ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 12ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Υποακολουθίες

(α) Η υποακολουθία των άρτιων ακεραίων: $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$

(β) Η υποακολουθία των περιττών ακεραίων: $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$

(γ) Η υποακολουθία των πρώτων αριθμών: $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

Υποακολουθίες

1. Αν μια ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο L, τότε όλες οι υποακολουθίες της συγκλίνουν στο L. Αν γνωρίζουμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει, τότε διευκολυνόμαστε στην εύρεση ή στην εκτίμηση του ορίου μιας υποακολουθίας της που μας ενδιαφέρει.

2. Αν κάποια υποακολουθία μιας ακολουθίας $\{a_n\}$ αποκλίνει ή αν δύο υποακολουθίες της έχουν διαφορετικά όρια, τότε η $\{a_n\}$ αποκλίνει. Για παράδειγμα, η ακολουθία $\{(-1)^n\}$ αποκλίνει διότι η υποακολουθία $-1, -1, -1, \ldots$ των όρων περιττού δείκτη (δηλ. του 1ου, 3ου, 5ου, . . . όρου) συγκλίνει στο -1, ενώ η υποακολουθία $1, 1, 1, \ldots$ των άρτιου δείκτη όρων της συγκλίνει στο 1, σε διαφορετικό δηλαδή όριο.

Μονοτονία ακολουθιών

Ορισμός **Μη φθίνουσα, μη αύξουσα, μονότονη ακολουθία**

Μια ακολουθία $\{a_n\}$ με την ιδιότητα $a_n \leq a_{n+1}$ για κάθε n καλείται **μη φθίνουσα ακολουθία**· δηλαδή, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$.

Μια ακολουθία καλείται **μη αύξουσα** αν $a_n \geq a_{n+1}$ για κάθε n. Μια ακολουθία που είναι είτε μη φθίνουσα είτε μη αύξουσα, καλείται **μονότονη.**

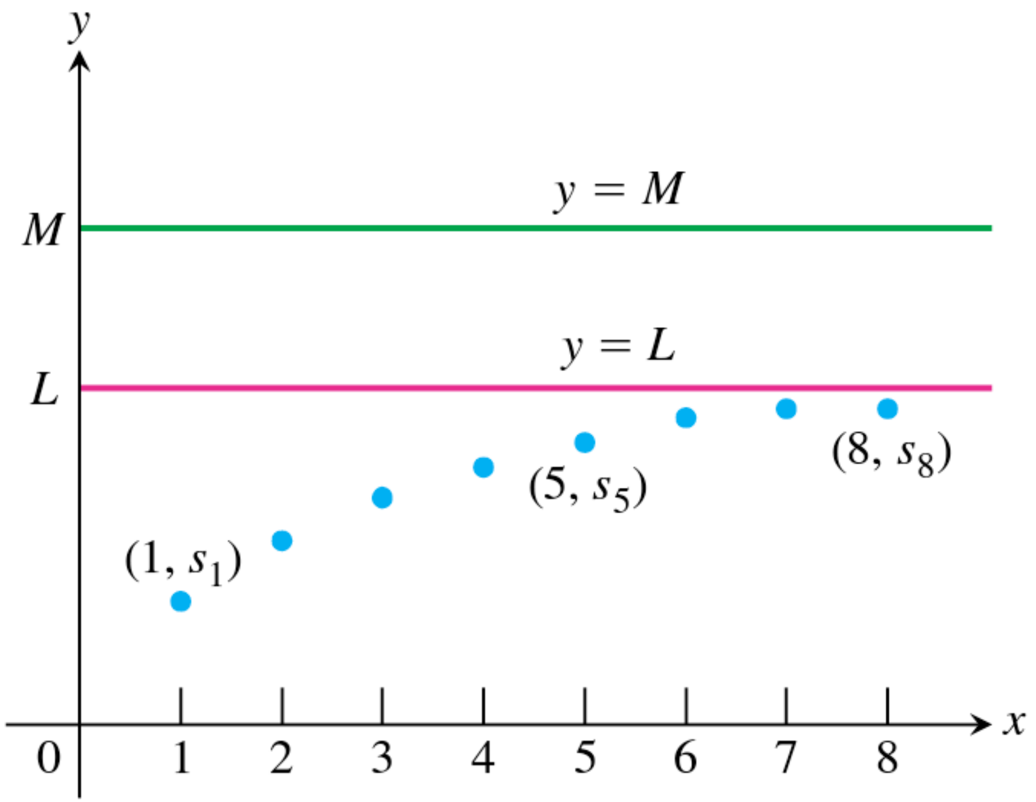
Φραγμένες ακολουθίες

Ορισμός **Άνω φραγμένη, άνω φράγμα, κάτω φραγμένη, κάτω φράγμα, φραγμένη ακολουθία**

Μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι **άνω φραγμένη** αν υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε $a_n \le M$ για κάθε n. Ο αριθμός M είναι τότε ένα **άνω φράγμα** της $\{a_n\}$. Η ακολουθία είναι **κάτω φραγμένη** αν υπάρχει αριθμός m τέτοιος ώστε $m \le a_n$ για κάθε n. Ο αριθμός m είναι τότε ένα **κάτω φράγμα** της $\{a_n\}$. Αν η $\{a_n\}$ είναι άνω και κάτω φραγμένη, καλείται **φραγμένη ακολουθία.**

Θεώρημα

Θεώρημα 5 **Θεώρημα μονότονων ακολουθιών**
Κάθε φραγμένη μονότονη ακολουθία συγκλίνει.



ΣΧΗΜΑ 8.5 Αν οι όροι μιας μη φθίνουσας ακολουθίας έχουν άνω φράγμα M, θα συγκλίνουν σε κάποιο όριο $L \leq M$.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 4 Εφαρμογή του ορισμού φραγμένης ακολουθίας

(α) Η ακολουθία $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ δεν έχει άνω φράγμα, αλλά είναι κάτω φραγμένη από το $m = 1$.

(β) Η ακολουθία $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ είναι άνω φραγμένη από το $M = 1$ και κάτω φραγμένη από το $m = \frac{1}{2}$.

(γ) Η ακολουθία $-1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n n, \ldots$ δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη.

Παράδειγμα

(α) Η μη φθίνουσα ακολουθία $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ συγκλίνει διότι είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό $M = 1$. Μάλιστα, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(1/n)}\\ &= \frac{1}{1+0}\\ &= 1,\end{aligned}$$

οπότε η ακολουθία συγκλίνει στο όριο $L = 1$.

