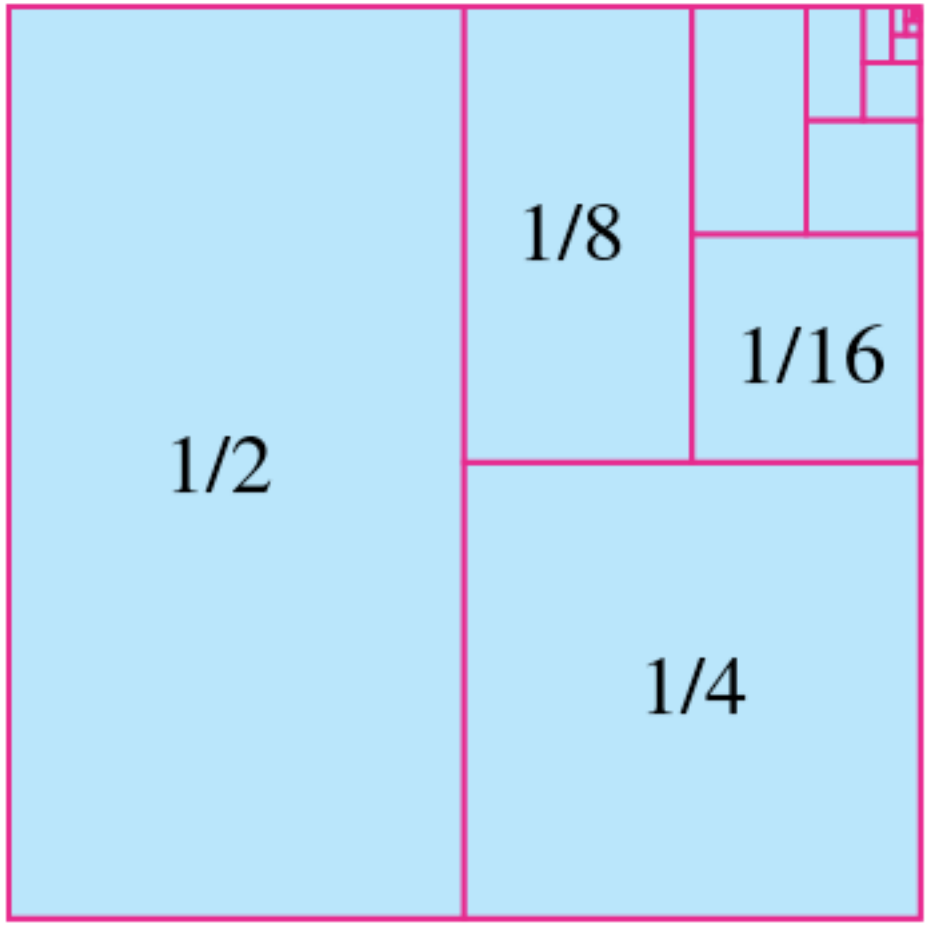
ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 11ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σειρές



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

Σειρές

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\infty$$

Ακολουθίες αριθμών

Μπορούμε να διατάξουμε τα ακέραια πολλαπλάσια του 3 ως εξής:

$$
\begin{array}{lccccc}
\text{Πεδίο ορισμού:} & 1 & 2 & 3 \ldots & n & \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\text{Πεδίο τιμών:} & 3 & 6 & 9 & 3n &
\end{array}
$$

Ακολουθίες αριθμών

Μπορούμε να διατάξουμε τα ακέραια πολλαπλάσια του 3 ως εξής:

$$\begin{array}{lccccc} \text{Πεδίο ορισμού:} & 1 & 2 & 3 \ldots & n & \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \text{Πεδίο τιμών:} & 3 & 6 & 9 & 3n & \end{array}$$

Ορισμός **Ακολουθία**

Άπειρη **ακολουθία** αριθμών είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των ακεραίων που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι ενός ακεραίου n_0.

$$a(n) = \sqrt{n}$$

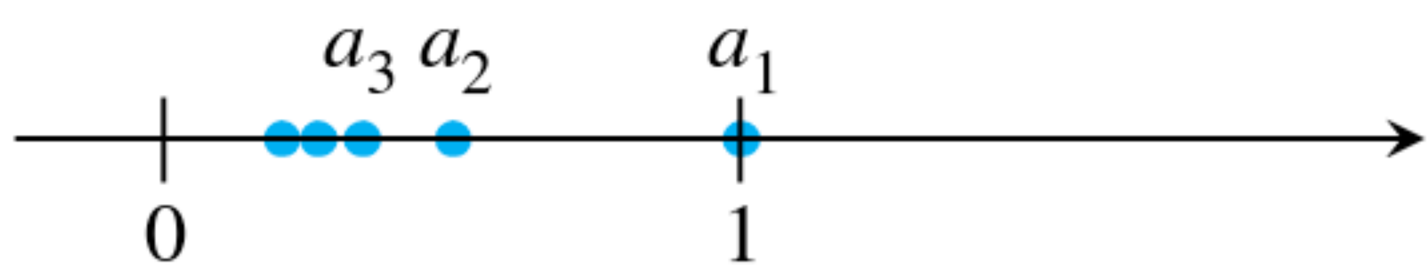
$$a(n) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

