ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 14ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ορισμένα ολοκληρώματα

Θεώρημα 1 **Ύπαρξη ορισμένων ολοκληρωμάτων**

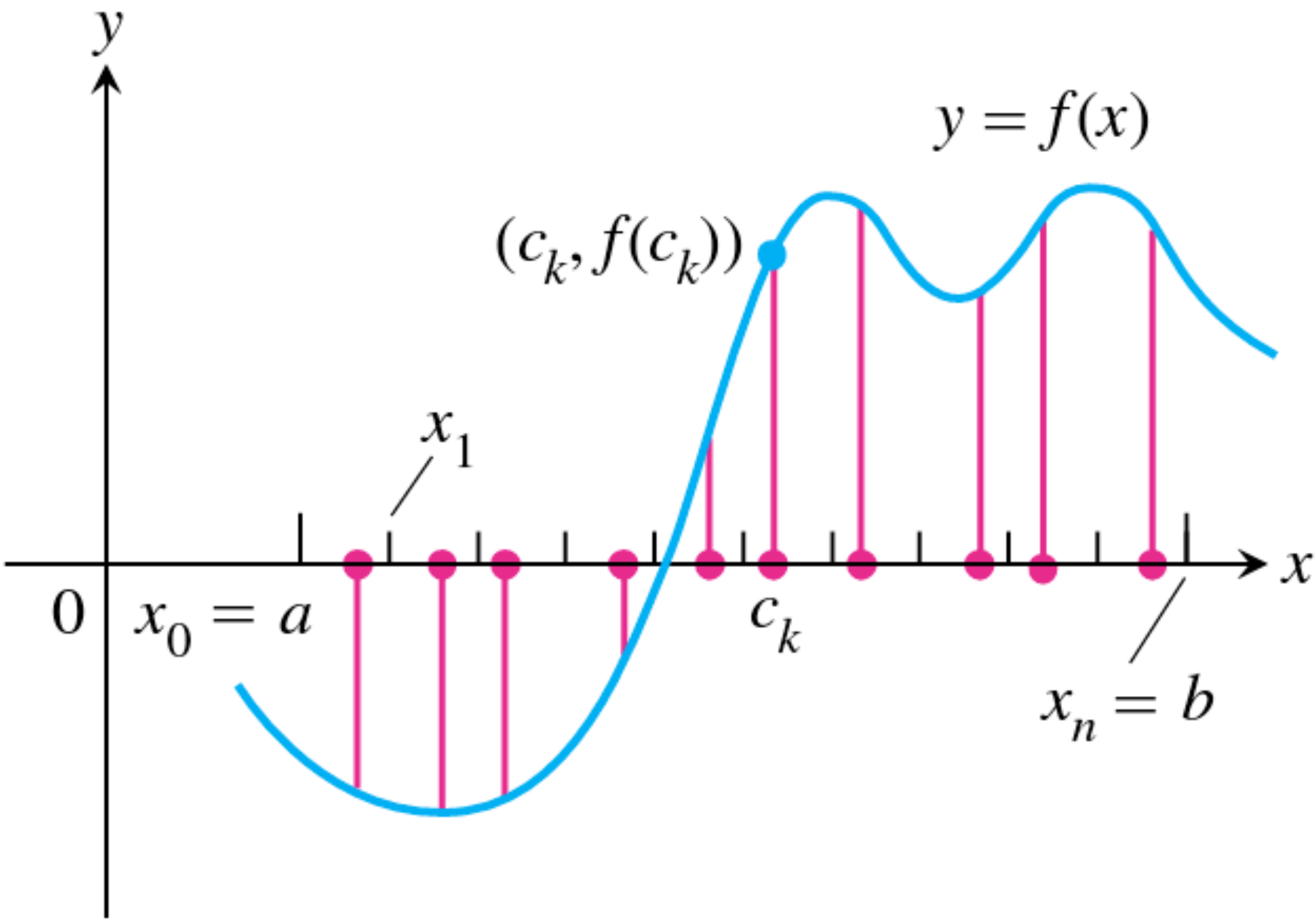
Όλες οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες. Δηλαδή, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε υπάρχει το ορισμένο ολοκλήρωμά της στο $[a, b]$.

Ορισμός **Εμβαδόν χωρίου κάτω από καμπύλη (ως ορισμένο ολοκλήρωμα)**

Αν η $y = f(x)$ είναι μη αρνητική και ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε **το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ από a έως b** είναι το ολοκλήρωμα της f από a έως b,

$$A = \int_a^b f(x)\, dx .$$

Τιμές συνάρτησης



Μέση τιμή

$$\frac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_n)}{n} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k)$$

Το άθροισμα σε συμβολισμό σίγμα

$$= \frac{\Delta x}{b-a}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k)$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x}_{\text{άθροισμα Riemann της } f \text{ στο } [a,\, b]}.$$

Ορισμός **Μέση τιμή**

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a\,,\,b]$, τότε η **μέση τιμή** της στο $[a\,,\,b]$ ισούται με

$$\operatorname{av}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

1. *Σειρά ολοκλήρωσης:* $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ Ορισμός

2. *Μηδενισμός:* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ Ορισμός

3. *Σταθερό πολλαπλάσιο:* $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ Τυχών αριθμός k

$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ $k = -1$

4. *Άθροισμα και διαφορά:* $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

