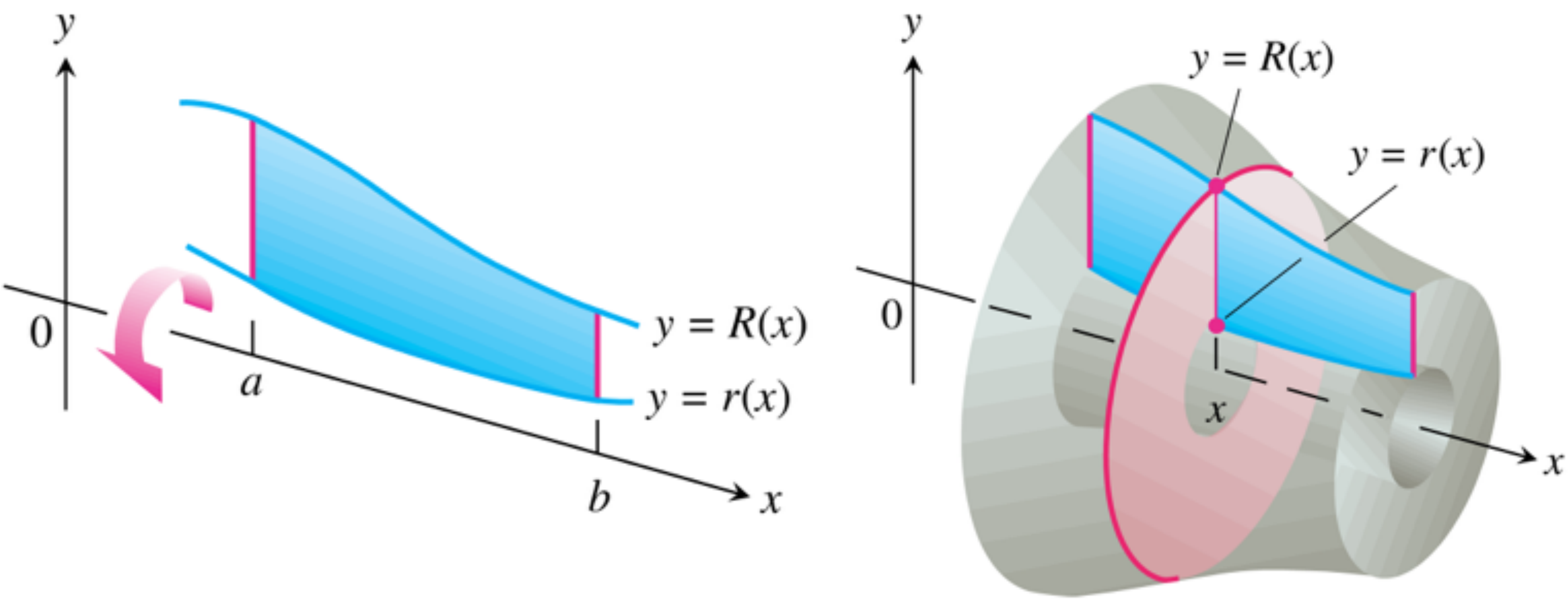
ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 16ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

