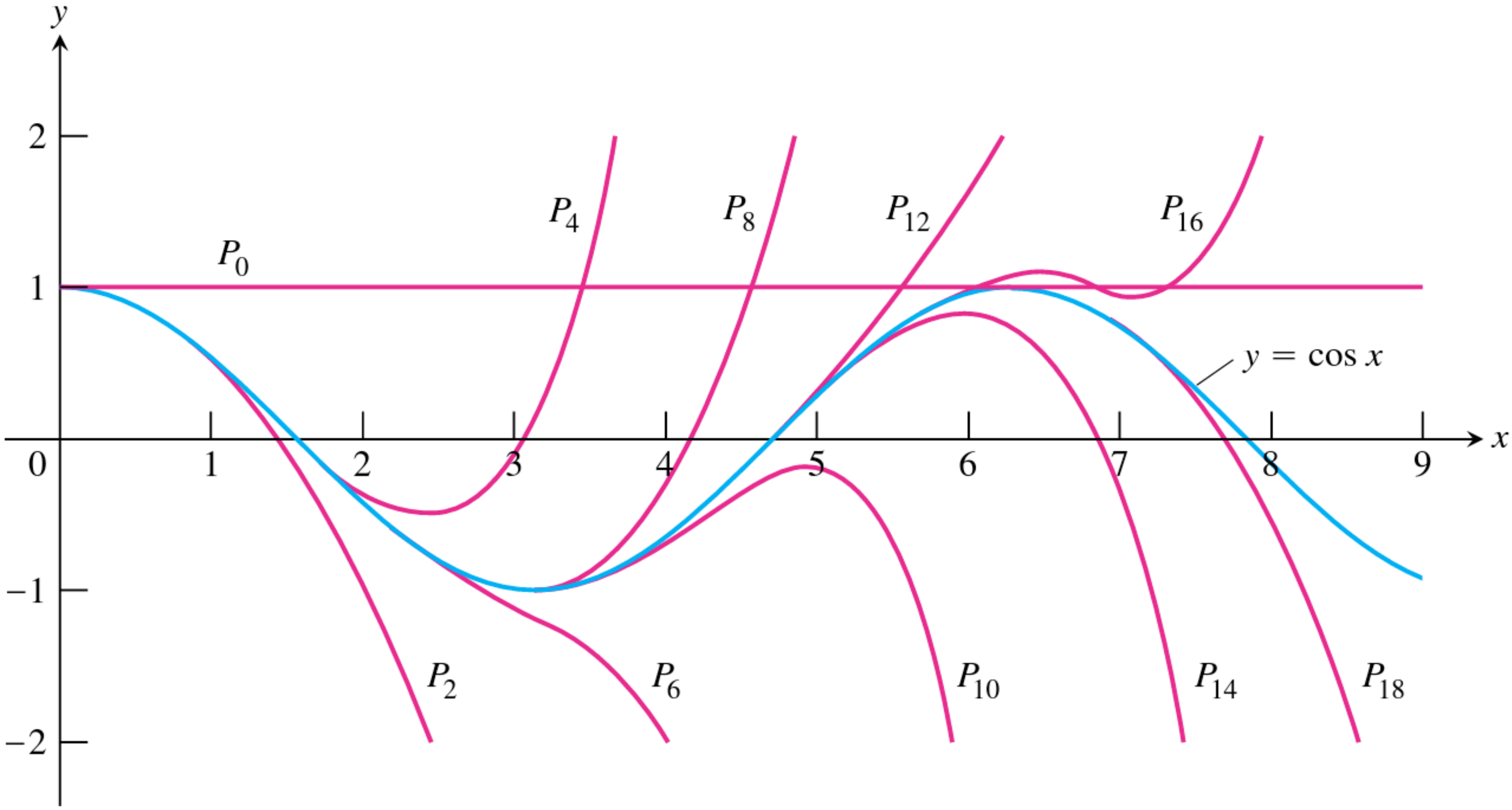
$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Εφόσον $f^{(2n+1)}(0) = 0$, τα πολυώνυμα Taylor των τάξεων $2n$ και $2n + 1$ ταυτίζονται:

$$\boxed{P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

# Ανάπτυγμα Taylor



# Υπόλοιπο και σφάλμα

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Ακριβής τιμή}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{Προσεγγιστική τιμή}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Υπόλοιπο}}.$$

Η απόλυτη τιμή $|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$ καλείται **σφάλμα** της προσέγγισης.

