ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 13ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ολοκλήρωση

Ορισμός **Αντιπαράγωγος συναρτήσεως**

Μια συνάρτηση $F(x)$ είναι **αντιπαράγωγος** της συναρτήσεως $f(x)$ εάν

$$F'(x) = f(x)$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f. Το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f είναι το **αόριστο ολοκλήρωμα** της f ως προς x, και συμβολίζεται ως

$$\int f(x)\, dx$$

Το σύμβολο $\int$ είναι το **σύμβολο ολοκλήρωσης.** Η συνάρτηση f είναι η **ολοκληρωτέα συνάρτηση** του ολοκληρώματος, ενώ x είναι η **μεταβλητή ολοκλήρωσης.**

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

Κανόνες ολοκλήρωσης

1. *Ολοκλήρωμα σταθερού πολλαπλασίου:* $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

(Δεν ισχύει αν το k εξαρτάται από το x .)

2. *Ολοκλήρωμα αρνητικών συναρτήσεων:* $\int -f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx$

(Ουσιαστικά, ο Κανόνας 1 για $k = -1$)

3. *Ολοκλήρωμα αθροίσματος και διαφοράς:*

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Παραδείγματα

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $\quad$ (n ρητός, $\neq -1$) $\qquad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$

   $\int dx = \int 1\,dx = x + C$ (ειδική περίπτωση) $\qquad \dfrac{d}{dx}(x) = 1$

2. $\int \sin kx\,dx = -\dfrac{\cos kx}{k} + C \qquad \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$

3. $\int \cos kx\,dx = \dfrac{\sin kx}{k} + C \qquad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$

4. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

5. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C \qquad \dfrac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$

6. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

7. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C \qquad \dfrac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$

Παραδείγματα

(α)

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

(β)

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Όπως στο (α), αλλά με αντίθετο πρόσημο

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η καμπύλη που έχει κλίση $3x^2$ στο σημείο (x, y) και διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.

Λύση

Η διαφορική εξίσωση : $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$

Η αρχική συνθήκη: $y(1) = -1$

1. Επιλύουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\int \frac{dy}{dx}\, dx = \int 3x^2\, dx$$

$$y + C_1 = x^3 + C_2$$

$$y = x^3 + C.$$

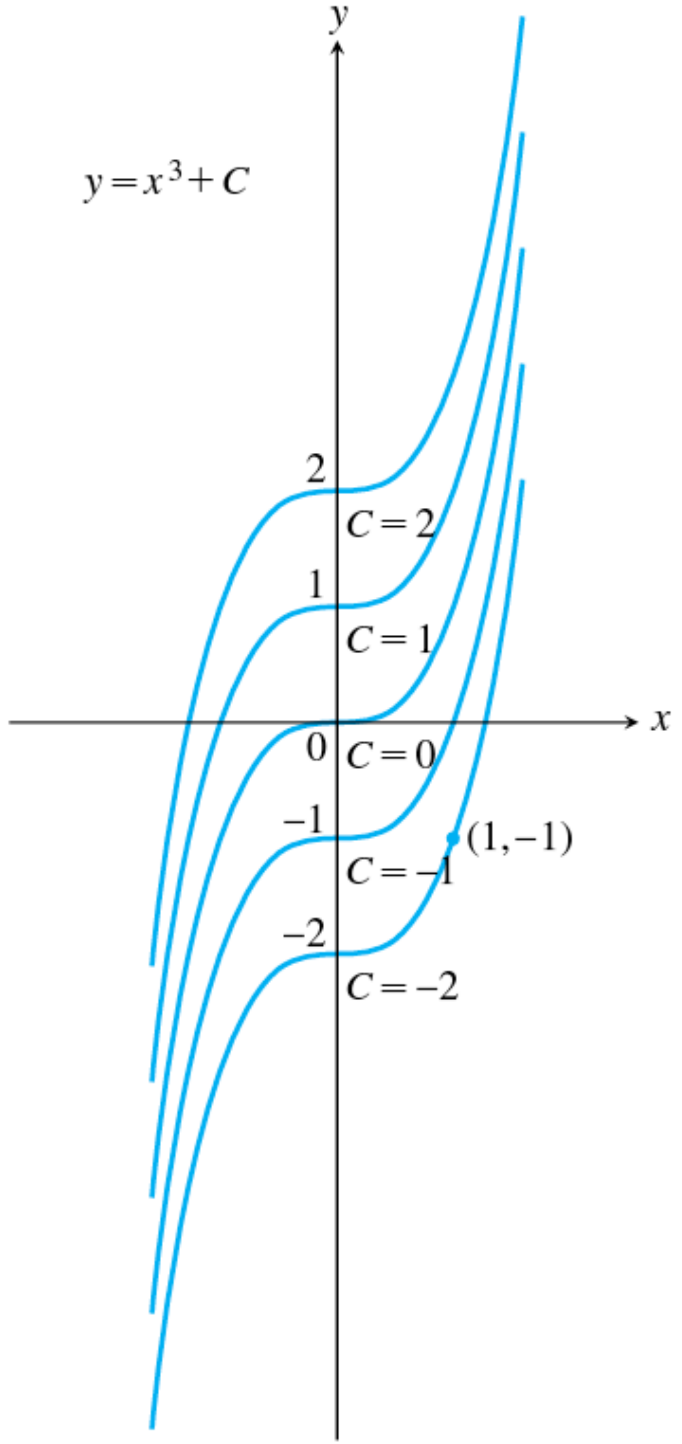
Συνδιάζουμε σε μία τις σταθερές ολοκλήρωσης και παίρνουμε τη γενική λύση.

