ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

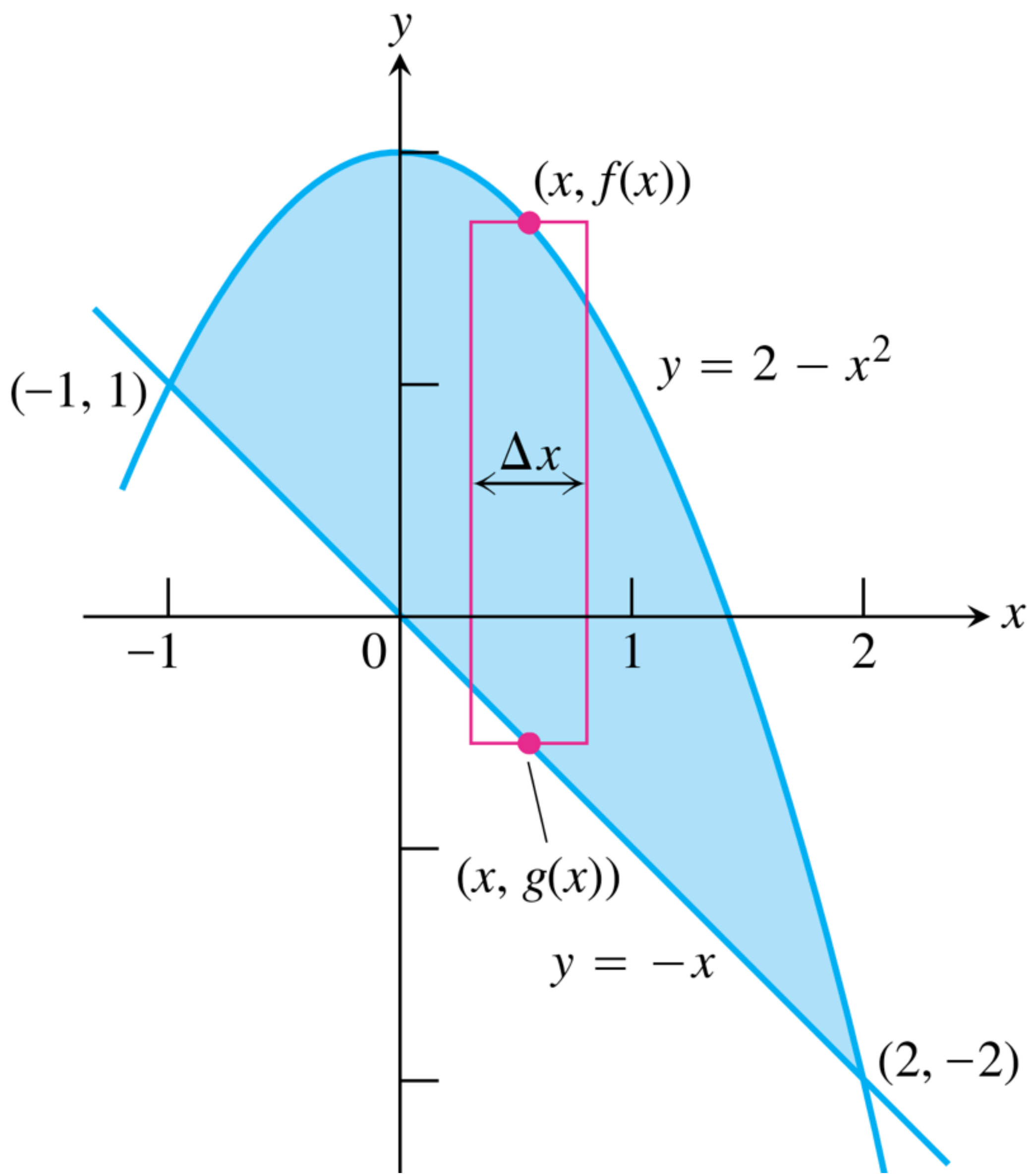
ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 15ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

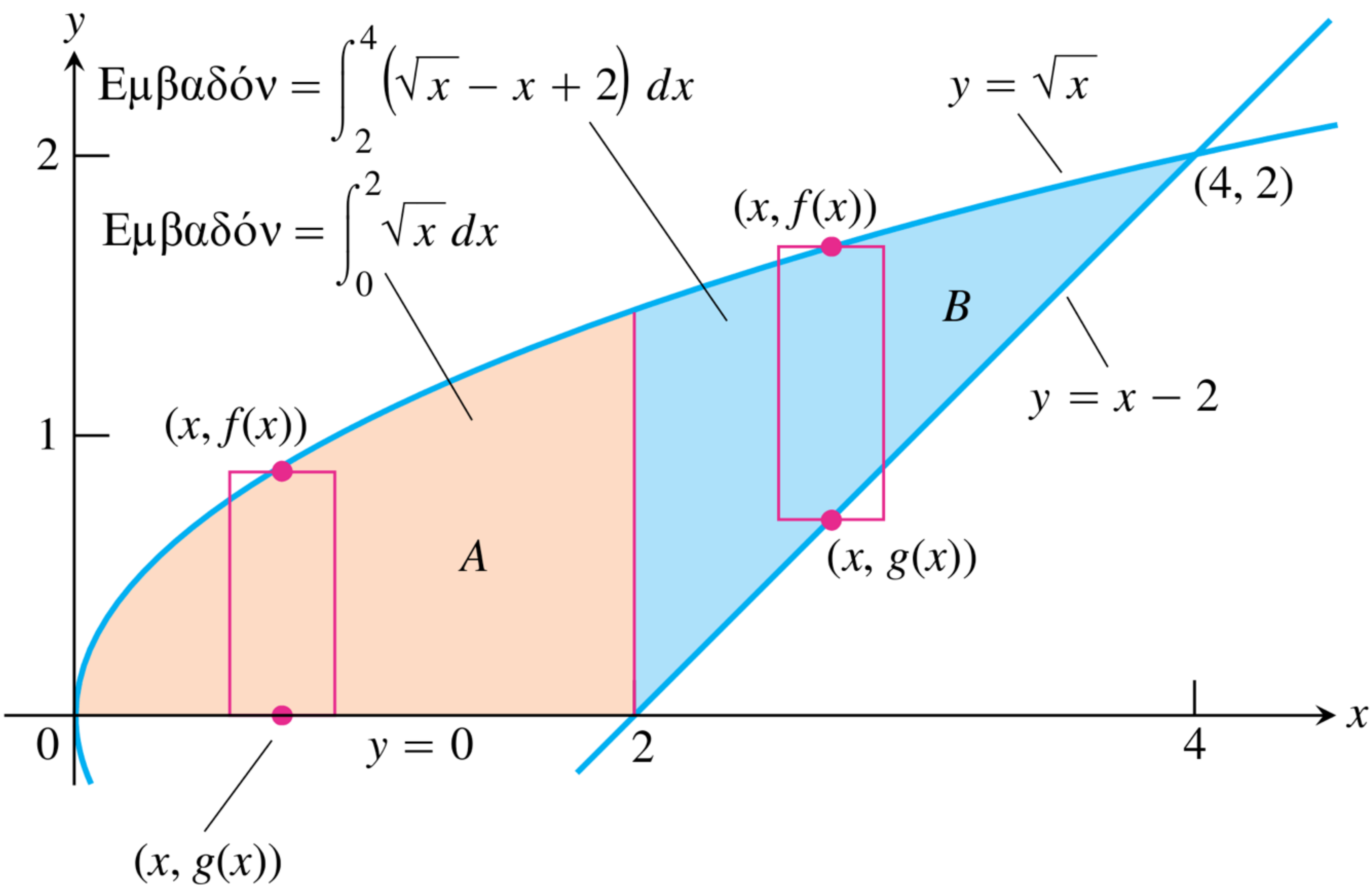
Ολοκληρώματα μεταξύ τεμνόμενων καμπυλών

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = 2 - x^2$ και την ευθεία $y = -x$.