$$a(n) = \frac{n-1}{n}$$

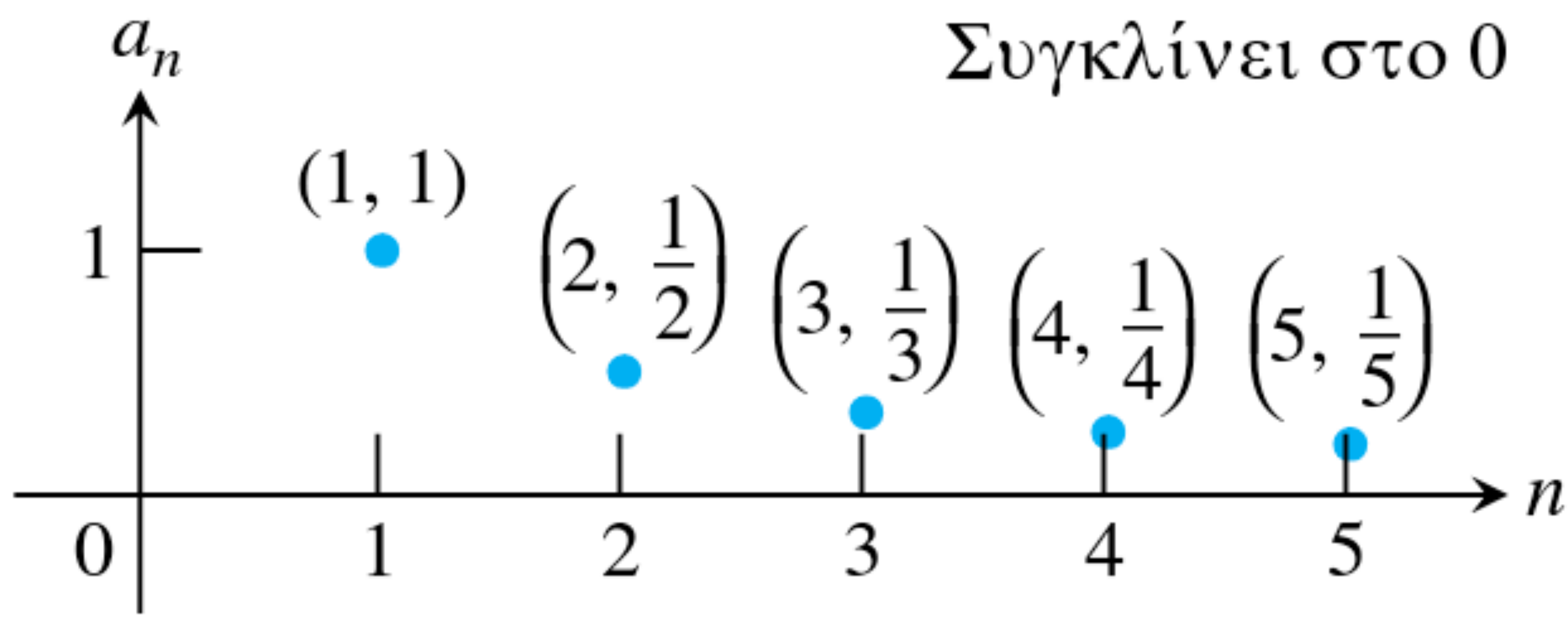
Παραδείγματα

Όροι ακολουθίας	Τύπος ακολουθίας	
(α) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots$	$a_n = \sqrt{n}$	
(β) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$	$a_n = \frac{1}{n}$	$\{1/n\}$
(γ) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots$	$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$	
(δ) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$	$a_n = \frac{n-1}{n}$	$\{(n-1)/n\}$
(ε) $0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right), \ldots$	$a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)$	
(στ) $3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots$	$a_n = 3$	$\{3\}$