Παράδειγμα 1

2. Υπολογισμός του C:

$$y = x^3 + C$$
$$-1 = (1)^3 + C$$
$$C = -2.$$

Η ζητούμενη καμπύλη είναι η $y = x^3 - 2$



Παράδειγμα 2

Ένα αερόστατο που ανυψώνεται με ταχύτητα 4 m/sec βρίσκεται σε ύψος 30 m πάνω από το έδαφος όταν αφήνει να πέσει ένα πακέτο. Πόσος χρόνος απαιτείται για να φθάσει το πακέτο στο έδαφος;

Λύση

Διαφορική εξίσωση: $\dfrac{dv}{dt} = 9{,}8$ Αρνητικό εφόσον η βαρύτητα δρα στην κατεύθυνση όπου μειώνεται το s.

Αρχική συνθήκη: $v(0) = 4,$

1. Λύνουμε τη διαφορική εξίσωση :

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8$$

$$\int \frac{dv}{dt}\,dt = \int -9{,}8\,dt$$

$$v = -9{,}8t + C.$$ Συνδυασμός σταθερών σε μία

Παράδειγμα 2

2. Υπολογίζουμε το C:

$$\begin{aligned} 4 &= -9{,}8(0) + C \\ C &= 4. \end{aligned}$$

Αρχική συνθήκη $v(0) = 4$

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$v = -9{,}8t + 4.$$

Εφόσον η ταχύτητα είναι η παράγωγος του ύψους και το ύψος του πακέτου είναι 30 m τη στιγμή $t = 0$, όταν αφήνεται να πέσει, έχουμε τώρα ένα δεύτερο πρόβλημα αρχικών τιμών.

Διαφορική εξίσωση: $\dfrac{ds}{dt} = -9{,}8\,t + 4$ — Θέσαμε $v = ds/dt$ στην τελευταία εξίσωση.

Αρχική συνθήκη: $s(0) = 30$

Παράδειγμα 2

Λύνουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{ds}{dt} = -9{,}8t + 4$$

$$\int \frac{ds}{dt}\,dt = \int (-9{,}8t + 4)\,dt$$

$$s = -4{,}9t^2 + 4t + C$$

Υπολογίζουμε το C:

$$30 = -4{,}9(0)^2 + 4(0) + C$$

$$C = 30.$$

(στο βιβλίο του Thomas,
στη σελ. 310
υπάρχουν τυπογραφικά
σε αυτές τις δύο σχέσεις)

Το ύψος του πακέτου από το έδαφος τη στιγμή t είναι

$$s = -4{,}9t^2 + 4t + 30.$$

Παράδειγμα 2

Χρησιμοποιούμε τη λύση: Για να βρούμε πόσο χρόνο χρειάζεται το πακέτο για να φθάσει στο έδαφος, θέτουμε s ίσο με 0 και λύνουμε ως προς t:

$$-4{,}9t^2 + 4t + 30 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{151}}{-4{,}9}$$ Ρίζες του τριωνύμου

$$t \approx -2{,}91, \qquad \underline{t \approx 2{,}1.}$$

Ολοκλήρωμα ρητής δύναμης

Αν u είναι τυχούσα διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1\,,\ n \text{ ρητός})\,.$$