5. *Αθροιστικότητα:* $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

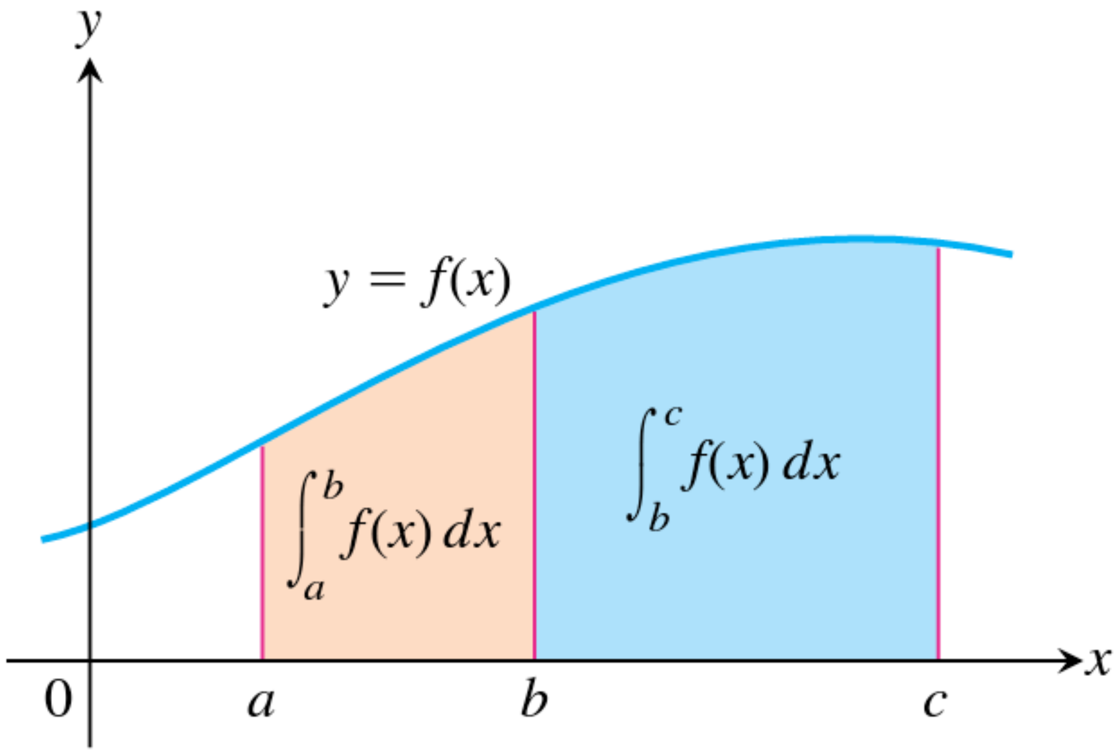
6. *Ανισότητα max-min:* Αν $\max f$ και $\min f$ είναι η μέγιστη και ελάχιστη τιμή, αντίστοιχα, της f στο διάστημα $[a, b]$, τότε

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \max f \cdot (b - a).$$

7. *Φράγματα:* $f(x) \geq g(x)$ στο $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$

$f(x) \geq 0$ στο $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq 0$ (ειδική περίπτωση)

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων



ΣΧΗΜΑ 4.12 Κανόνας 5:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Παράδειγμα

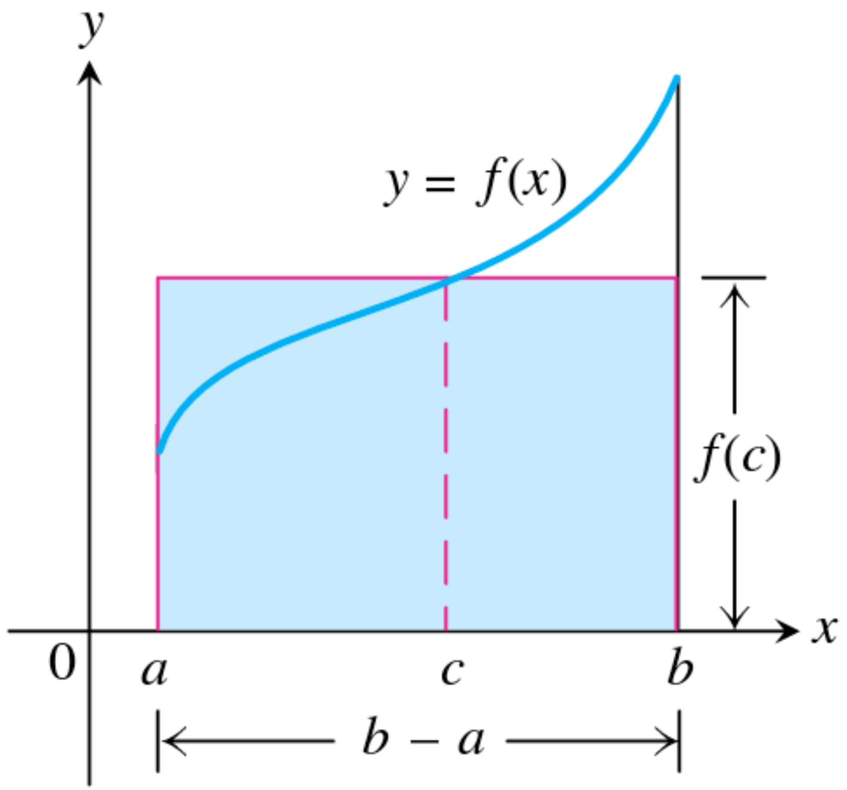
Δείξτε ότι η τιμή του $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx$ είναι μικρότερη του 3/2.