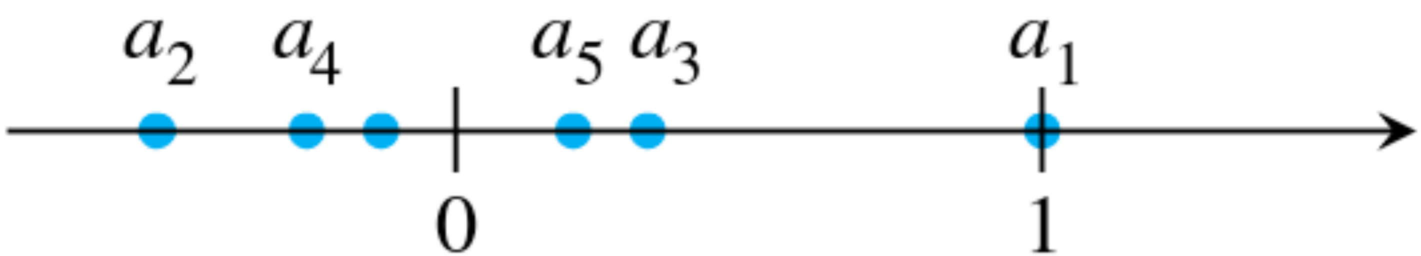
Σύγκλιση



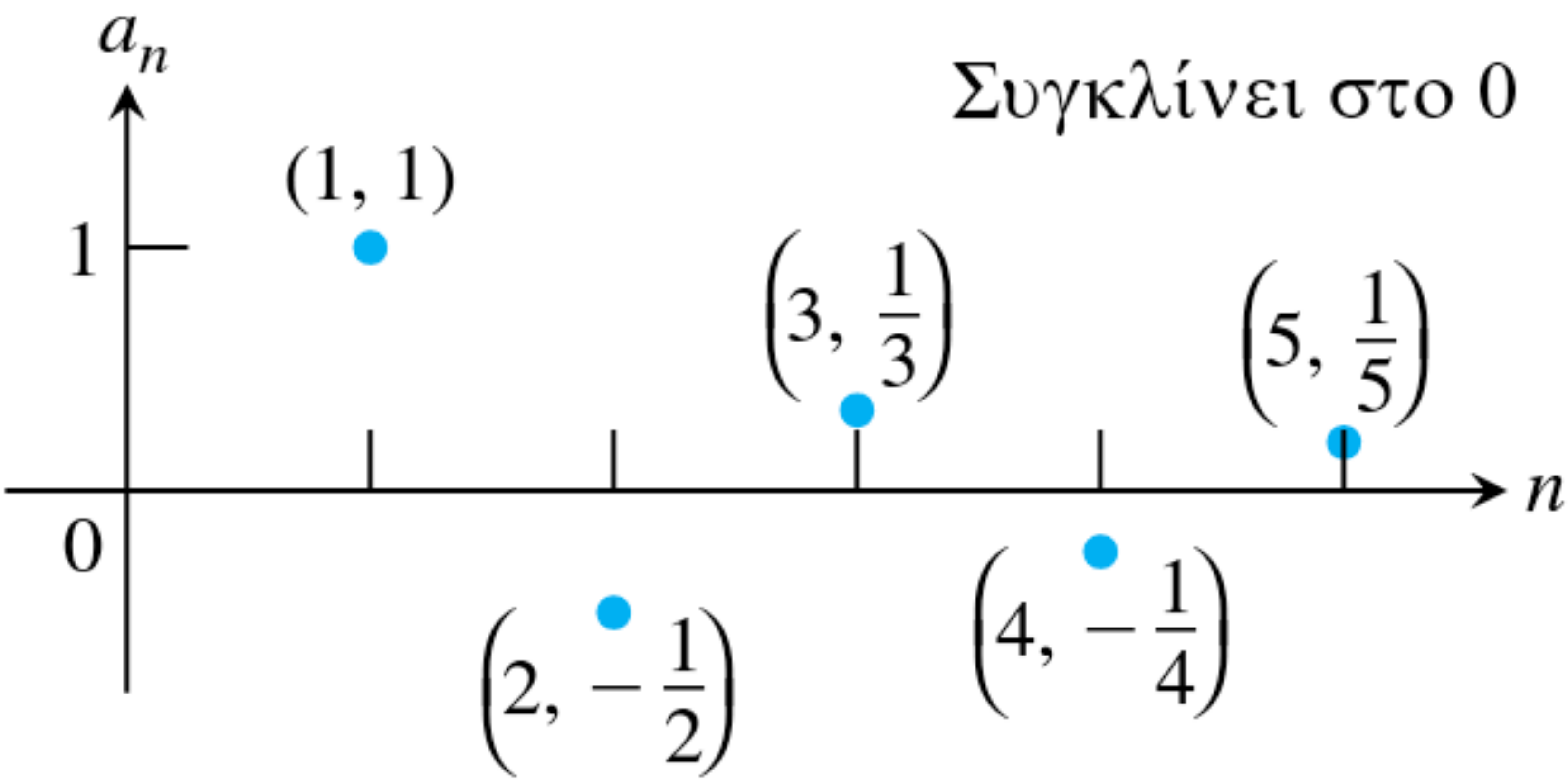
$$a_n = \frac{1}{n}$$



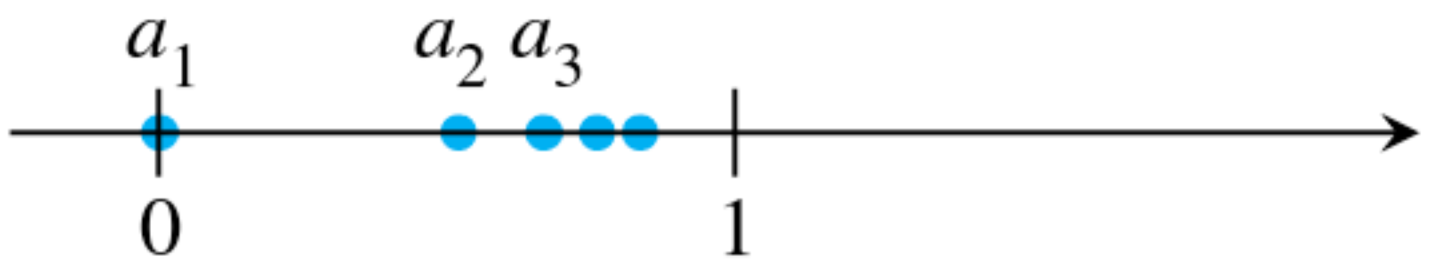
Σύγκλιση



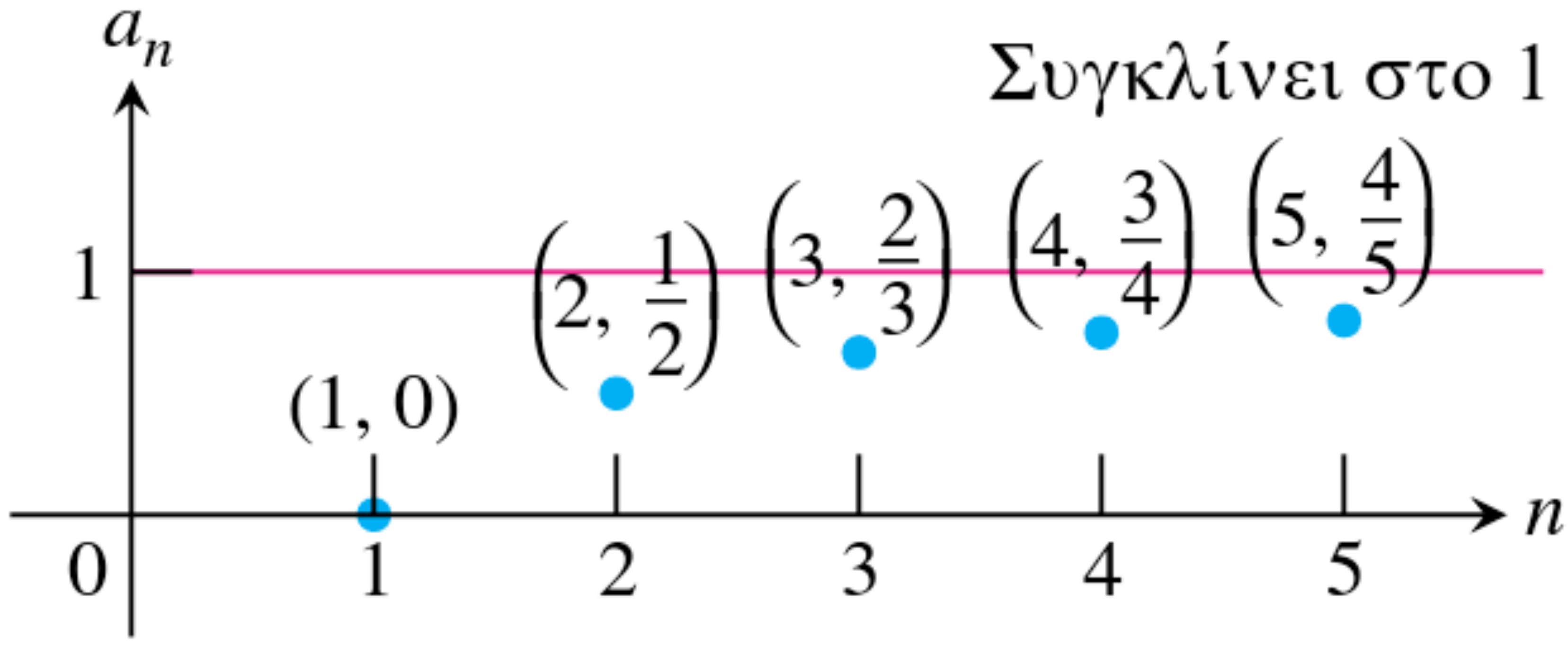
$$a_n = (-1)^{n+1}\,\frac{1}{n}$$



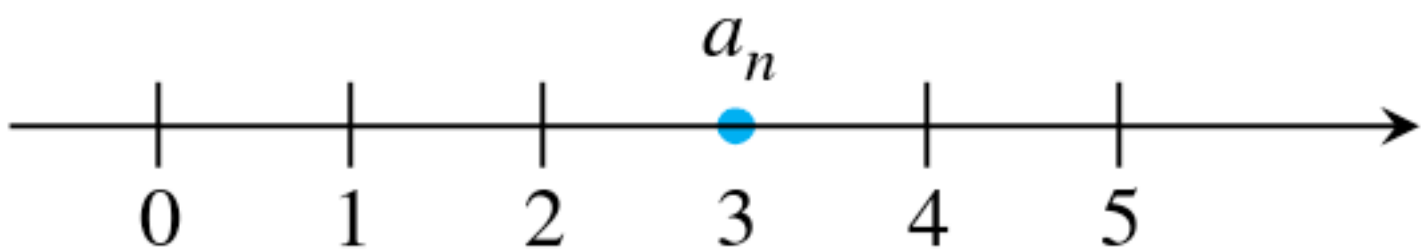
Σύγκλιση



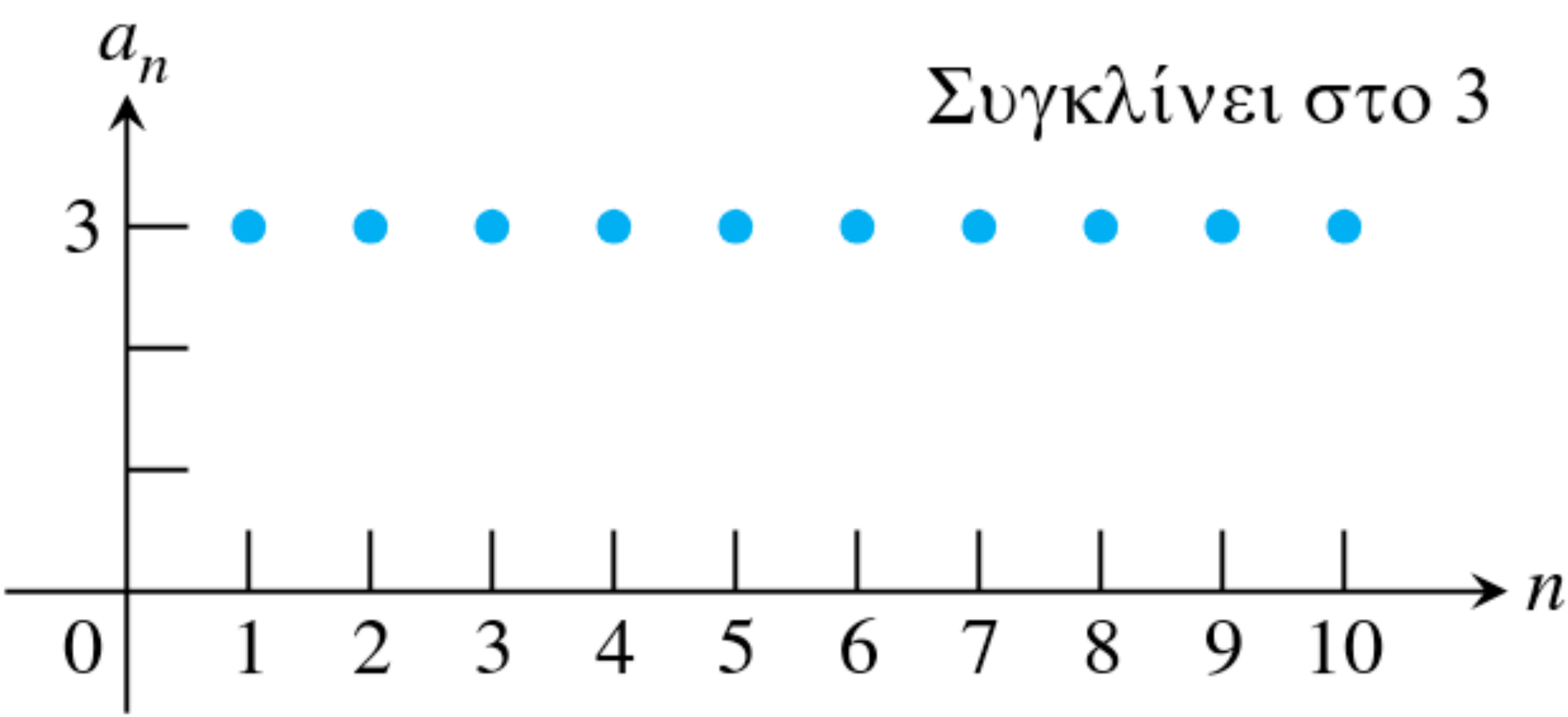
$$a_n = \frac{n-1}{n}$$



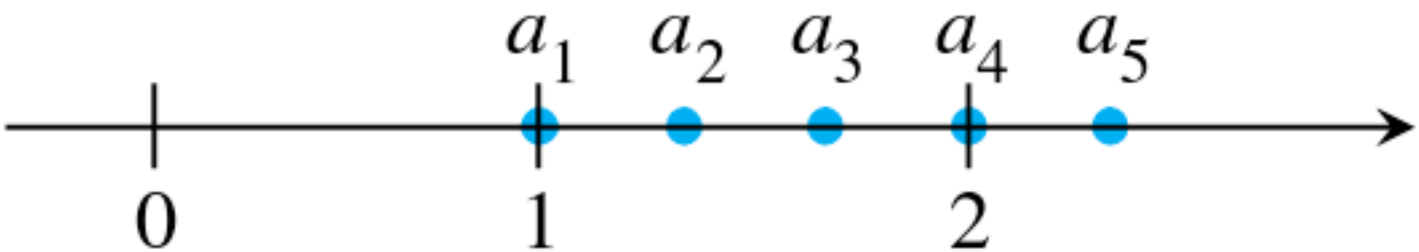
Σύγκλιση



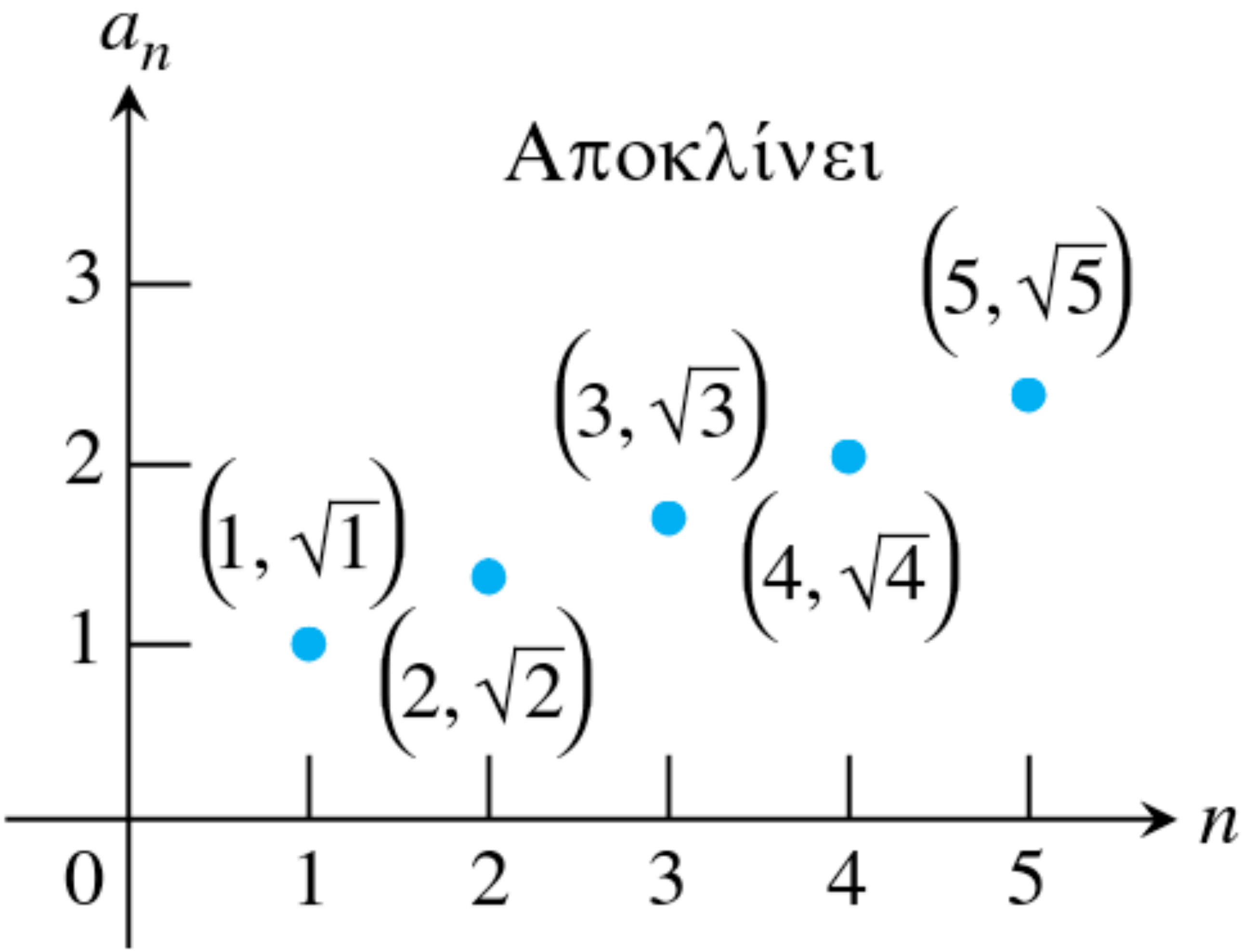
$a_n = 3$



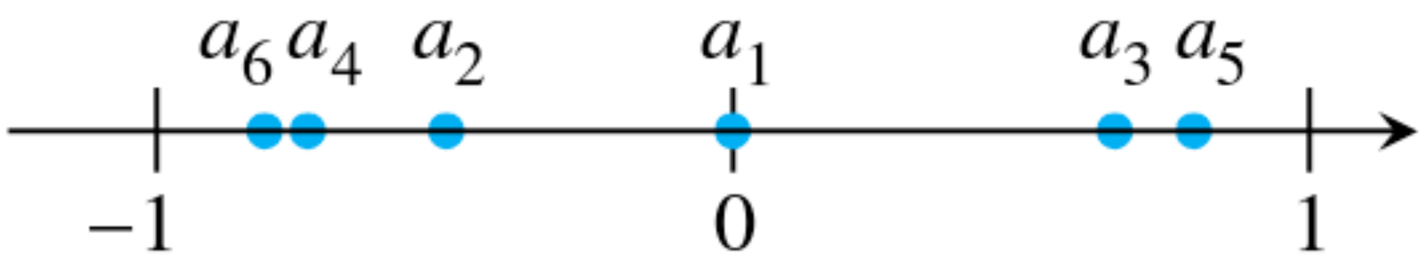
Απόκλιση



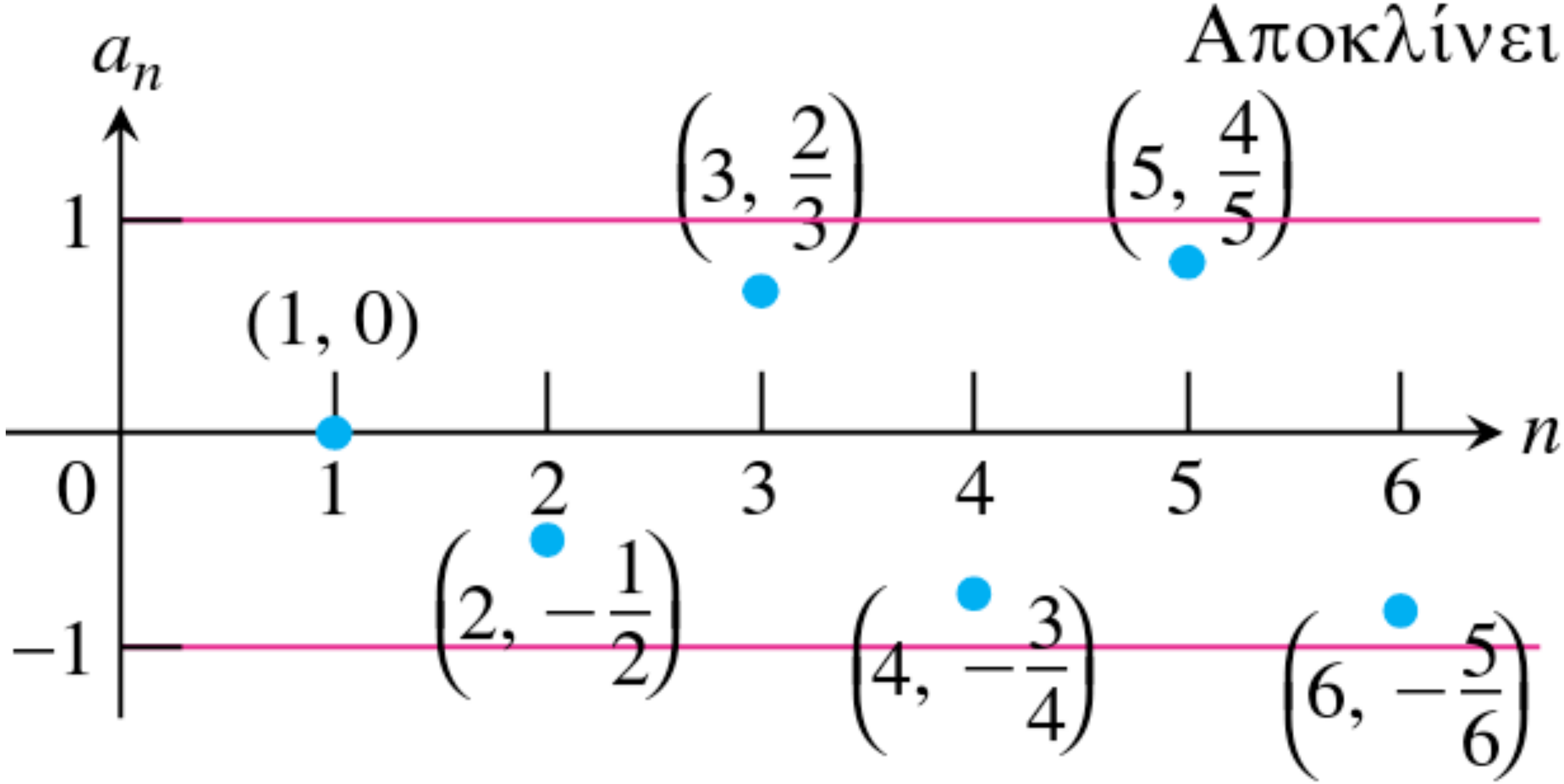
$a_n = \sqrt{n}$



Απόκλιση



$$a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$



Σύγκλιση - Απόκλιση - Όριο