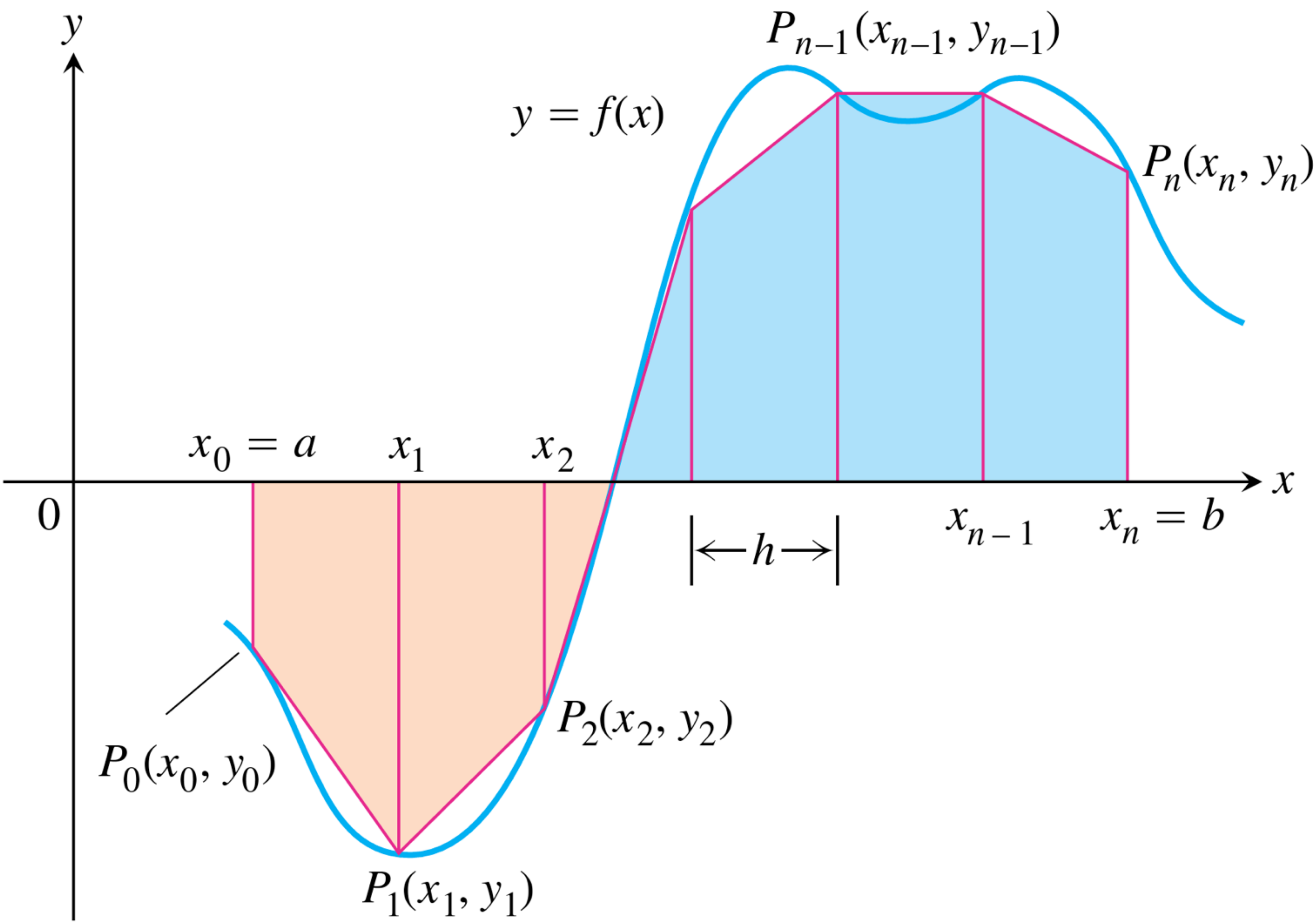


Ολοκληρώματα μεταξύ τεμνόμενων καμπυλών

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου στο πρώτο τεταρτημόριο που φράσσεται από πάνω από την $y = \sqrt{x}$, και από κάτω από τον άξονα x και την ευθεία $y = x - 2$.



Αριθμητική ολοκλήρωση



Κανόνας του Τραπεζίου

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-2} + y_{n-1})h + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h \\
&= h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) \\
&= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n),
\end{aligned}
$$

όπου

$$
y_0 = f(a), \qquad y_1 = f(x_1), \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = f(x_{n-1}), \qquad y_n = f(b).
$$

Κανόνας του Τραπεζίου

$$T = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-2} + y_{n-1})h + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h$$
$$= h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$
$$= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n),$$

όπου

$$y_0 = f(a), \qquad y_1 = f(x_1), \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = f(x_{n-1}), \qquad y_n = f(b).$$

Ο κανόνας του τραπεζίου

Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ με την ποσότητα

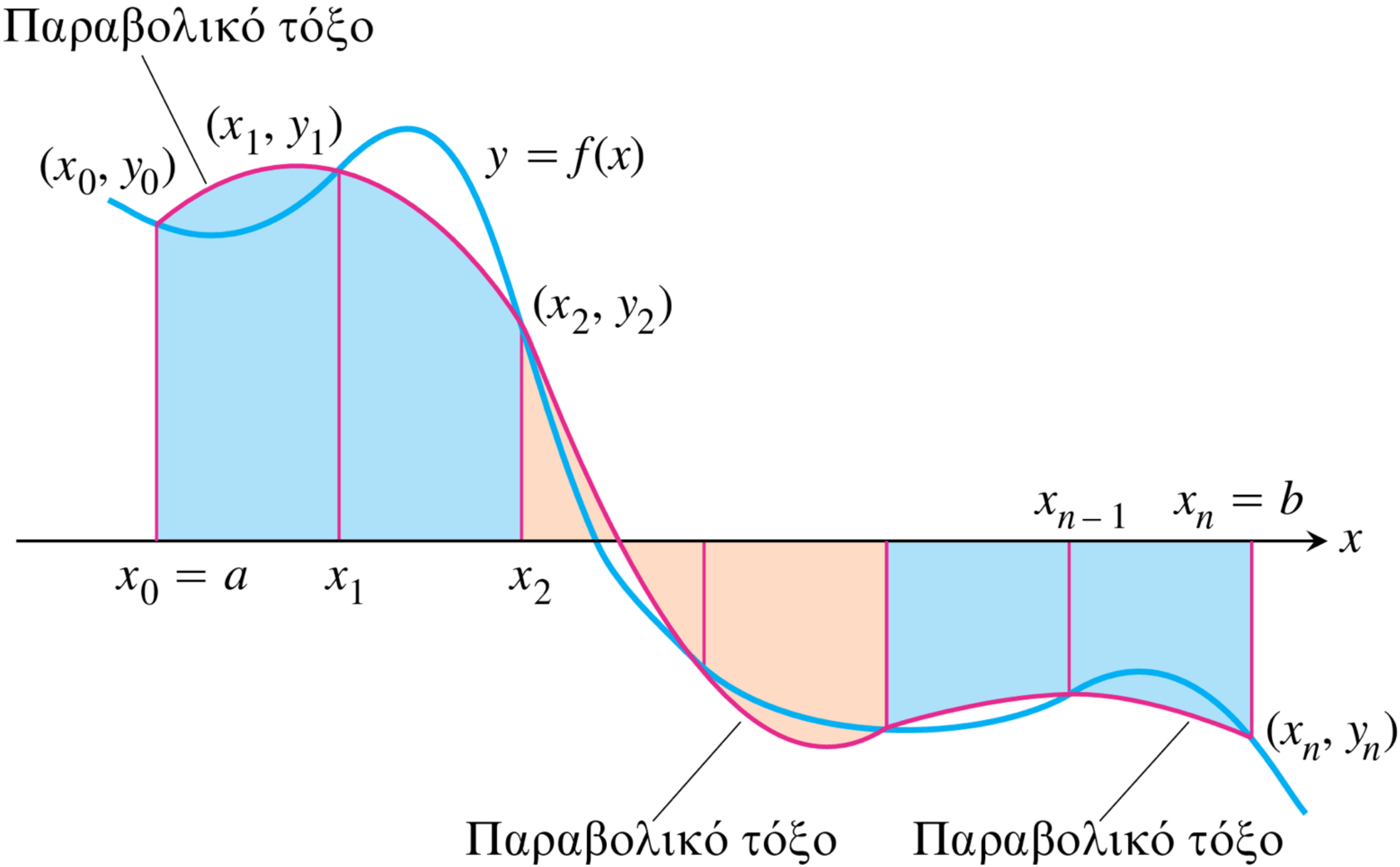
$$\boxed{T = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right).}$$