Λύση Σύμφωνα με την ανισότητα max-min για ορισμένα ολοκληρώματα (Κανόνας 6), η ποσότητα $\min f \cdot (b - a)$ είναι ένα *κάτω φράγμα* της τιμής του $\int_a^b f(x)\, dx$, ενώ η ποσότητα $\max f \cdot (b - a)$ είναι ένα *άνω φράγμα*. Η μέγιστη τιμή της $\sqrt{1 + \cos x}$ στο $[0, 1]$ είναι $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, άρα

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx \leq \sqrt{2} \cdot (1 - 0) = \sqrt{2}.$$

Εφόσον το $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx$ έχει ως άνω φράγμα τον αριθμό $\sqrt{2}$ (δηλαδή 1,414 . . .), το ολοκλήρωμα είναι μικρότερο του 3/2.

Θεώρημα μέσης τιμής



Θεώρημα 2 **Το Θεώρημα μέσης τιμής για ορισμένα ολοκληρώματα**

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε σε κάποιο σημείο c στο $[a, b]$, θα ισχύει

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Παράδειγμα

Βρείτε τη μέση τιμή της $f(x) = 4 - x$ στο $[0, 3]$. Επίσης, βρείτε σε ποιο σημείο του πεδίου ορισμού της παίρνει η f την τιμή αυτή.

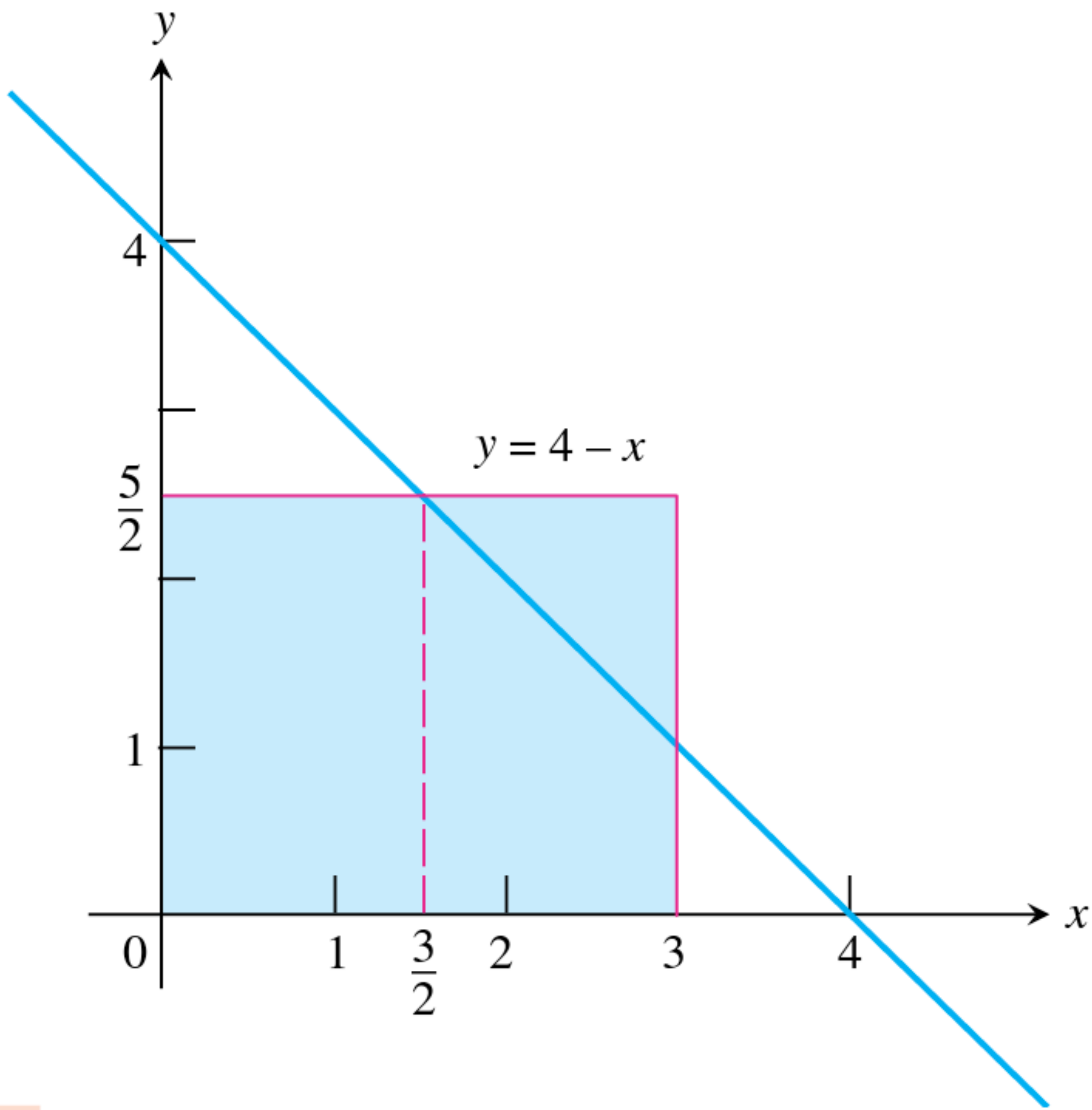
Λύση

$$\begin{aligned}
\operatorname{av}(f) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{3-0}\int_0^3 (4-x)\,dx = \frac{1}{3}\left(\int_0^3 4\,dx - \int_0^3 x\,dx\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(4(3-0) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\right) \\
&= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