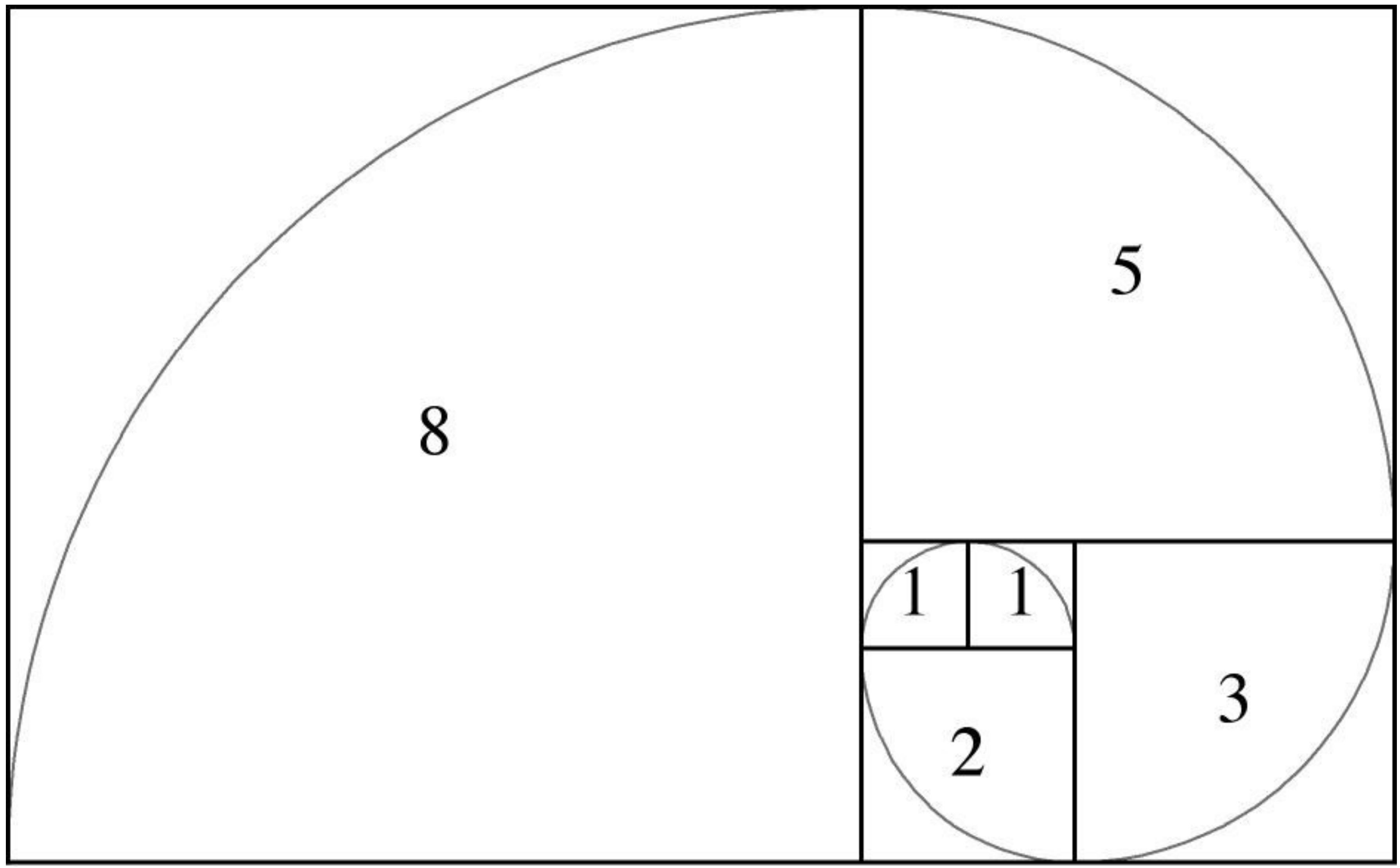
Παράδειγμα

(α) Οι προτάσεις $a_1 = 1$ και $a_n = a_{n-1} + 1$ ορίζουν την ακολουθία 1, 2, 3, . . . , n,. . . των θετικών ακεραίων. Για $a_1 = 1$, έχουμε $a_2 = a_1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 1 = 3$, κ.ο.κ.

(β) Οι προτάσεις $a_1 = 1$ και $a_n = n \cdot a_{n-1}$ ορίζουν την ακολουθία 1, 2, 6, 24, . . . , $n!$, . . . των παραγοντικών. Για $a_1 = 1$, έχουμε $a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$, $a_3 = 3 \cdot a_2 = 6$, $a_4 = 4 \cdot a_3 = 24$, κ.ο.κ.

(γ) Οι προτάσεις $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, και $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ ορίζουν την ακολουθία 1, 1, 2, 3, 5, . . . των **αριθμών Fibonacci.** Για $a_1 = 1$ και $a_2 = 1$, έχουμε $a_3 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = 2 + 1 = 3$, $a_5 = 3 + 2 = 5$, κ.ο.κ.

Παράδειγμα



Σειρές

Ορισμός Άπειρη σειρά

Δοθείσας μιας ακολουθίας αριθμών $\{a_n\}$, κάθε έκφραση της μορφής

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

είναι μια **άπειρη σειρά.** Ο αριθμός a_n είναι ο ***n*-οστός όρος** της σειράς.

Παράδειγμα

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

Μερικό άθροισμα		**Τιμή**
Πρώτο:	$s_1 = 1$	$2 - 1$
Δεύτερο:	$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$
Τρίτο:	$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$2 - \frac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-οστό	$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$	$2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Παράδειγμα

Πράγματι, υπάρχει μια τέτοια χαρακτηριστική συμπεριφορά. Τα μερικά αθροίσματα σχηματίζουν μια ακολουθία με n-οστό όρο

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Η ακολουθία συγκλίνει στο 2

Το άθροισμα της άπειρης σειράς $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$ είναι 2.

Μερικά αθροίσματα

Τα **μερικά αθροίσματα** της σειράς σχηματίζουν μια ακολουθία πραγματικών αριθμών

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\;\vdots \\
&\;\cdot \\
s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\;\vdots \\
&\;\cdot
\end{aligned}
$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Παράδειγμα

Συγκλίνει η σειρά

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots;$$

Λύση Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων, γραμμένη σε δεκαδική μορφή, είναι

$$0{,}3,\ 0{,}33,\ 0{,}333,\ 0{,}3333,\ \ldots$$

Η ακολουθία αυτή έχει όριο $0{,}\overline{3}$, το οποίο όπως αντιλαμβάνεστε ισούται με το κλάσμα $1/3$. Η σειρά συγκλίνει λοιπόν στο όριο $1/3$.