Παράδειγμα 3

$$\int \sqrt{1+y^2} \cdot 2y\, dy = \int u^{1/2}\, du \qquad \text{Έστω } u = 1+y^2,\ du = 2y\ dy.$$

$$= \frac{u^{(1/2)+1}}{(1/2)+1} + C$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3} (1+y^2)^{3/2} + C$$

Παράδειγμα 4

$$\int \sqrt{4t-1}\,dt = \int u^{1/2} \cdot \frac{1}{4}\,du$$

Έστω $u = 4t - 1$, $du = 4\,dt$, $(1/4)\,du = dt$.

$$= \frac{1}{4} \int u^{1/2}\,du$$

Με το $1/4$ ως συντελεστή, το ολοκλήρωμα παίρνει τώρα τη γνώριμη μορφή.

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C$$

Ολοκληρώνουμε, εφαρμόζοντας την Εξ. (1) με $n = 1/2$.

$$= \frac{1}{6} u^{3/2} + C$$

Απλούστερη μορφή

$$= \frac{1}{6} (4t-1)^{3/2} + C$$

Αντικαθιστούμε το u με $4t - 1$.

Μέθοδος αντικατάστασης

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

1. Αντικαθιστούμε $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$.

$$= F(u) + C$$

2. Βρίσκουμε μια (οποιαδήποτε) αντιπαράγωγο F(u) της f(u).

$$= F(g(x)) + C$$

3. Αντικαθιστούμε το u με $g(x)$.

Παράδειγμα 5

$$\int \cos(7\theta + 5)\, d\theta = \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\, du$$

Έστω $u = 7\theta + 5$, $du = 7\, d\theta$, $(1/7)\, du = d\theta$.

$$= \frac{1}{7} \int \cos u\, du$$

Με το $(1/7)$ ως συντελεστή, το ολοκλήρωμα παίρνει τώρα τη γνώριμη μορφή.

$$= \frac{1}{7} \sin u + C$$

Ολοκληρώνουμε ως προς u.

$$= \frac{1}{7} \sin(7\theta + 5) + C$$

Αντικαθιστούμε το u με $7\theta + 5$.

Παράδειγμα 6

$$\int x^2 \sin(x^3)\,dx = \int \sin(x^3)\cdot x^2\,dx$$

Έστω $u = x^3$, $du = 3x^2\,dx$,
$(1/3)\,du = x^2\,dx$.

$$= \int \sin u \cdot \frac{1}{3}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int \sin u\,du$$

Ολοκληρώνουμε ως προς u.

$$= \frac{1}{3}(-\cos u) + C$$

Αντικαθιστούμε το u με x^3.

$$= -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C$$

Παράδειγμα 7

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{\cos^2 2x}\, dx \, .$$

Λύση

$$\int \frac{1}{\cos^2 2x}\, dx = \int \sec^2 2x \, dx \qquad \frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x$$

$$= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{2}\, du \qquad u = 2x,\; du = 2\, dx,\; dx = (1/2)\, du$$

$$= \frac{1}{2} \int \sec^2 u \, du$$

$$= \frac{1}{2} \tan u + C \qquad \frac{d}{du} \tan u = \sec^2 u$$

$$= \frac{1}{2} \tan 2x + C \qquad u = 2x$$

Παράδειγμα 8

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}}.$$

Λύση 1 Κάνουμε την αντικατάσταση $u = z^2 + 1$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} &= \int \frac{du}{u^{1/3}} && \text{Έστω } u = z^2+1,\ du = 2z\,dz\,. \\
&= \int u^{-1/3}\,du && \text{Μορφή } \textstyle\int u^n\,du. \\
&= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C && \text{Ολοκληρώνουμε ως προς } u\,. \\
&= \frac{3}{2}u^{2/3} + C \\
&= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C && \text{Αντικαθιστούμε το } u \text{ με } z^2+1.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 8

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}}.$$

Λύση 2 Αντί της παραπάνω, αντικαθιστούμε $u = \sqrt[3]{z^2+1}$.

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} = \int \frac{3u^2\,du}{u}$$

Έστω $u = \sqrt[3]{z^2+1}$, $u^3 = z^2+1$, $3u^2\,du = 2z\,dz$.

$$= 3\int u\,du$$

$$= 3\cdot\frac{u^2}{2} + C$$

Ολοκληρώνουμε ως προς u.

$$= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C$$

Αντικαθιστούμε το u με $(z^2+1)^{1/3}$.