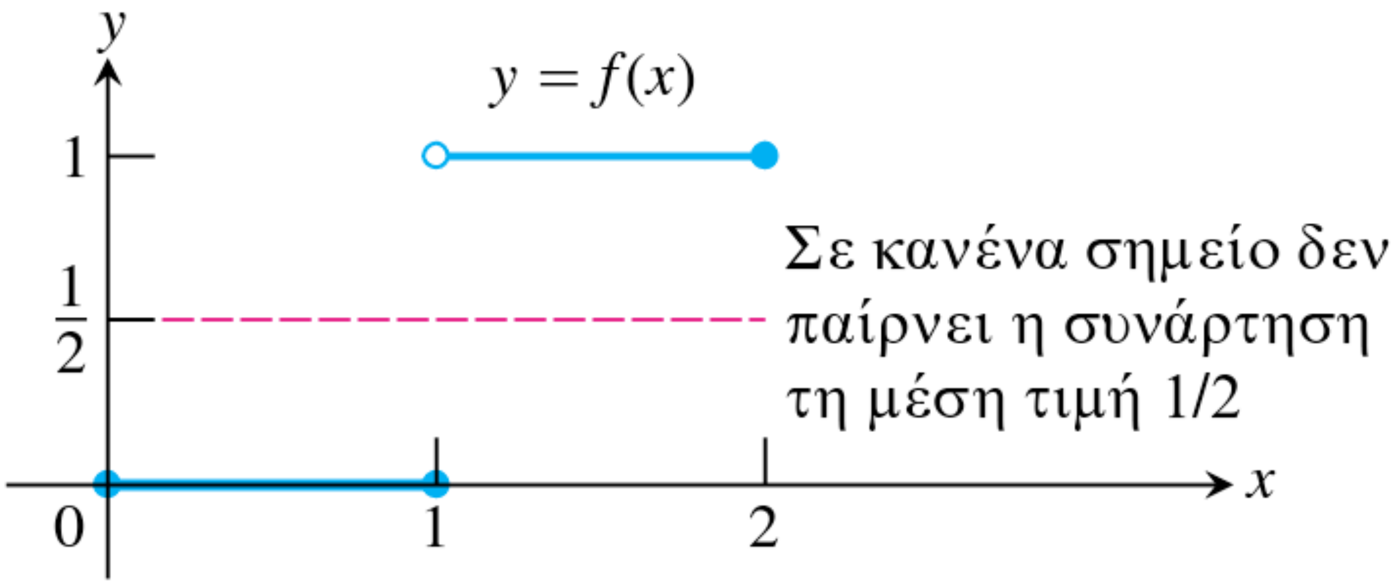
Ενότητα 4.4, Παράδειγμα 3.

Η μέση τιμή της $f(x) = 4 - x$ στο διάστημα $[0, 3]$ είναι $5/2$. Η συνάρτηση παίρνει την τιμή αυτή όταν $4 - x = 5/2$, δηλαδή για $x = 3/2$. (Σχήμα 4.14).

Παράδειγμα



Ασυνεχείς συναρτήσεις



ΣΧΗΜΑ 4.15 Μια ασυνεχής συνάρτηση μπορεί να μην παίρνει ποτέ τη μέση τιμή της.

Θεμελιώδες θεώρημα

Θεώρημα 3 **Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, Μέρος 1**

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

έχει παράγωγο για κάθε x στο $[a, b]$ και ισχύει ότι

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)\,.$$

Παράδειγμα

Βρείτε το dy/dx αν $y = \int_1^{x^2} \cos t \, dt$.

Λύση Το άνω όριο ολοκλήρωσης δεν είναι x αλλά x^2. Με άλλα λόγια, η y είναι η σύνθεση των

$$y = \int_1^u \cos t \, dt \quad \text{και} \quad u = x^2 .$$

Συνεπώς πρέπει να εφαρμόσουμε τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης για την εύρεση του dy/dx.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \left(\frac{d}{du} \int_1^u \cos t \, dt \right) \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \cos u \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \cos (x^2) \cdot 2x \\
&= 2x \cos x^2
\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Βρείτε το dy/dx.

(α) $y = \int_x^5 3t \sin t \, dt$

Λύση

$$\frac{d}{dx}\int_x^5 3t \sin t \, dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t \sin t \, dt\right)$$

$$= -\frac{d}{dx}\int_5^x 3t \sin t \, dt$$

$$= -3x \sin x$$

Παράδειγμα

Βρείτε το dy/dx.