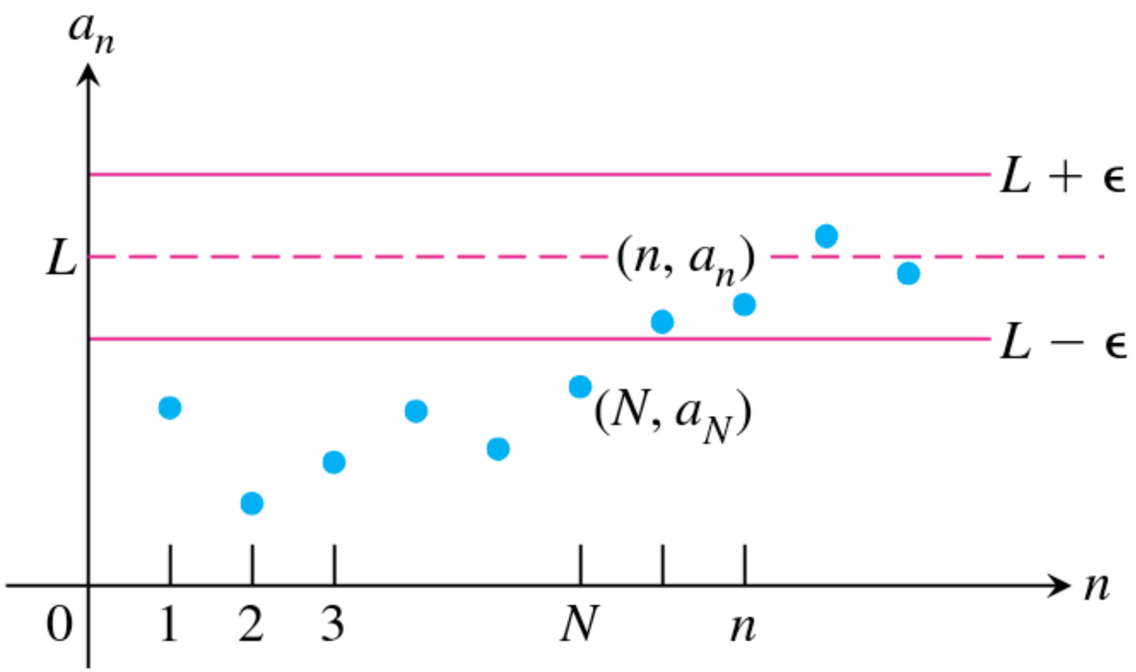
Ορισμοί **Σύγκλιση, απόκλιση, όριο**

Η ακολουθία $\{a_n\}$ **συγκλίνει** στον αριθμό L αν σε κάθε θετικό αριθμό ϵ αντιστοιχεί ακέραιος N τέτοιος ώστε για κάθε n,

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

Αν δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός L, λέμε ότι η $\{a_n\}$ **αποκλίνει.**

Αν η $\{a_n\}$ συγκλίνει στο L, γράφουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, ή απλούστερα $a_n \to L$, και καλούμε το L **όριο** της ακολουθίας (Σχήμα 8.2).



Οδιότητες ορίων ακολουθιών

Θεώρημα 1 **Ιδιότητες ορίων ακολουθιών**

Έστω $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών και A και B πραγματικοί αριθμοί. Έστω $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ και $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Ισχύουν τότε οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. *Όριο αθροίσματος:* $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$
2. *Όριο διαφοράς:* $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$
3. *Όριο γινομένου:* $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
4. *Όριο σταθερού πολλαπλασίου:* $\lim_{n\to\infty} (k \cdot b_n) = k \cdot B$ (τυχών αριθμός k)
5. *Όριο πηλίκου:* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$ εφόσον $B \neq 0$

Θεώρημα «σάντουιτς» για ακολουθίες

Θεώρημα 2 **Θεώρημα «σάντουιτς» για ακολουθίες**

Έστω $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, και $\{c_n\}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αν $a_n \leq b_n \leq c_n$ για κάθε n πέραν κάποιου N και αν $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, τότε θα ισχύει επίσης $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Εφόσον $1/n \to 0$, γνωρίζουμε ότι

(α) $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$ διότι $\left|\dfrac{\cos n}{n}\right| = \dfrac{|\cos n|}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

(β) $\dfrac{1}{2^n} \to 0$ διότι $\dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$

(γ) $(-1)^n \dfrac{1}{n} \to 0$ διότι $\left|(-1)^n \dfrac{1}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n}$.