Οι αριθμοί y είναι οι τιμές της f στα σημεία διαμερίσεως

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \ \ldots, \ x_{n-1} = a + (n-1)h, \quad x_n = b,$$

όπου $h = (b - a)/n$.

Προσέγγιση με παραβολικό τόξο



Προσέγγιση με παραβολικό τόξο

Το ολοκλήρωμα του πολυωνύμου δευτέρου βαθμού $y = Ax^2 + Bx + C$ (Σχήμα 4.28) από $x = -h$ έως $x = h$ ισούται με

$$\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\, dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad (2)$$

Κανόνας του Simpson

Υπολογίζουμε προσεγγιστικά το $\int_a^b f(x)\, dx$, μέσω της έκφρασης

$$\boxed{S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\,.}$$

Οι αριθμοί y είναι οι τιμές της f στα σημεία διαμέρισης

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = a + (n-1)h, \quad x_n = b\,.$$

Ο αριθμός n είναι άρτιος, και ισχύει $h = (b - a)/n$.

Παράδειγμα

Πίνακας 4.8 Προσεγγίσεις του $\ln 2 = \int_1^2 (1/x)\,dx$ μέσω του κανόνα του τραπεζίου (T_n) και του κανόνα του Simpson (S_n).

n	T_n	$\lvert\text{Σφάλμα}\rvert$ μικρότερο από . . .	S_n	$\lvert\text{Σφάλμα}\rvert$ μικρότερο από ...
10	0,6937714032	0,0006242227	0,6931502307	0,0000030502
20	0,6933033818	0,0001562013	0,6931473747	0,0000001942
30	0,6932166154	0,0000694349	0,6931472190	0,0000000385
40	0,6931862400	0,0000390595	0,6931471927	0,0000000122
50	0,6931721793	0,0000249988	0,6931471856	0,0000000050
100	0,6931534305	0,0000062500	0,6931471809	0,0000000004

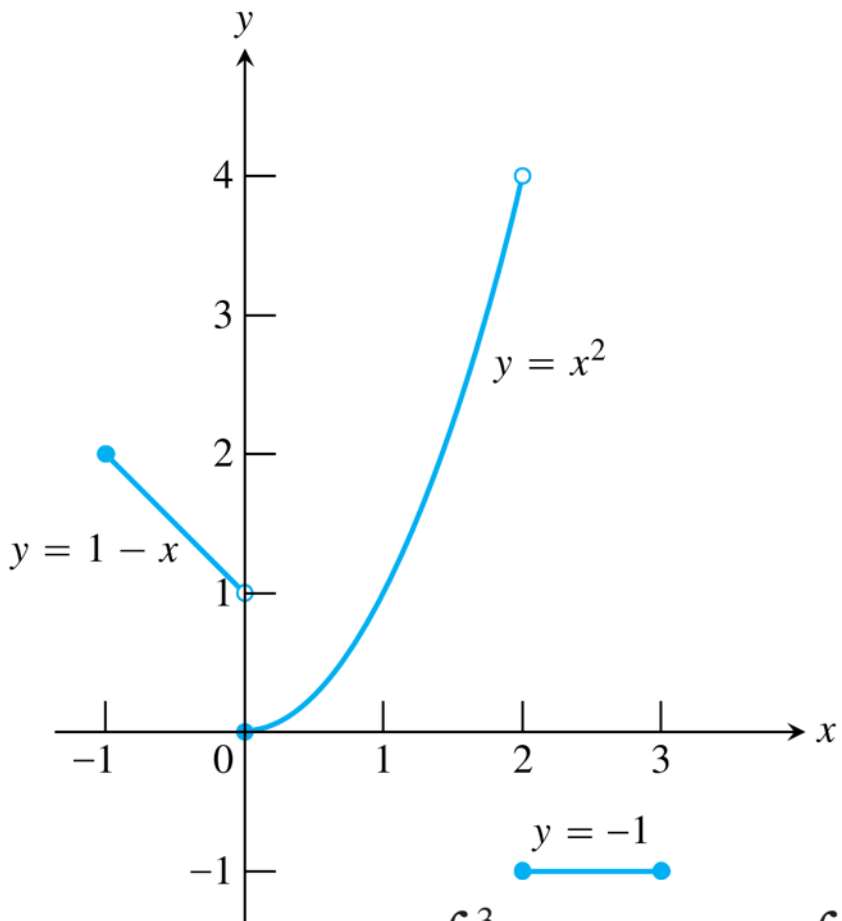
Τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις

Αν και το κύριο ενδιαφέρον μας αφορά τις συνεχείς συναρτήσεις, σε πολλές εφαρμογές συναντούμε συναρτήσεις που είναι τμηματικά συνεχείς. Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι **τμηματικά συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα *I*** αν έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών στο I, αν τα όρια

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to c^+} f(x)$$

υπάρχουν και είναι πεπερασμένα σε κάθε σημείο του I, και αν τα κατάλληλα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι πεπερασμένα σε κάθε άκρο του I. Όλες οι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες.

Παράδειγμα



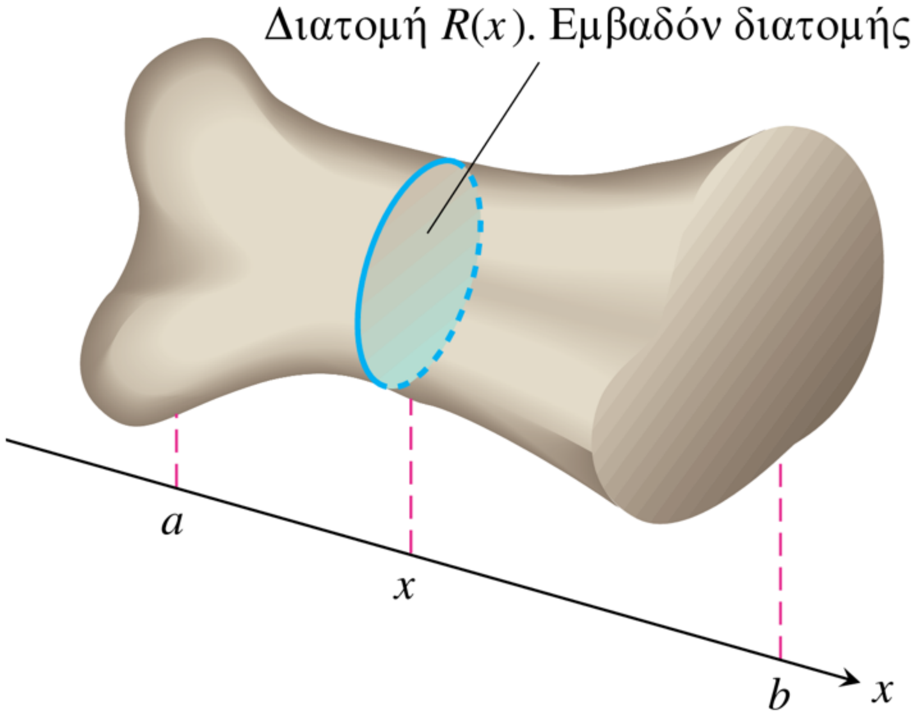
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -1 \le x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 2 \\ -1, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (1 - x)\,dx + \int_{0}^{2} x^2\,dx + \int_{2}^{3} (-1)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} + \left[-x\right]_{2}^{3}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{8}{3} - 1 = \frac{19}{6}.$$

Υπολογισμός όγκων



ΣΧΗΜΑ 5.1 Αν το εμβαδόν $A(x)$ της διατομής $R(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση του x, μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού ολοκληρώνοντας το $A(x)$ από a έως b.