(β) $y = \displaystyle\int_{1+3x^2}^{4} \frac{1}{2+t^2}\,dt$

Λύση

$$\frac{d}{dx}\int_{1+3x^2}^{4}\frac{1}{2+t^2}\,dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_{4}^{1+3x^2}\frac{1}{2+t^2}\,dt\right)$$ Κανόνας 1

$$= -\frac{d}{dx}\int_{4}^{1+3x^2}\frac{1}{2+t^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2+(1+3x^2)^2}\,\frac{d}{dx}(1+3x^2)$$ Εξ. (2) και κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης

$$= -\frac{2x}{1+2x^2+3x^4}$$ Απαλοιφή του 3 από αριθμητή και παρονομαστή

Παράδειγμα

Βρείτε μια συνάρτηση $y = f(x)$ με παράγωγο

$$\frac{dy}{dx} = \tan x$$

και τιμή $f(3) = 5$.

Λύση

$$y = \int_3^x \tan t \, dt.$$

Εφόσον $y(3) = 0$, αρκεί να προσθέσουμε το 5 στη συνάρτηση αυτή για να πάρουμε μια συνάρτηση με παράγωγο $\tan x$ και τιμή 5 στο $x = 3$:

$$f(x) = \int_3^x \tan t \, dt + 5.$$

$$y = \ln \left| \frac{\cos 3}{\cos x} \right| + 5$$

Θεμελιώδες θεώρημα

Θεώρημα 3 (συνέχεια) **Το Θεμελιώδες Θεώρημα του απειροστικού λογισμού, Μέρος 2**

Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[a, b]$ και αν η F είναι μία αντιπαράγωγος της f στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Η πρόταση αυτή καλείται επίσης **θεώρημα υπολογισμού ολοκληρωμάτων.**

Παράδειγμα

Βρείτε την τιμή του $\int_{-1}^{3} (x^3 + 1)\, dx$ με χρήση αντιπαραγώγων.

Λύση

Μία αντιπαράγωγος της $x^3 + 1$ είναι η $(x^4/4) + x$. Συνεπώς,

$$\int_{-1}^{3} (x^3 + 1)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^{3}$$

$$= \left(\frac{81}{4} + 3\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right)$$

$$= 24.$$

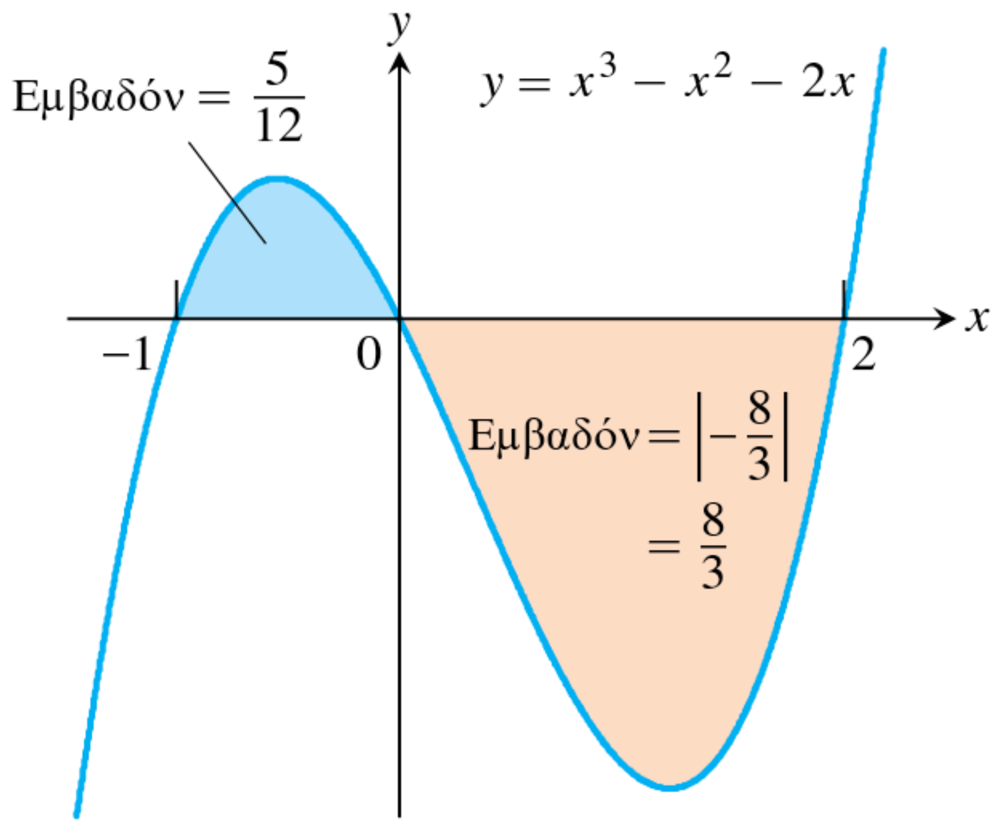
Παράδειγμα

Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που οριοθετείται από τον άξονα x και από το γράφημα της $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $-1 \leq x \leq 2$.

Λύση Πρώτα βρίσκουμε τα σημεία μηδενισμού της f. Εφόσον

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2),$$

τα σημεία μηδενισμού θα είναι $x = 0$, -1, και 2 (Σχήμα 4.17). Τα ση-



Παράδειγμα

$$\textit{Ολοκλήρωμα στο } [-1, 0]: \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$= 0 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{5}{12}$$

$$\textit{Ολοκλήρωμα στο } [0, 2]: \int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= \left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] - 0 = -\frac{8}{3}$$

Περικλειόμενο εμβαδόν:

$$\text{Συνολικό περικλειόμενο εμβαδόν: } = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$$

Συνολικό εμβαδό

Πώς βρίσκουμε το συνολικό εμβαδόν

Για την αναλυτική εύρεση του συνολικού εμβαδού μεταξύ του γραφήματος της $y = f(x)$ και του άξονα x στο διάστημα $[a, b]$, εργαζόμαστε ως εξής.