Θεώρημα

Θεώρημα 3

Έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν $a_n \to L$ και η f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο L και ορισμένη για κάθε a_n, τότε $f(a_n) \to f(L)$.

Δείξτε ότι $\sqrt{(n+1)/n} \to 1$.

Λύση Γνωρίζουμε ότι $(n+1)/n \to 1$. Θέτοντας $f(x) = \sqrt{x}$ και $L = 1$ στο Θεώρημα 3 έχουμε $\sqrt{(n+1)/n} \to \sqrt{1} = 1$.

l' Hopital

Θεώρημα 4

Έστω $f(x)$ συνάρτηση ορισμένη για κάθε $x \geq n_0$ και $\{a_n\}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n = f(n)$ για $n \geq n_0$. Στην περίπτωση αυτή

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Παράδειγμα 9 Εφαρμογή του κανόνα του l'Hôpital

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

l' Hopital

Θεώρημα 4

Έστω $f(x)$ συνάρτηση ορισμένη για κάθε $x \geq n_0$ και $\{a_n\}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n = f(n)$ για $n \geq n_0$. Στην περίπτωση αυτή

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

Παράδειγμα 9 Εφαρμογή του κανόνα του l'Hôpital

Δείξτε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Παράδειγμα

Συγκλίνει η ακολουθία με n-οστό όρο

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n;$$

Αν ναι, να βρεθεί το $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Το όριο καταλήγει στην απροσδιόριστη μορφή 1^∞.

$$\begin{aligned}\ln a_n &= \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \\ &= n \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right)\end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \qquad \infty \cdot 0$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2/(n^2-1)}{-1/n^2} \qquad \text{Κανόνας του l'Hôpital}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2.$$

$$\boxed{a_n = e^{\ln a_n} \to e^2}$$

Παράδειγμα

1. $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

2. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3. $\lim_{n \to \infty} x^{1/n} = 1 \qquad (x > 0)$

4. $\lim_{n \to \infty} x^n = 0 \qquad (|x| < 1)$

5. $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (\text{τυχόν } x)$

6. $\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad (\text{τυχόν } x)$

Μέθοδος Picard

Το πρόβλημα επίλυσης της εξίσωσης

$$f(x) = 0$$

είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα εύρεσης λύσης της

$$g(x) = f(x) + x = x,$$

$$f(x) = g(x) - x = x - x = 0.$$

Το σημείο x για το οποίο ισχύει $g(x) = x$ καλείται **σταθερό σημείο** της g. Από την τελευταία εξίσωση είναι φανερό ότι τα σταθερά σημεία της g δεν είναι παρά οι ρίζες της f.

Η μέθοδος συγκλίνει μόνο αν |*dg/dx*|<1 στην περιοχή της ρίζας!

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 3 - x = 0 \Rightarrow \quad \frac{1}{4}x + 3 = x$$