Γεωμετρικές σειρές

Γεωμετρική σειρά είναι μια σειρά της μορφής

$$\boxed{a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}}$$

όπου a και r είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και $a \neq 0$. Ο **λόγος** r μπορεί να είναι θετικός, π.χ.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots,$$

ή αρνητικός, όπως εδώ

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots.$$

Γεωμετρικές σειρές

Αν $|r| \neq 1$, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σύγκλιση ή την απόκλιση της σειράς ως ακολούθως, ξεκινώντας με το n-οστό μερικό άθροισμα:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Πολλαπλασιάζουμε το s_n με το r.

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

Αφαιρούμε το rs_n από το s_n. Οι περισσότεροι όροι στο δεξιό μέλος διαγράφονται.

$$s_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

Κοινός παράγοντας.

$$\boxed{s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}}, \qquad (r \neq 1).$$

Λύνουμε ως προς s_n εφόσον $r \neq 1$.

Γεωμετρικές σειρές

Αν $|r| < 1$, τότε $r^n \to 0$ καθώς $n \to \infty$ (Πίνακας 8.1, Τύπος 4) και $\boxed{s_n \to a/(1-r)}$. Αν $|r| > 1$, τότε $|r^n| \to \infty$ και η σειρά αποκλίνει.

Αν $r = 1$, τότε το n-οστό μερικό άθροισμα της γεωμετρικής σειράς ισούται με

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \ldots + a(1)^{n-1} = na,$$

και η σειρά αποκλίνει εφόσον $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, αναλόγως του προσήμου του a. Αν $r = -1$, η σειρά αποκλίνει επειδή τα n-οστά μερικά αθροίσματα ταλαντώνονται μεταξύ του a και του 0. Ας συνοψίσουμε τα αποτελέσματά μας.

Η **γεωμετρική σειρά**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

συγκλίνει στο άθροισμα $a/(1-r)$ αν $|r| < 1$ και αποκλίνει αν $|r| \geq 1$.

Γεωμετρικές σειρές

Αποφανθείτε για το αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές. Στην περίπτωση σύγκλισης, βρείτε την τιμή του αθροίσματος.

(α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(β) $\displaystyle 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$

(γ) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$

Γεωμετρικές σειρές

(α) Ο πρώτος όρος είναι $a = 3$ και $r = 1/2$. Η σειρά συγκλίνει στο

$$\frac{3}{1-(1/2)} = 6.$$

(β) Ο πρώτος όρος είναι $a = 1$ και $r = -1/2$. Η σειρά συγκλίνει στο

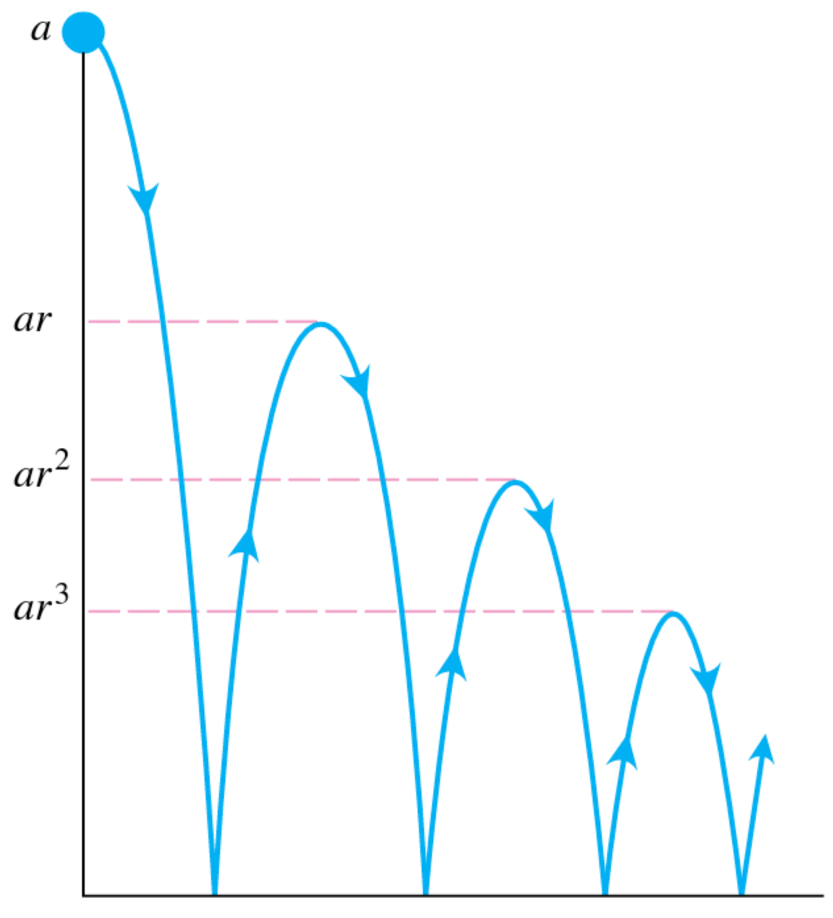
$$\frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{2}{3}.$$