Αθροίσματα Riemann

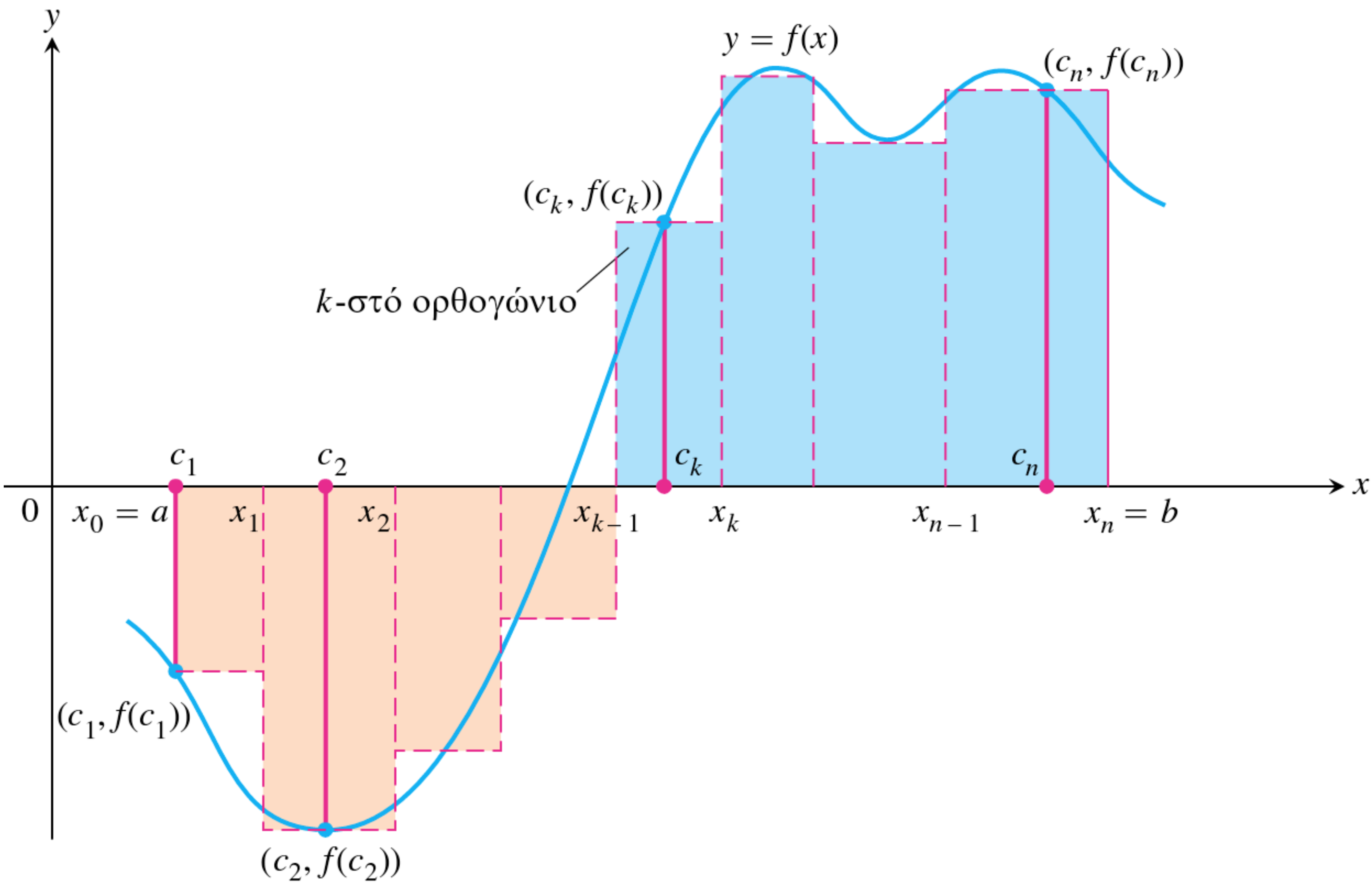
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}$$