# Υπόλοιπο και σφάλμα

**Θεώρημα 16** **Θεώρημα Taylor**

Αν η $f$ είναι $n + 1$ φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα $I$ που περιέχει το $a$, τότε για κάθε $x$ στο $I$, θα υπάρχει αριθμός $c$ μεταξύ των $x$ και $a$ τέτοιος ώστε

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

όπου

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

# Σύγκλιση

Αν $R_n(x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε $x$ στο $I$, λέμε ότι η σειρά Taylor που παράγεται από την $f$ στο $x = a$ **συγκλίνει** στην $f$ στο $I$, και γράφουμε

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

# Χρήσιμα αναπτύγματα

**1.** $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (|x| < 1)$

**2.** $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (|x| < 1)$

**3.** $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ (για κάθε πραγματικό $x$)

**4.** $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
(για κάθε πραγματικό $x$)

**5.** $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
(για κάθε πραγματικό $x$)

**6.** $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} \; (-1 < x \leq 1)$

**7.** $\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \; (|x| \leq 1)$

# Παράδειγμα

**Παράδειγμα 10** Εύρεση σειράς Maclaurin με αντικατάσταση

Βρείτε τη σειρά Maclaurin του $\cos 2x$.

**Λύση** Στον τύπο της σειράς Maclaurin του $\cos x$, αντικαθιστούμε το $x$ με $2x$:

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots$$

Εξ. (5) με το $2x$ στη θέση του $x$

$$= 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

# Παράδειγμα

Βρείτε τη σειρά Maclaurin του $x \sin x$.

**Λύση** Πολλαπλασιάζουμε τον τύπο της σειράς Maclaurin του sin $x$ (Εξίσωση (4)), με το $x$:

$$x \sin x = x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots .$$

# Παράδειγμα

Υπολογίστε το

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}.$$

# Παράδειγμα

Υπολογίστε το

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}.$$

**Λύση** Η σειρές Maclaurin των $\sin x$ και $\tan x$, μέχρι τον όρο $x^5$, είναι

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots.$$

Έτσι,

$$\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} - \cdots = x^3\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\right)$$

και

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\right)$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

# Παράδειγμα

Να βρεθεί το

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin\ x}-\frac{1}{x}\right).$$

**Λύση**

$$\frac{1}{\sin\ x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\ \sin\ x}{x\ \sin\ x}=\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots\right)}{x\cdot\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots\right)}$$

$$=\frac{x^3\left(\dfrac{1}{3!}-\dfrac{x^2}{5!}+\cdots\right)}{x^2\left(1-\dfrac{x^2}{3!}+\cdots\right)}=x\,\frac{\dfrac{1}{3!}-\dfrac{x^2}{5!}+\cdots}{1-\dfrac{x^2}{3!}+\cdots}.$$

# Παράδειγμα

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin\ x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(x\,\frac{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots}{1-\frac{x^2}{3!}+\cdots}\right)=0.$$

Από το τελευταίο κλάσμα βλέπουμε ότι για μικρό $|x|$ θα ισχύει

$$\frac{1}{\sin\ x}-\frac{1}{x}\approx x\cdot\frac{1}{3!}=\frac{x}{6}\qquad \text{δηλ.}\qquad \csc x\approx\frac{1}{x}+\frac{x}{6}.$$