(γ) Ο πρώτος όρος είναι $a = (3/5)^0 = 1$ και $r = 3/5$. Η σειρά συγκλίνει στο

$$\frac{1}{1-(3/5)} = \frac{5}{2}.$$

Παράδειγμα

Έστω ότι από ύψος a m πάνω από επίπεδη επιφάνεια αφήνουμε ένα μπαλάκι να πέσει. Κάθε φορά που το μπαλάκι προσκρούει στην επιφάνεια μετά από πτώση από κατακόρυφη απόσταση h, αναπηδά σε ύψος rh, όπου r θετική σταθερά μικρότερη του 1. Να βρεθεί το συνολικό κατακόρυφο διάστημα (πάνω και κάτω) που διανύει το μπαλάκι (Σχήμα 8.10).



Παράδειγμα

Λύση Το συνολικό διάστημα είναι

$$s = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \cdots}_{\text{Το άθροισμα αυτό ισούται με } 2ar/(1-r)} = a + \frac{2ar}{1-r} = a\,\frac{1+r}{1-r}.$$

Για $a = 6$ m και $r = 2/3$, για παράδειγμα, το διάστημα ισούται με

$$s = 6\,\frac{1+(2/3)}{1-(2/3)} = 6\left(\frac{5/3}{1/3}\right) = 30 \text{ m}.$$

Παράδειγμα

Εκφράστε τον δεκαδικό αριθμό 5,23 23 23 . . . ως λόγο δύο ακεραίων.

Λύση

$$
\begin{aligned}
5{,}23\ 23\ 23\ldots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots \\
&= 5 + \frac{23}{100}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right)}_{1/(1-0{,}01)} \qquad a = 1,\ r = 1/100 \\
&= 5 + \frac{23}{100}\left(\frac{1}{0{,}99}\right) = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

Συγκλίνει η σειρά $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$;

Λύση Ενδεχομένως να μπείτε στον πειρασμό να ομαδοποιήσετε τους όρους της σειράς ως εξής

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots.$$

Όμως αυτό θα ήταν λάθος, διότι η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει *άπειρο* πλήθος αθροίσεων όρων ανά δύο, και συνεπώς δεν μπορεί να αιτιολογηθεί βάσει της προσεταιριστικής ιδιότητας της άθροισης. Εδώ έχουμε να κάνουμε με μια άπειρη σειρά, όχι με άθροισμα πεπερασμένων όρων, και έτσι αν η σειρά καταλήγει σε πεπερασμένο αποτέλεσμα, αυτό *δεν μπορεί παρά να είναι* το όριο της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων,

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots.$$

Εφόσον η ακολουθία αυτή δεν έχει όριο, ούτε και η άπειρη σειρά έχει. Άρα αποκλίνει.

Παράδειγμα

(α) Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 + \cdots$$

αποκλίνει διότι τα μερικά της αθροίσματα υπερβαίνουν κάθε πεπερασμένο αριθμό L. Μετά το $n = 1$, κάθε μερικό άθροισμα $s_n = 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$ είναι μεγαλύτερο του n^2.

(β) Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} + \cdots$$

αποκλίνει διότι τα μερικά της αθροίσματα υπερβαίνουν τελικά κάθε προκαθορισμένο αριθμό. Κάθε όρος είναι μεγαλύτερος του 1, συνεπώς το άθροισμα των n όρων είναι μεγαλύτερο του n.