Αθροίσματα Riemann

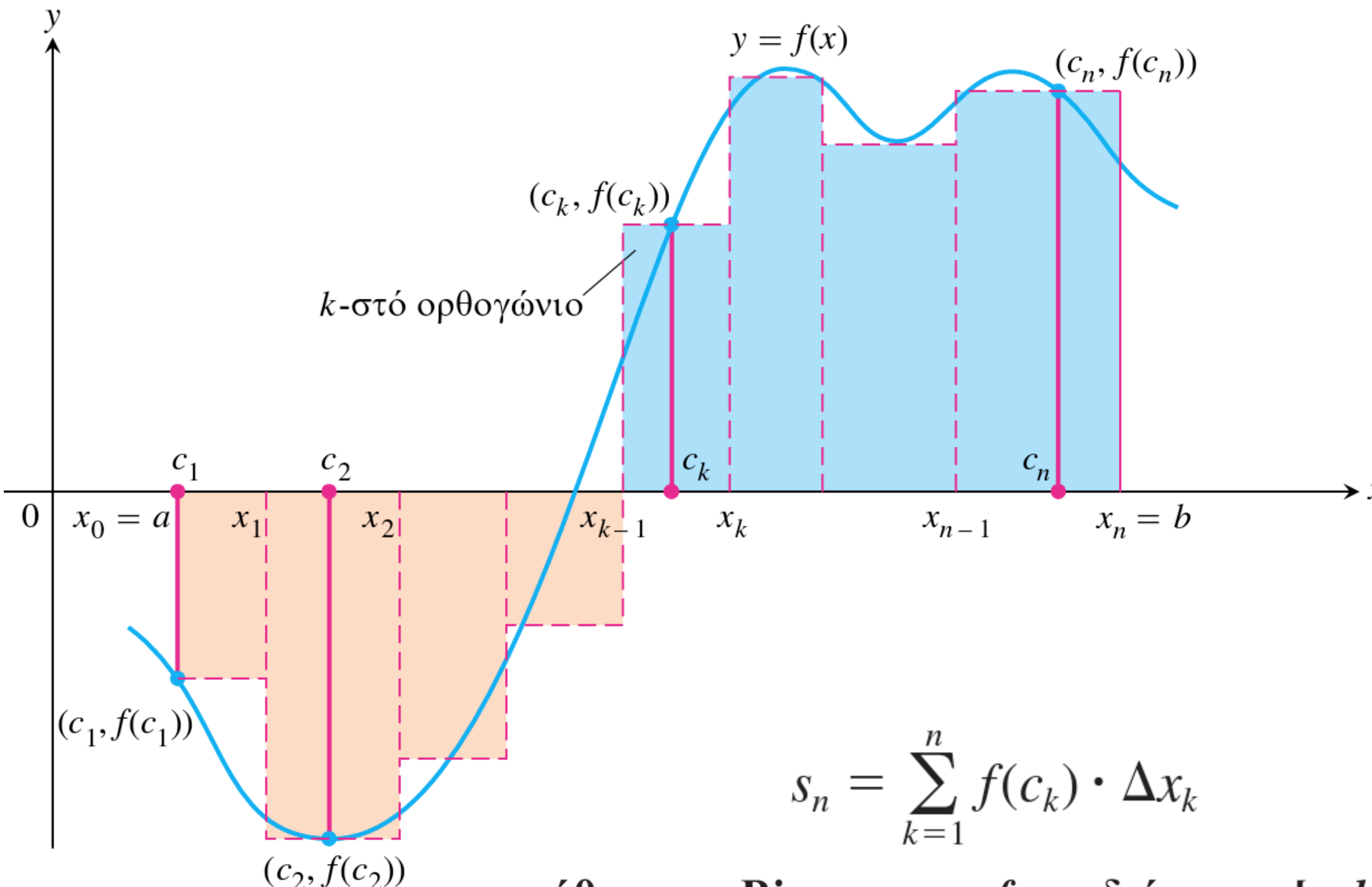
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Συμβολισμός αθροίσματος	**Αναλυτική γραφή, ένας όρος για κάθε τιμή του *k***	**Η τιμή του αθροίσματος**
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$-1 + 2 - 3 = -2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
$\sum_{k=4}^{5} \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{4^2}{4-1} + \frac{5^2}{5-1}$	$\frac{16}{3} + \frac{25}{4} = \frac{139}{12}$