Βήμα 1. Διαμερίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε υποδιαστήματα που ορίζονται από τα σημεία μηδενισμού της f.

Βήμα 2. Ολοκληρώνουμε την f σε κάθε υποδιάστημα.

Βήμα 3. Αθροίζουμε τις απόλυτες τιμές των ολοκληρωμάτων.

Μέθοδος αντικατάστασης

Η μέθοδος της αντικατάστασης σε ορισμένα ολοκληρώματα

Ο ΤΥΠΟΣ

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du \qquad (1)$$

ΠΩΣ ΕΦΑΡΜΟΖΕΤΑΙ

Αντικαθιστούμε $u = g(x)$, $du = g'(x)\, dx$, και ολοκληρώνουμε από $g(a)$ έως $g(b)$.

Παράδειγμα

Κάνοντας χρήση της Εξίσωσης (1), υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} 3x^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx\,.$$

Λύση Μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα καθώς και τα όρια ολοκλήρωσης βάσει της Εξίσωσης (1).

$$\int_{-1}^{1} 3x^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx$$

$$= \int_{0}^{2} \sqrt{u}\, du$$

Έστω $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2 dx$.
Για $x = -1$, $u = (-1)^3 + 1 = 0$.
Για $x = 1$, $u = (1)^3 + 1 = 2$.

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} \Big]_0^2$$

Υπολογίζουμε το νέο ορισμένο ολοκλήρωμα.

$$= \frac{2}{3} [2^{3/2} - 0^{3/2}] = \frac{2}{3} [2\sqrt{2}] = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Εναλλακτική λύση

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$ Έστω $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2\,dx$.

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$ Ολοκληρώνουμε ως προς u.

$$= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2} + C$$ Αντικαθιστούμε το u με $x^3 + 1$.

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}\Big]_{-1}^{1}$$ Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα με τα όρια ολοκλήρωσης του x.

$$= \frac{2}{3}\left[((1)^3+1)^{3/2} - ((-1)^3+1)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[2^{3/2} - 0^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Παράδειγμα

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta \csc^2\theta \, d\theta = \int_1^0 u \cdot (-du)$$

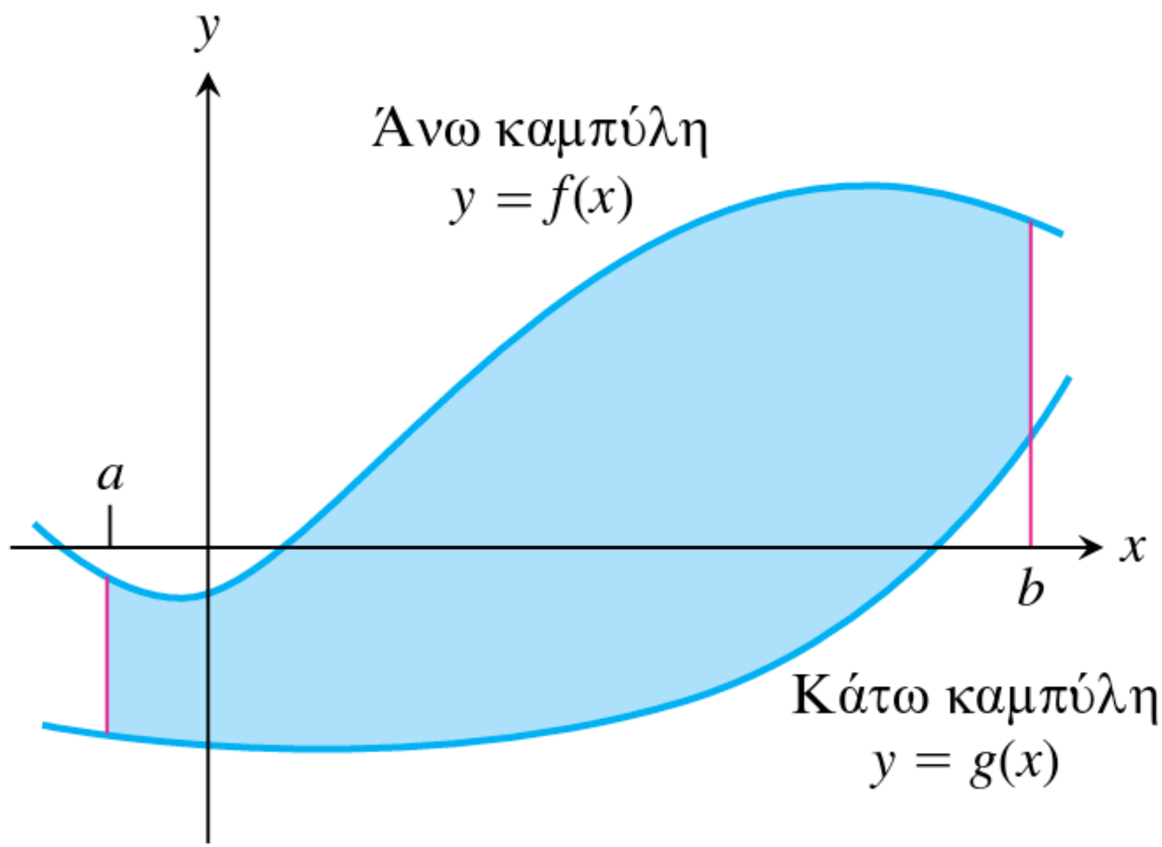
Έστω $u = \cot\theta$, $du = -\csc^2\theta \, d\theta$,
$-du = \csc^2\theta \, d\theta$.
Για $\theta = \pi/4$, $u = \cot(\pi/4) = 1$.
Για $\theta = \pi/2$, $u = \cot(\pi/2) = 0$.