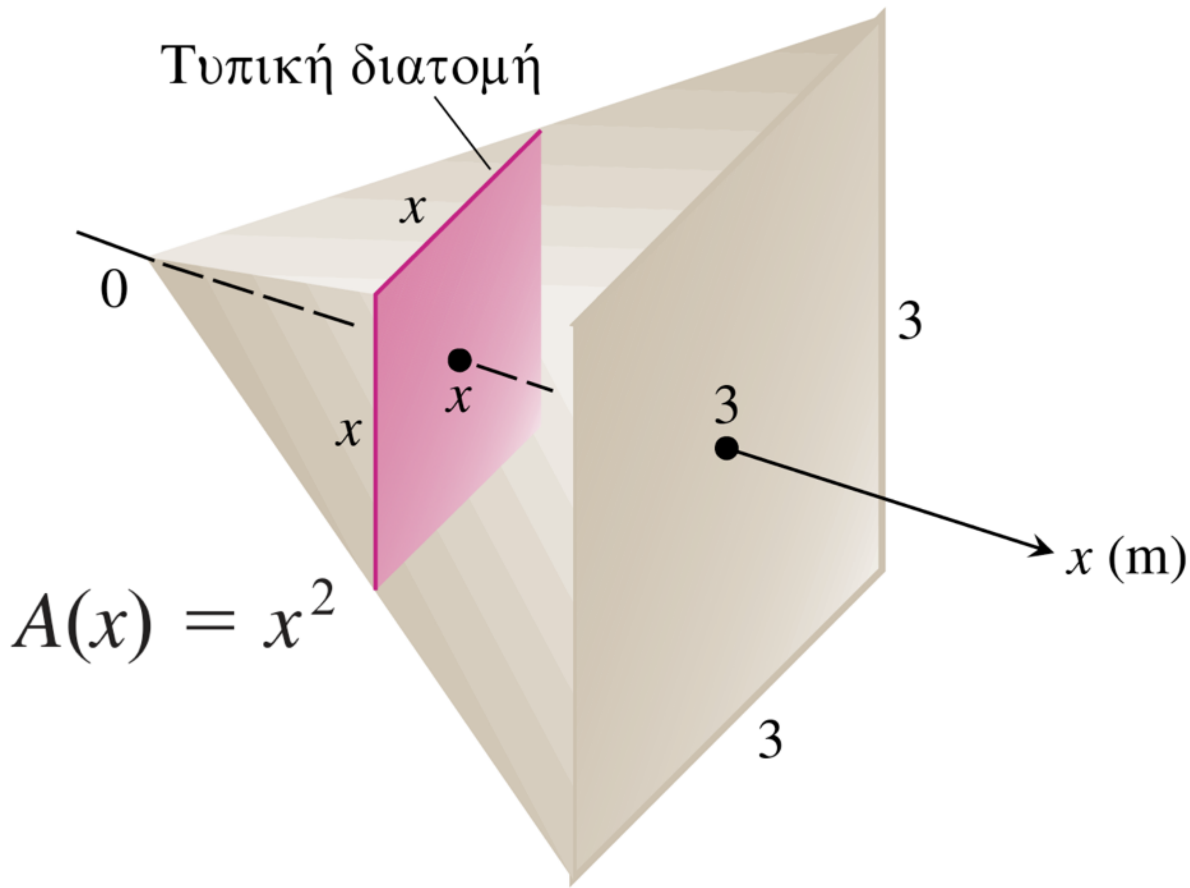
Ορισμός Όγκος στερεού

Ο **όγκος** στερεού με γνωστό και ολοκληρώσιμο εμβαδόν διατομής $A(x)$ από $x = a$ έως $x = b$ ισούται με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης A από a έως b,

$$V = \int_a^b A(x)\, dx\,.$$

Παράδειγμα

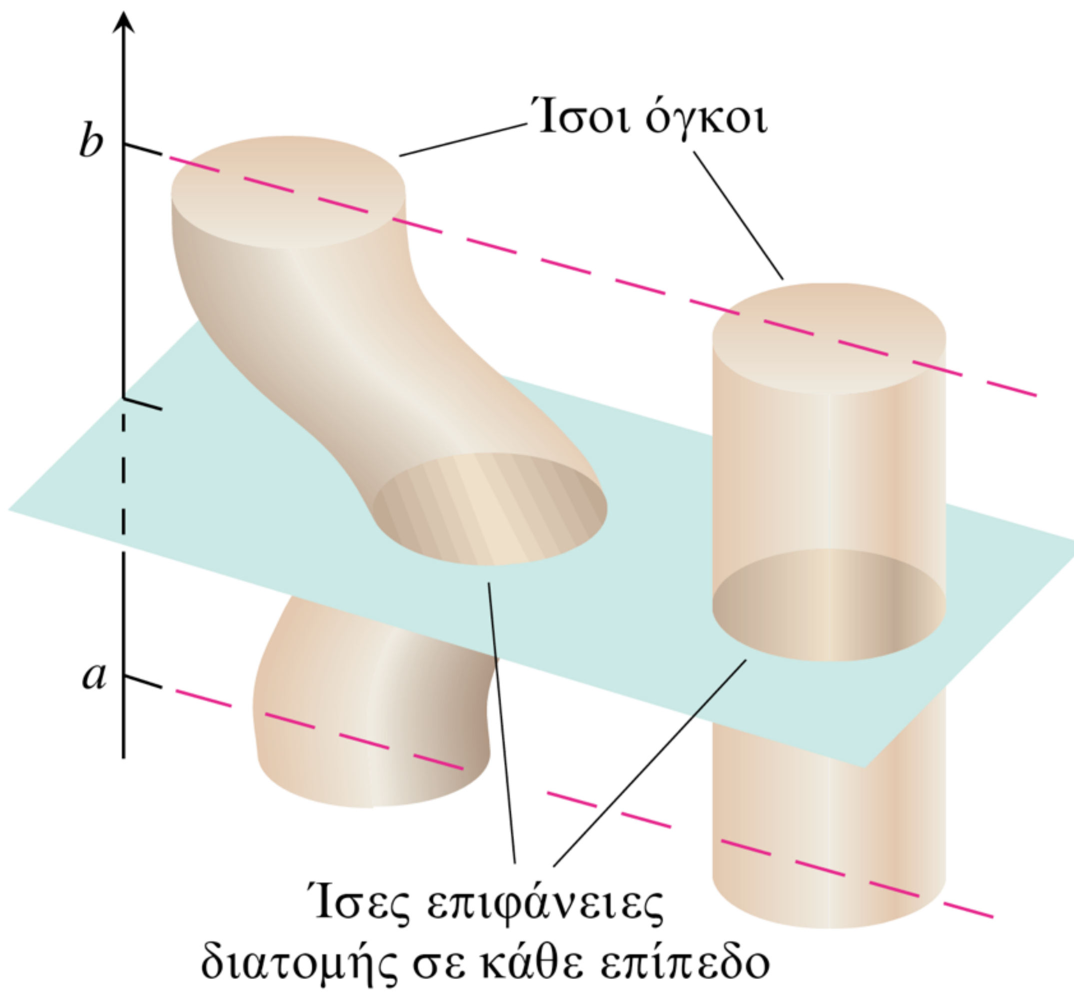
Μια πυραμίδα ύψους 3 m έχει τετράγωνη βάση πλευράς 3 m. Η διατομή της πυραμίδας σε απόσταση x m από την κορυφή της είναι ένα τετράγωνο πλευράς x m. Βρείτε τον όγκο της πυραμίδας.