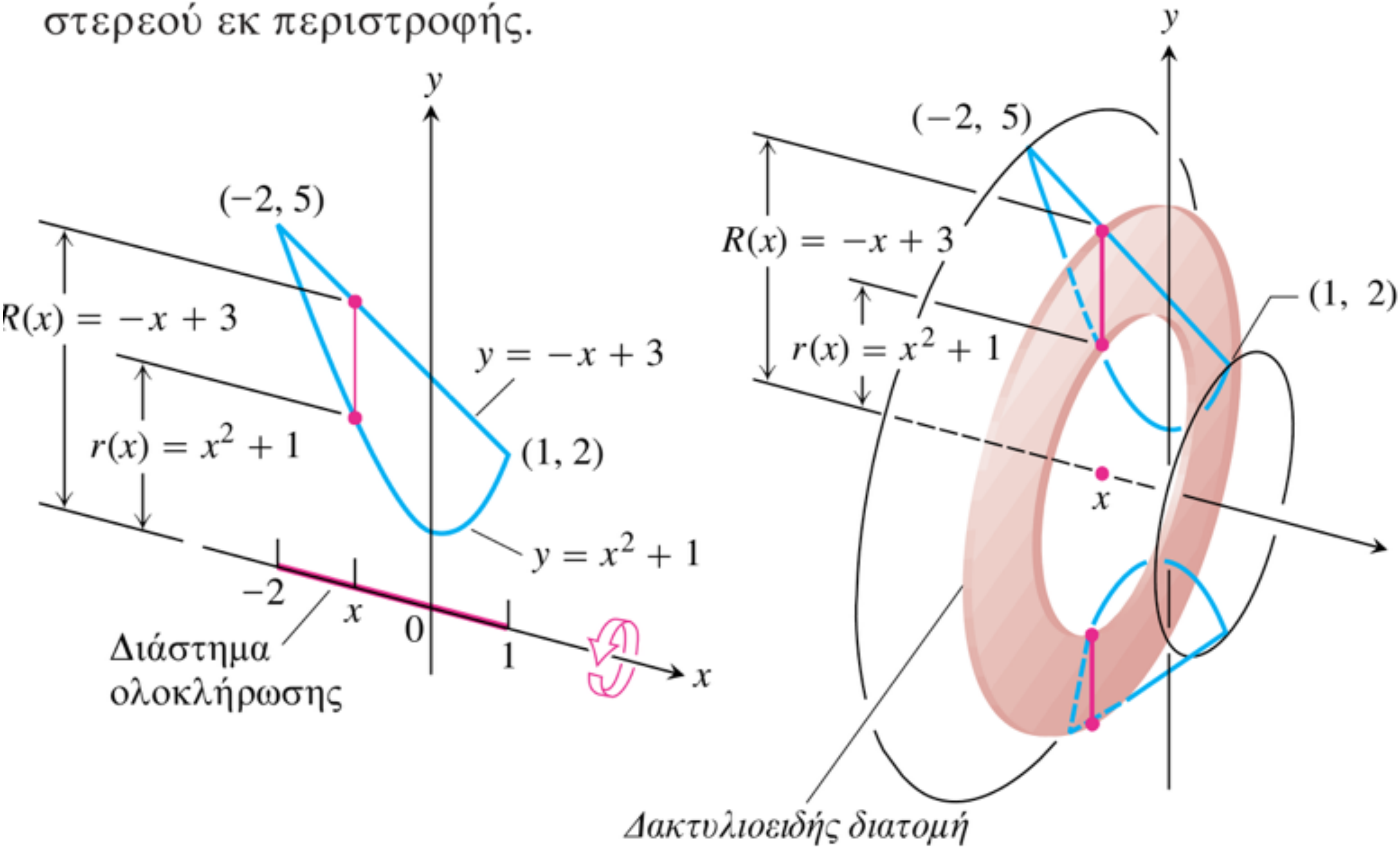
Δακτυλιοειδείς διατομές



$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$

Δακτυλιοειδείς διατομές

Το χωρίο που φράσσεται από την καμπύλη $y = x^2 + 1$ και την ευθεία $y = -x + 3$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα x. Βρείτε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής.



Παράδειγμα

Εξωτερική ακτίνα: $R(x) = -x + 3$

Εσωτερική ακτίνα: $r(x) = x^2 + 1$

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx$$

Οι τιμές που βρήκαμε στα βήματα 2 και 3

$$= \int_{-2}^{1} \pi((-x+3)^2 - (x^2+1)^2)\,dx$$

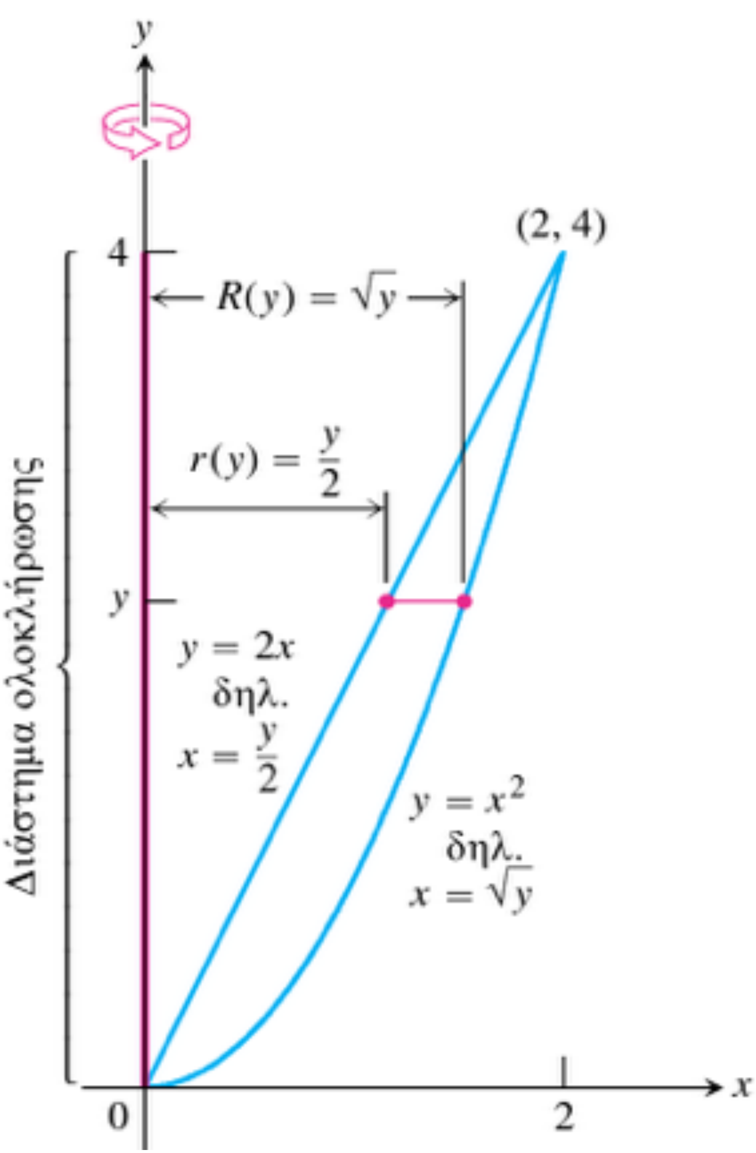
Υψώνουμε στο τετράγωνο και αναδιατάσσουμε