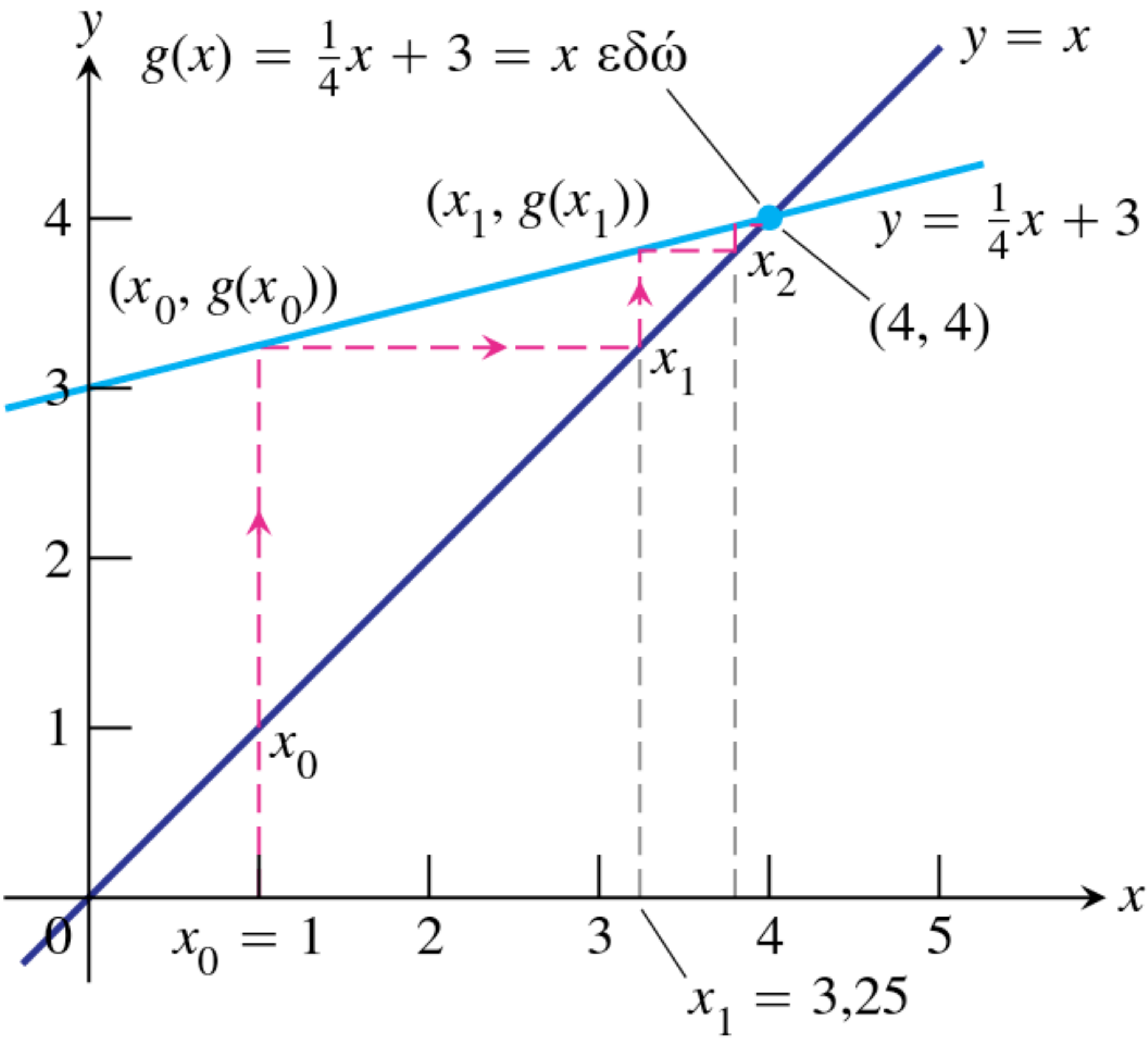
$$g(x) = \frac{1}{4}x + 3$$

Παράδειγμα

Πίνακας 8.2 Διαδοχικές τιμές της $g(x) = (1/4)x + 3$, με τιμή εκκινήσεως τη $x_0 = 1$

x_n	$x_{n+1} = g(x_n) = (1/4)\,x_n + 3$
$x_0 = 1$	$x_1 = g(x_0) = (1/4)(1) + 3 = 3{,}25$
$x_1 = 3{,}25$	$x_2 = g(x_1) = (1/4)(3{,}25) + 3 = 3{,}8125$
$x_2 = 3{,}8125$	$x_3 = g(x_2) = 3{,}9531\ 25$
$x_3 = 3{,}9531\ 25$	$x_4 = 3{,}9882\ 8125$
.	$x_5 = 3{,}9970\ 70313$
.	$x_6 = 3{,}9992\ 67578$
.	$x_7 = 3{,}9998\ 16895$
	$x_8 = 3{,}9999\ 54224$
	$x_9 = 3{,}9999\ 88556$
	$x_{10} = 3{,}9999\ 97139$
	$\vdots$

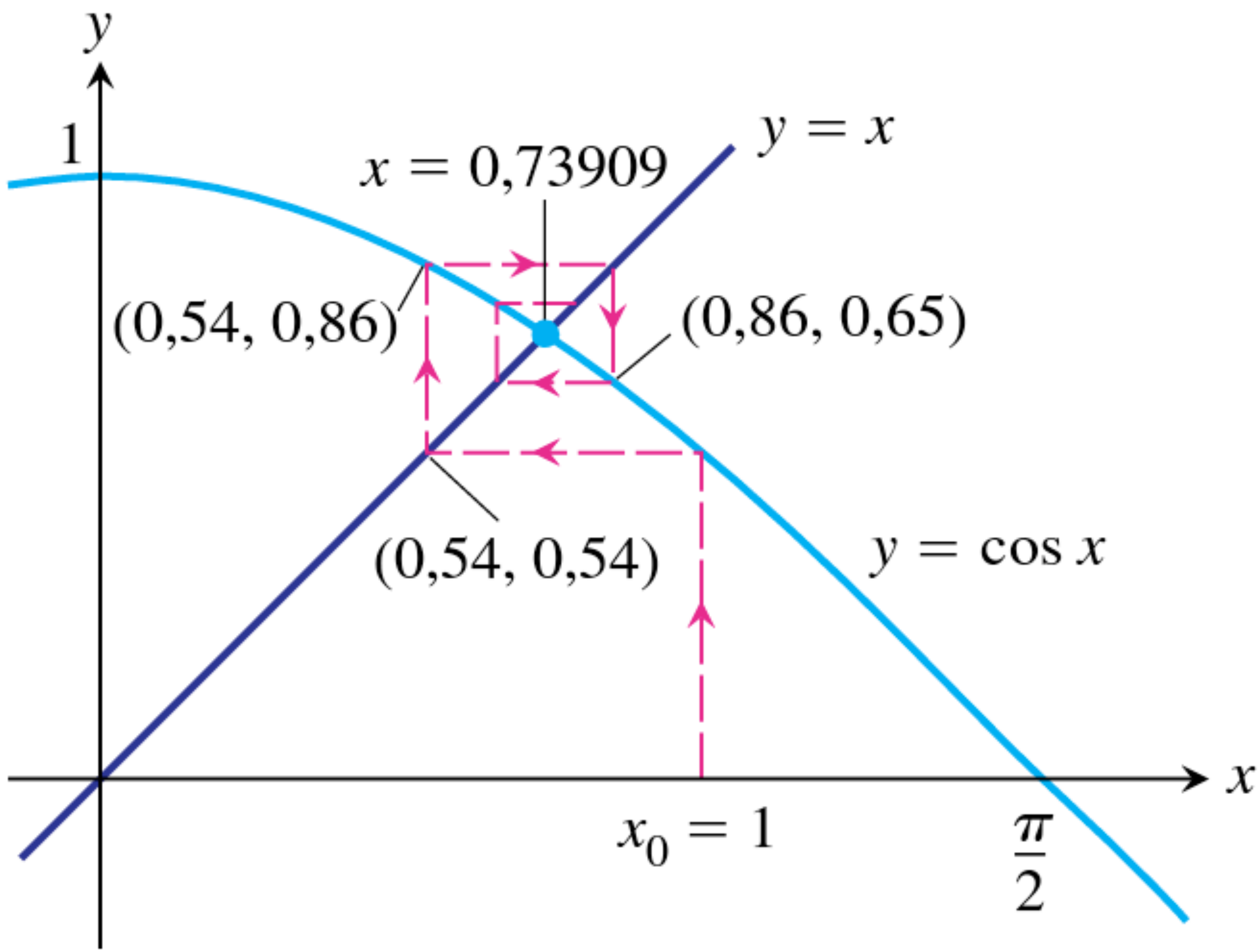
Παράδειγμα



$g(x) = \frac{1}{4}x + 3 = x$ εδώ
$y = x$
$y = \frac{1}{4}x + 3$
$(x_1, g(x_1))$
$(x_0, g(x_0))$
$(4, 4)$
x_0
x_1
x_2
$x_0 = 1$
$x_1 = 3{,}25$
x
y
0
1
2
3
4
5

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση $\cos x = x$.



Παράδειγμα

Η μέθοδος του Picard δεν θα μας δώσει τη λύση της εξίσωσης

$$g(x) = 4x - 12 = x.$$