$$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = 9 \text{ m}^3$$

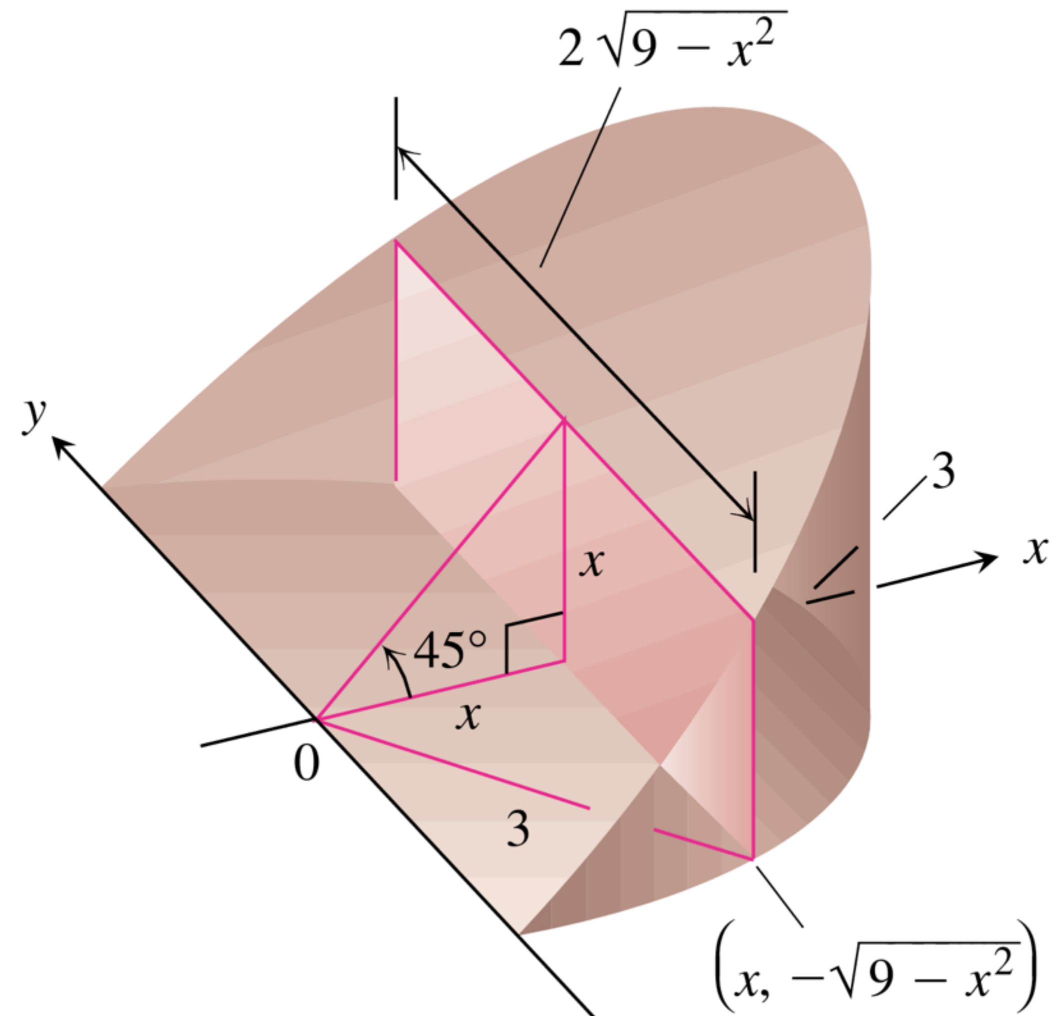
Θεώρημα του Cavalieri

Το θεώρημα του Cavalieri μάς λέει ότι στερεά που έχουν ίσο ύψος και ταυτόσημα εμβαδά διατομής σε κάθε ύψος, καταλαμβάνουν ίσους όγκους (Σχήμα 5.4). Αυτό έπεται αμέσως από τον ορισμό του όγκου, διότι τόσο η συνάρτηση εμβαδού διατομής $A(x)$ όσο και το διάστημα $[a, b]$ συμπίπτουν για τα δύο στερεά.



Παράδειγμα

Δύο επίπεδα τέμνουν έναν κύλινδρο ακτίνας 3, αποκόπτοντας από αυτόν τη σφηνοειδή βαθμίδα που φαίνεται στο Σχήμα 5.5. Το ένα επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα του κυλίνδρου. Το άλλο επίπεδο τέμνει το πρώτο υπό γωνία 45° στο κέντρο του κυλίνδρου. Υπολογίστε τον όγκο της σφηνοειδούς βαθμίδας.



Παράδειγμα

$$A(x) = (\text{ύψος})(\text{πλάτος}) = (x)\ \left(2\sqrt{9-x^2}\right)$$
$$= 2x\sqrt{9-x^2} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx$$

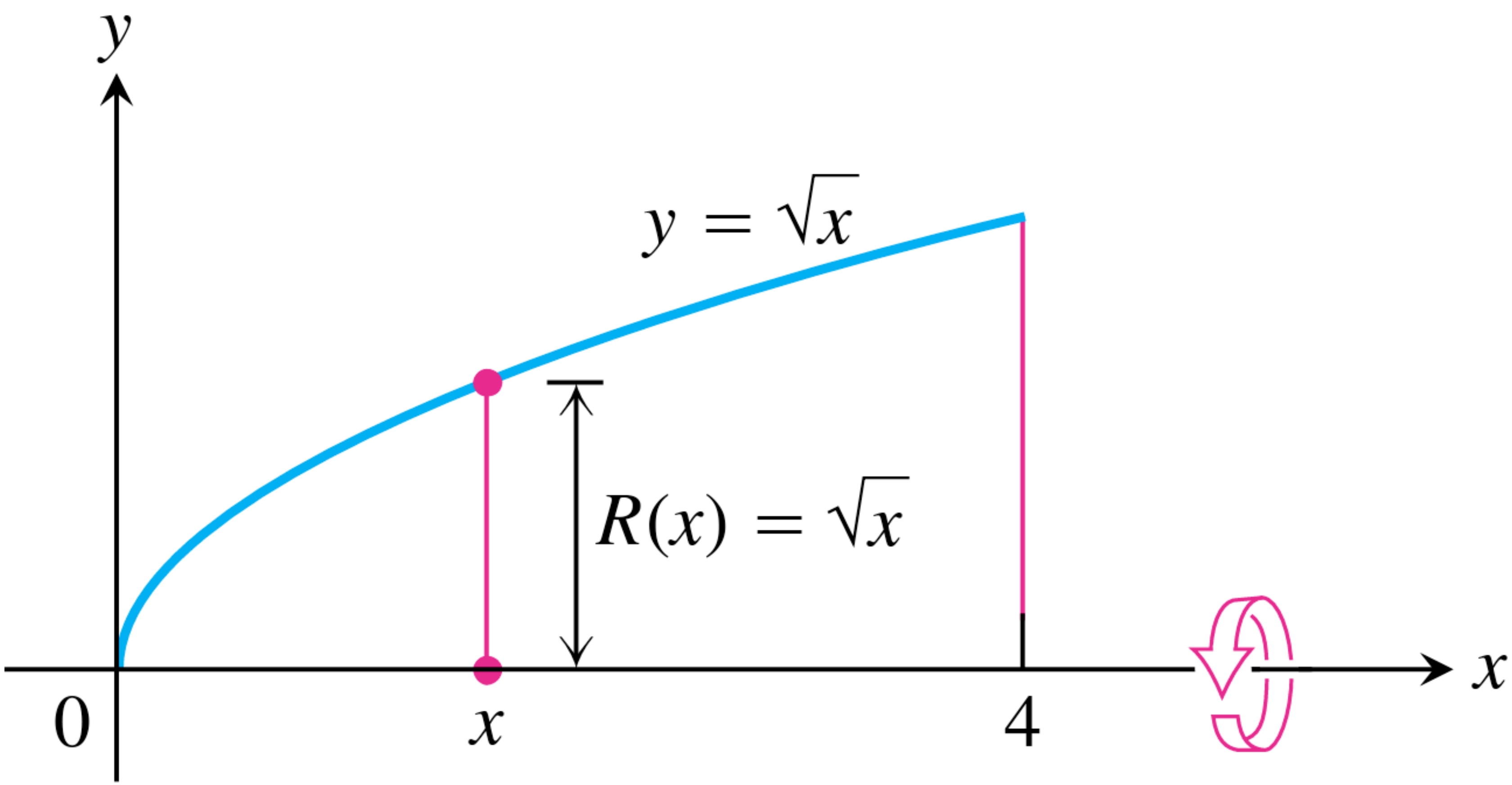
$$= -\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big]_0^3$$