Αθροίσματα Riemann



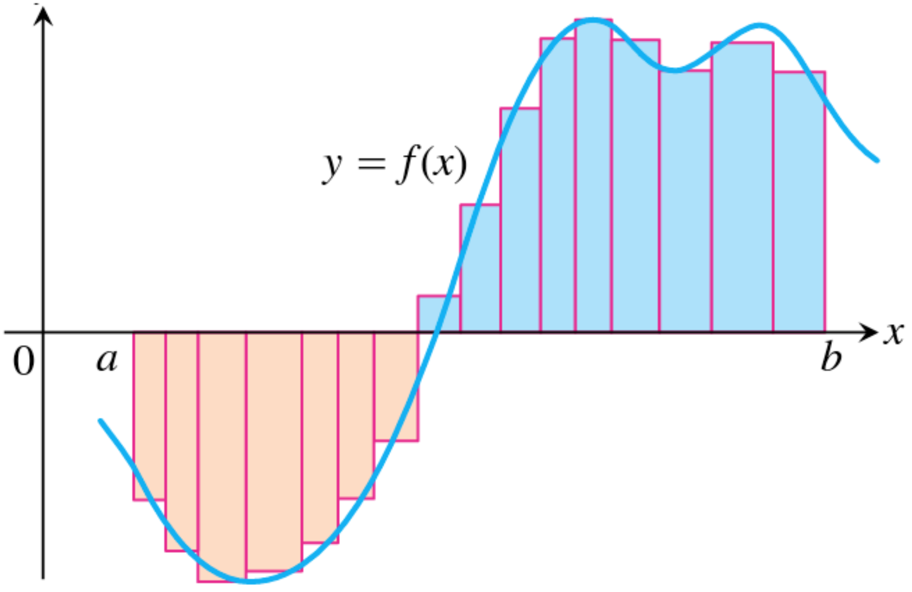
Αθροίσματα Riemann

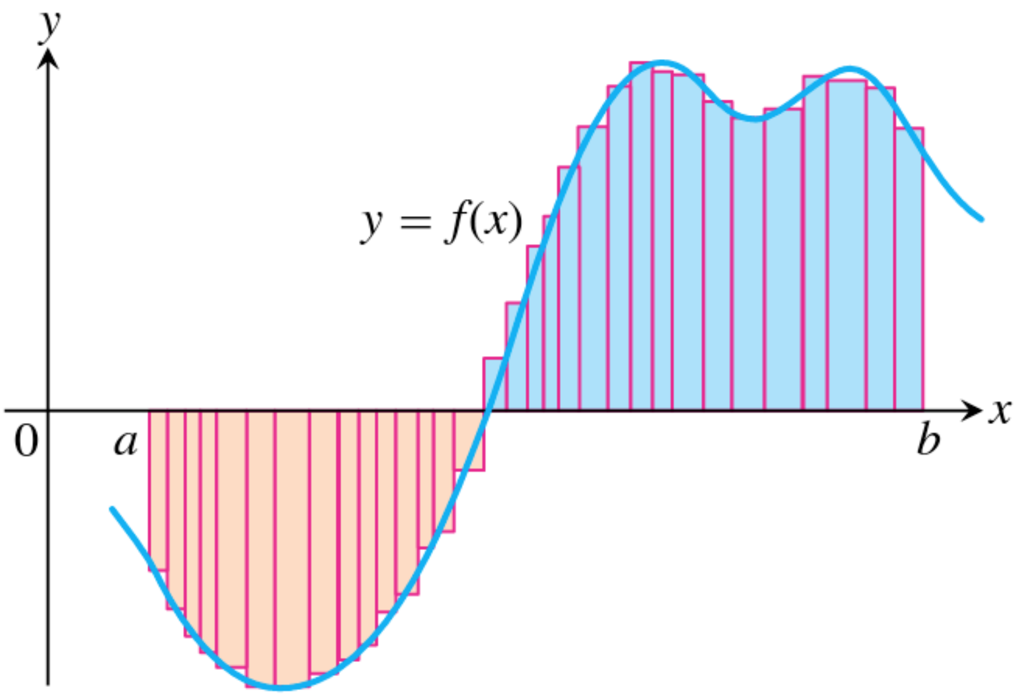


$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

άθροισμα Riemann της f στο διάστημα $[a, b]$.

Πυκνότερη διαμέριση





Ολοκληρώσημη συνάρτηση

Ορισμός **Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως όριο των αθροισμάτων Riemann**

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Για μια τυχούσα διαμέριση P του $[a, b]$, επιλέγουμε τυχαία τους αριθμούς c_k στα υποδιαστήματα $\left[x_{k-1}, x_k\right]$.

Αν υπάρχει αριθμός I τέτοιος ώστε

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k = I$$

ανεξάρτητα του τρόπου επιλογής των P και c_k, τότε η f είναι **ολοκληρώσιμη** στο $[a, b]$ και το I είναι το **ορισμένο ολοκλήρωμα** της f στο $[a, b]$.