$$= -\int_1^0 u \, du$$

$$= -\frac{u^2}{2}\Big]_1^0$$

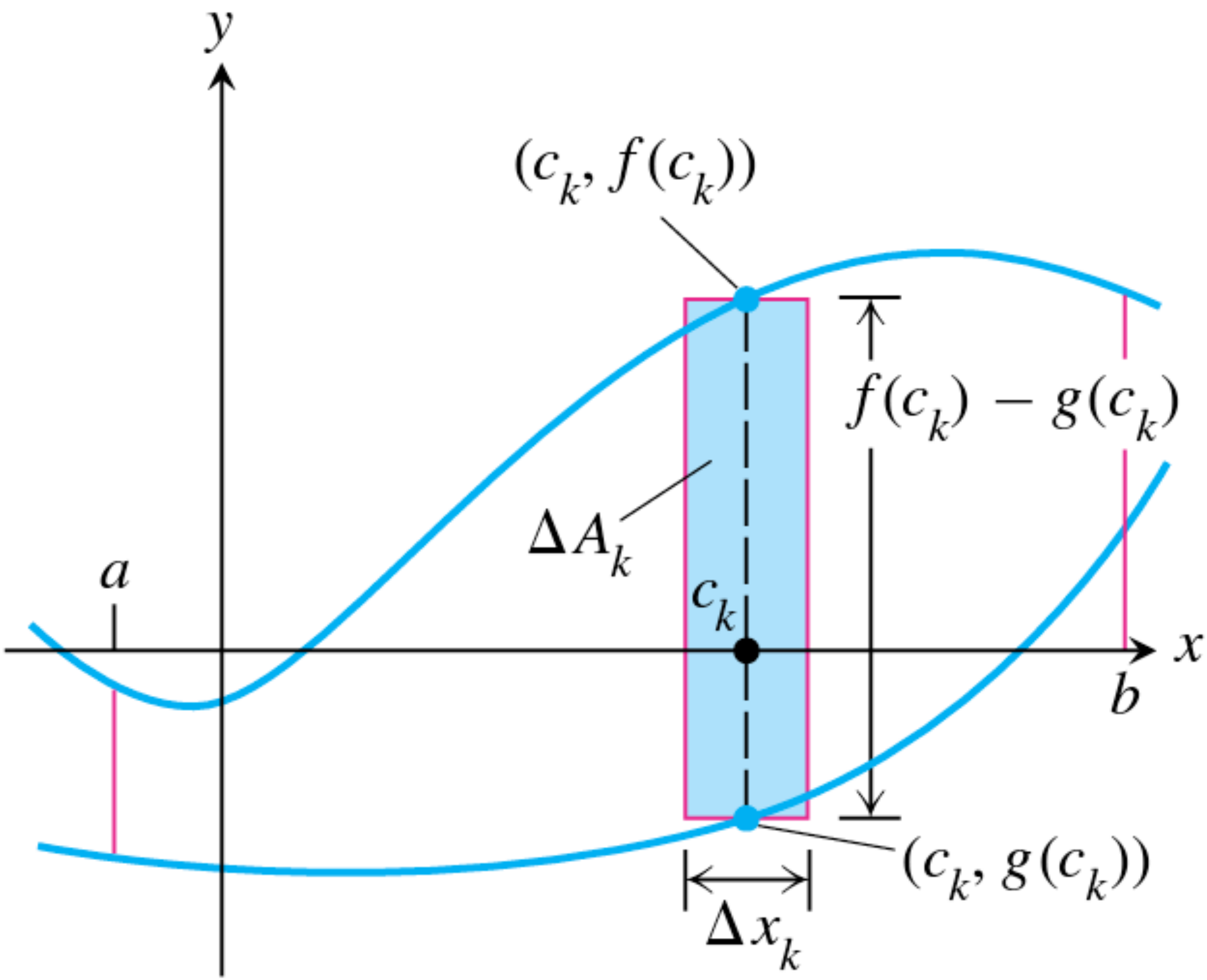
$$= -\left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