Θέτουμε $u = 9 - x^2$, $du = -2x\,dx$, ολοκληρώνουμε, και εκφράζουμε πάλι ως προς x.

$$= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2}$$

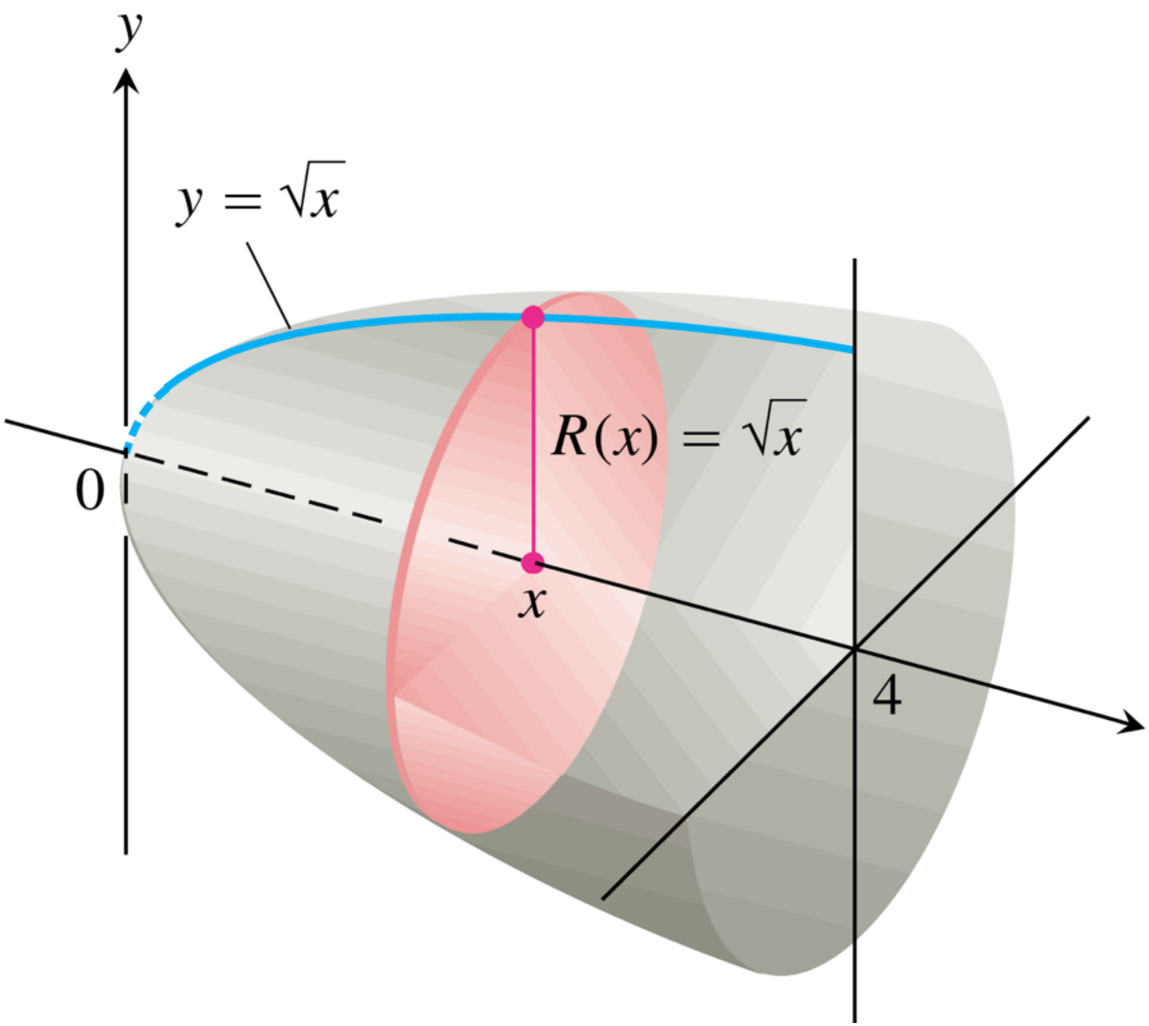
$$= 18 \text{ κυβικές μονάδες}$$

Στερεά εκ περιστροφής



$$A(x) = \pi(\text{ακτίνα})^2 = \pi[R(x)]^2.$$

Παράδειγμα



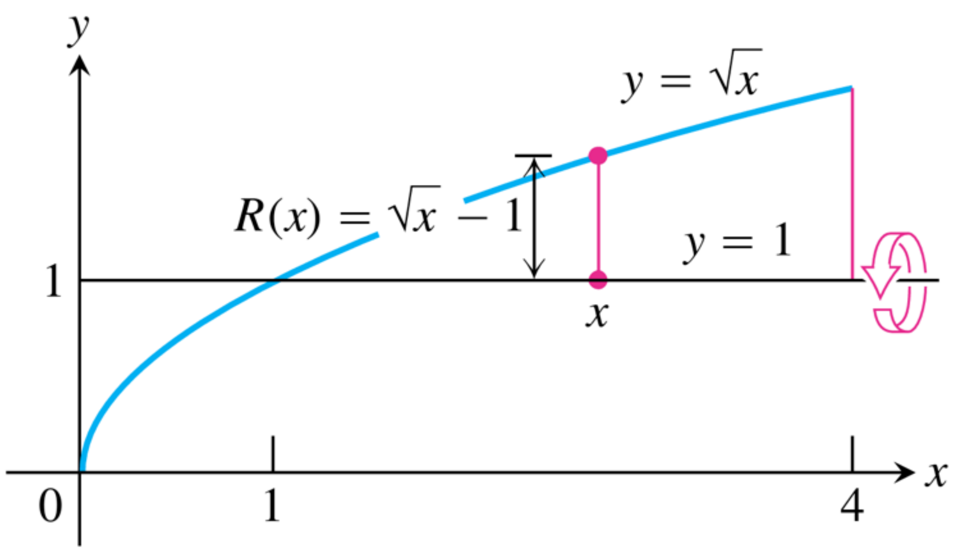
$$V = \int_a^b \pi [R(x)]^2 \, dx$$

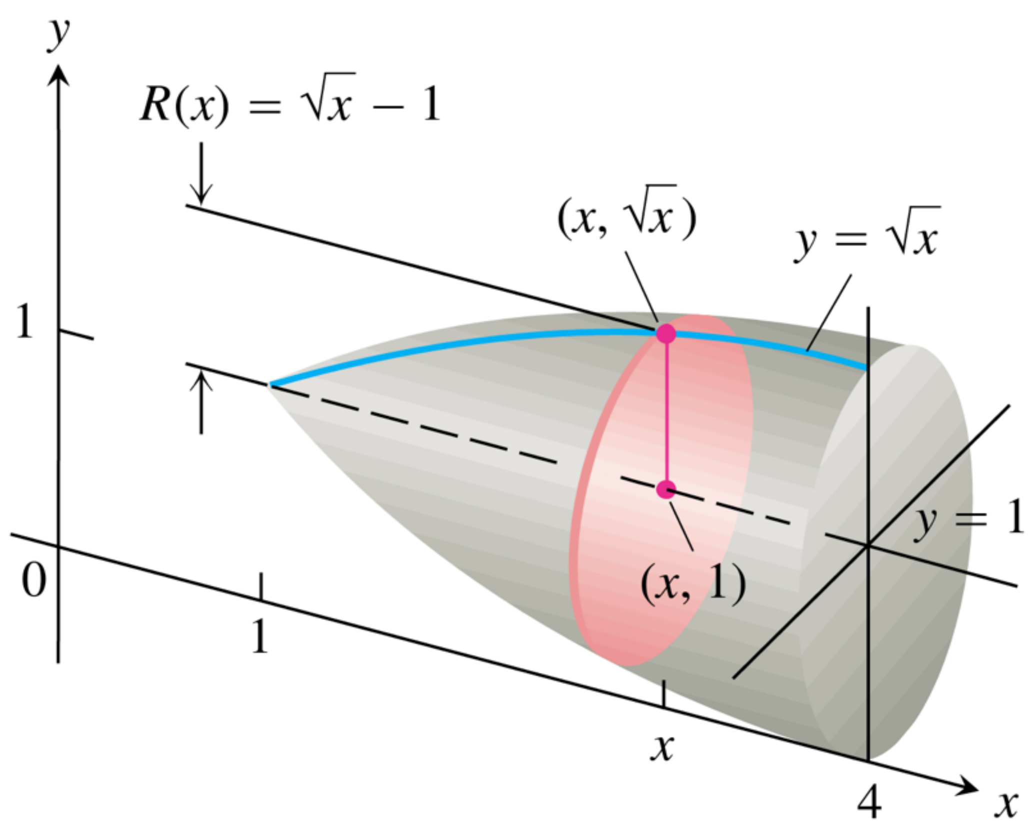
$$= \int_0^4 \pi [\sqrt{x}\,]^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \frac{x^2}{2} \Bigg]_0^4 = \pi \frac{(4)}{2} = 8\pi$$