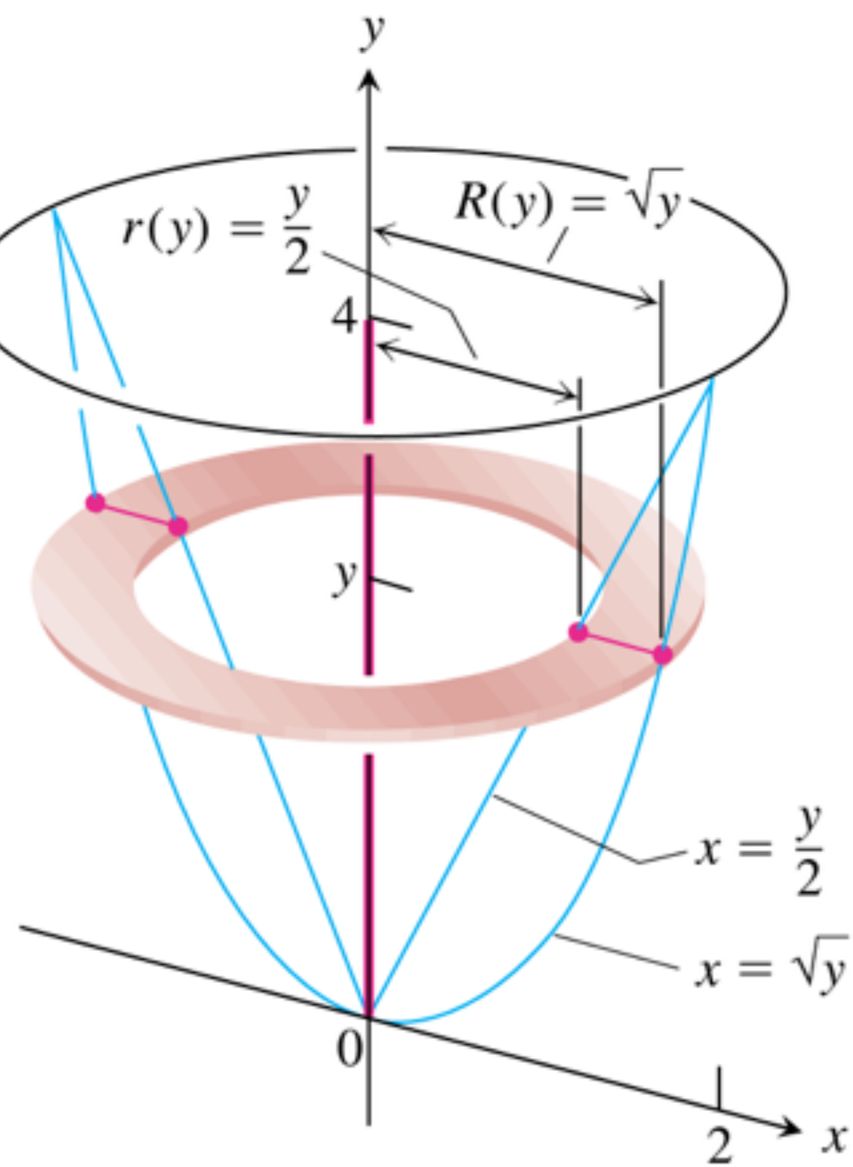
$$= \int_{-2}^{1} \pi(8 - 6x - x^2 - x^4)\,dx$$

$$= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{117\pi}{5}$$ κυβικές μονάδες.

Παράδειγμα

Το χωρίο που φράσσεται από την παραβολή $y = x^2$ και την ευθεία $y = 2x$ στο πρώτο τεταρτημόριο περιστρέφεται ως προς τον άξονα y. Βρείτε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.