Εμβαδά μεταξύ καμπυλών

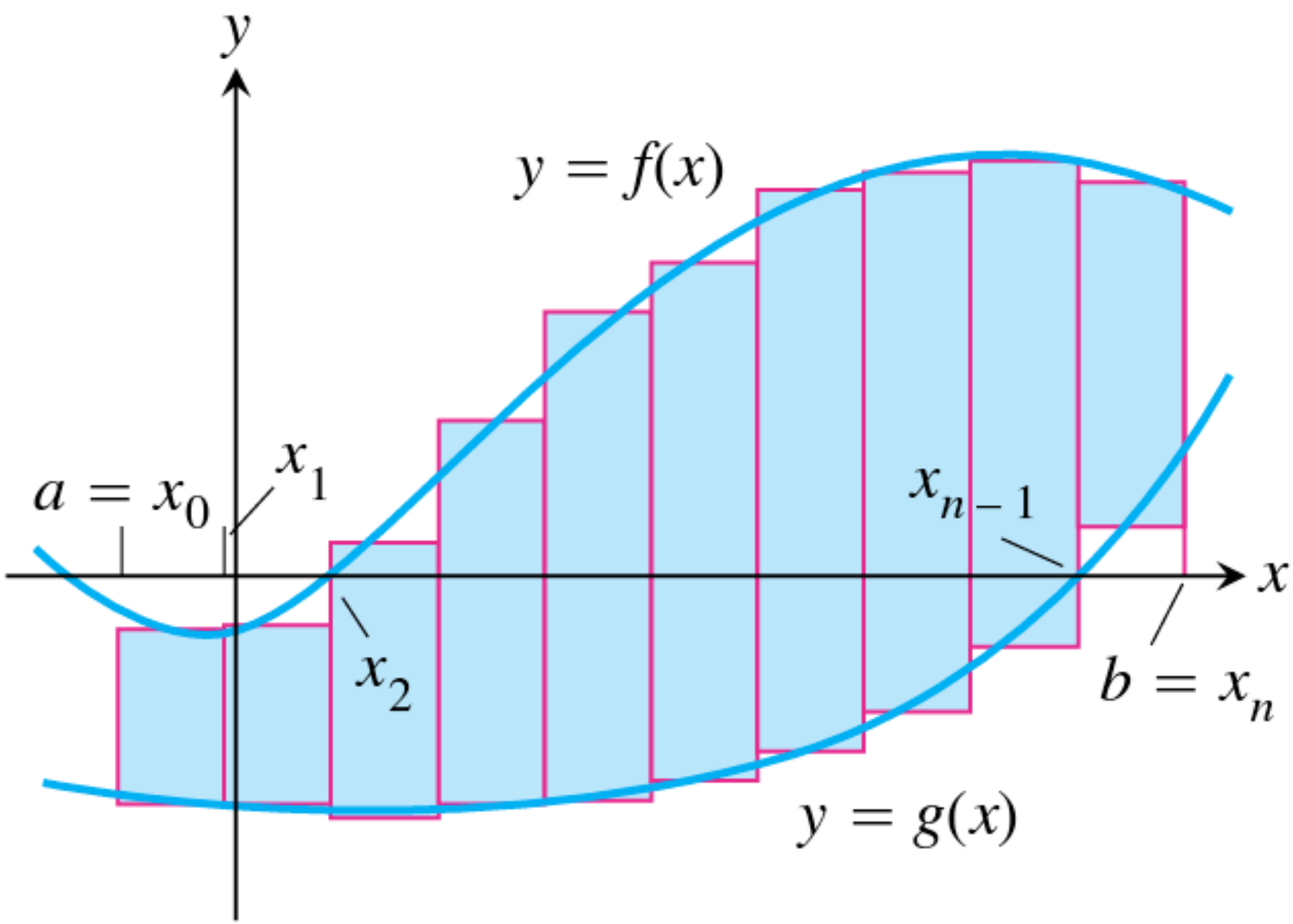


ΣΧΗΜΑ 4.19 Το χωρίο που περιέχεται μεταξύ των καμπυλών $y = f(x)$ και $y = g(x)$ και των ευθειών $x = a$ και $x = b$.

Εμβαδά μεταξύ καμπυλών



Εμβαδά μεταξύ καμπυλών



$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\, \Delta x_k .$$

Άθροισμα Riemann

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\, \Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx .$$

Εμβαδά μεταξύ καμπυλών

Ορισμός **Εμβαδόν μεταξύ καμπυλών**

Αν οι f και g είναι συνεχείς και $f(x) \geq g(x)$ παντού στο $[a, b]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των καμπυλών $y = f(x)$ και $y = g(x)$ από a έως b ισούται με το ολοκλήρωμα της $[f - g]$ από a έως b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx. \qquad (2)$$

Εμβαδά μεταξύ καμπυλών

Πώς υπολογίζουμε το εμβαδόν μεταξύ δύο καμπυλών

Βήμα 1. *Παριστούμε γραφικά τις καμπύλες και σχεδιάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό ορθογώνιο.* Το σχήμα αναδεικνύει ποια καμπύλη είναι η f (δηλ. η άνω καμπύλη) και ποια η g (κάτω καμπύλη). Επίσης μας βοηθά να βρούμε τα όρια της ολοκλήρωσης αν δεν μας είναι ήδη γνωστά.

Βήμα 2. *Βρίσκουμε τα όρια της ολοκλήρωσης.*

Βήμα 3. *Γράφουμε έναν τύπο για την ποσότητα* $f(x) - g(x)$. Αν μπορούμε, τον απλοποιούμε.

Βήμα 4. *Ολοκληρώνουμε την* $[f(x) - g(x)]$ *από* a *έως* b. Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι το ζητούμενο εμβαδόν.