Παράδειγμα

Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται περιστρέφοντας ως προς την ευθεία $y = 1$ το χωρίο που φράσσεται από την $y = \sqrt{x}$ και από τις ευθείες $y = 1$, $x = 4$.





Παράδειγμα

$$V = \int_1^4 \pi [R(x)]^2 \, dx$$

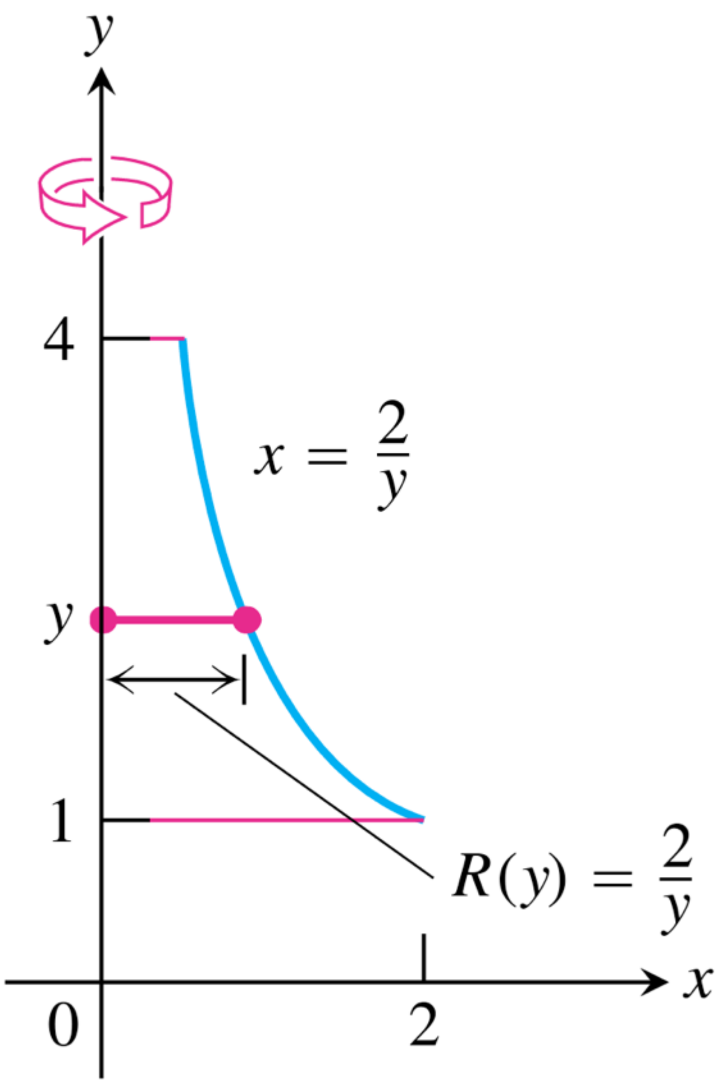
$$= \int_1^4 \pi \left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx$$

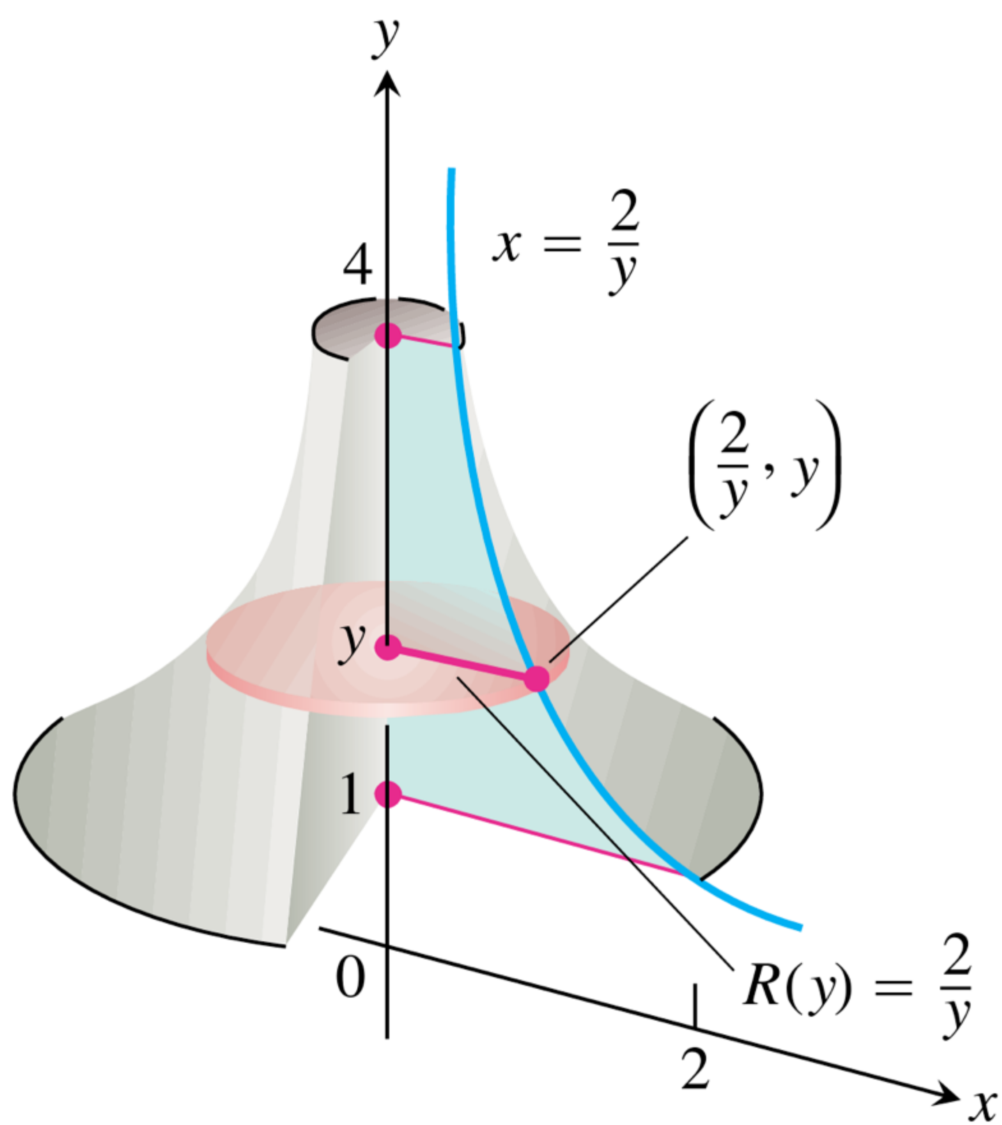
$$= \pi \int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right] dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + x \right]_1^4 = \frac{7\pi}{6}$$

Παράδειγμα

Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε ως προς τον άξονα y το χωρίο που περικλείεται από τον άξονα y και από την καμπύλη $x = 2/y$, $1 \le y \le 4$.





Παράδειγμα

$$V = \int_1^4 \pi [R(y)]^2 \, dy$$

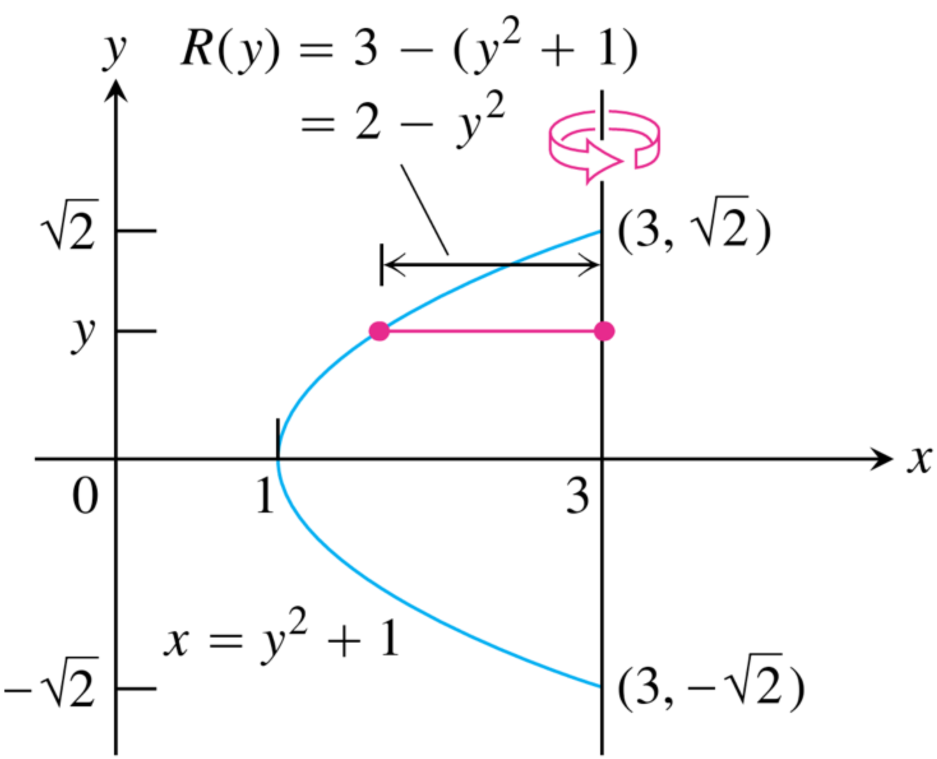
$$= \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy \qquad R(y) = \frac{2}{y}$$

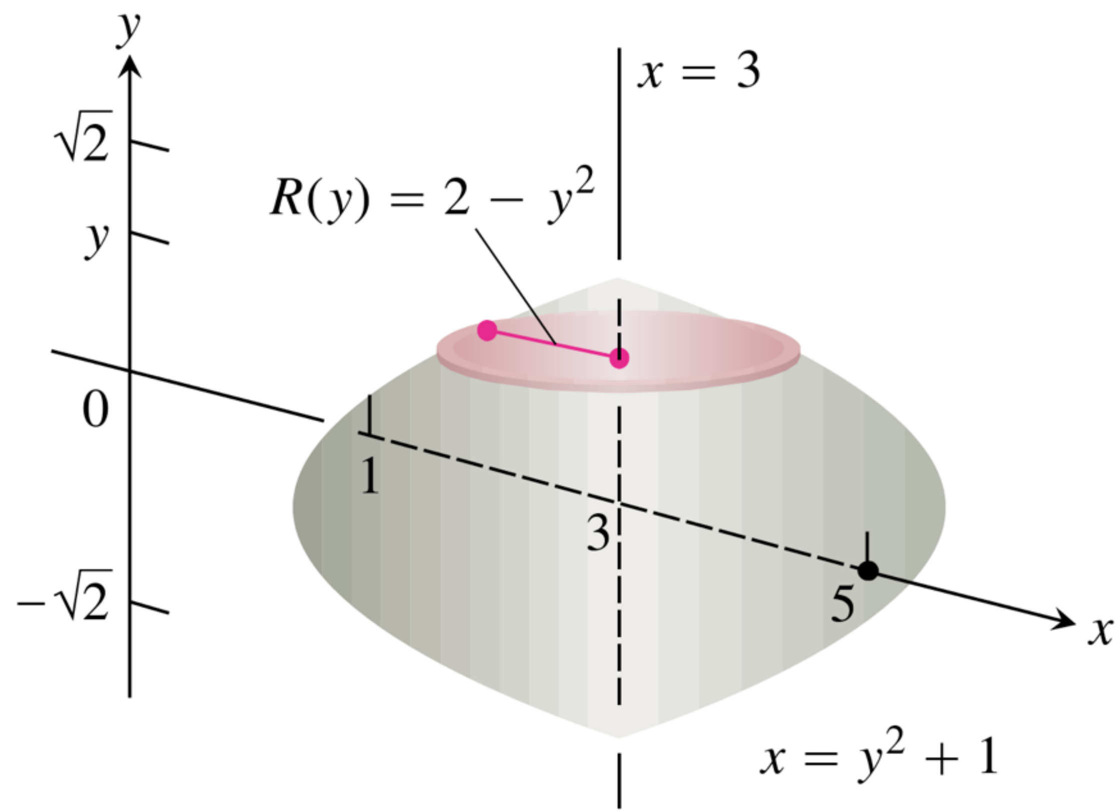
$$= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} \, dy = 4\pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi \left[\frac{3}{4}\right]$$

$= 3\pi$ κυβικές μονάδες

Παράδειγμα

Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε ως προς την ευθεία $x = 3$ το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $x = y^2 + 1$ και από την ευθεία $x = 3$.





Παράδειγμα

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[R(y)]^2\, dy$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2 - y^2]^2\, dy \qquad R(y) = 3 - (y^2 + 1) = 2 - y^2$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4]\, dy$$

$$= \pi \left[4y - \frac{4}{3} y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15} \text{ κυβικές μονάδες.}$$