Παράδειγμα

$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\, dy$$

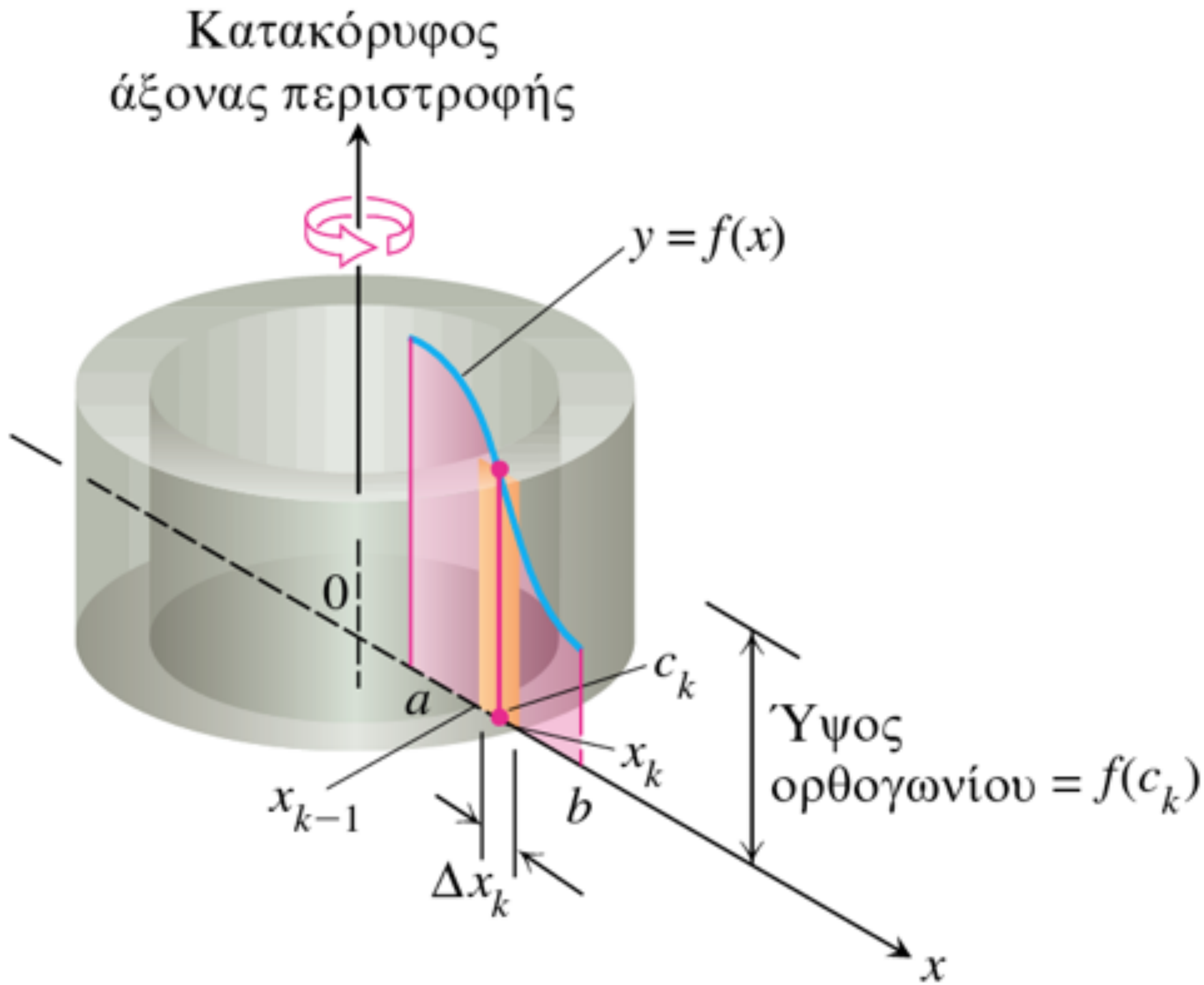
$$= \int_0^4 \pi\left(\left[\sqrt{y}\right]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right) dy$$

Οι τιμές που βρήκαμε στα βήματα 2 και 3

$$= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8\pi}{3} \text{κυβικές μονάδες.}$$

(στο βιβλίο υπάρχει τυπογραφικό στο αποτέλεσμα)

Κυλινδρικοί φλοιοί



$$\Delta V_k = 2\pi \times \text{μέση ακτίνα φλοιού} \times \text{ύψος φλοιού} \times \text{πάχος}$$

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

Κυλινδρικοί φλοιοί

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum \Delta V_k$$

$$= \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix} \text{ακτίνα} \\ \text{φλοιού} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ύψος} \\ \text{φλοιού} \end{pmatrix} dx$$

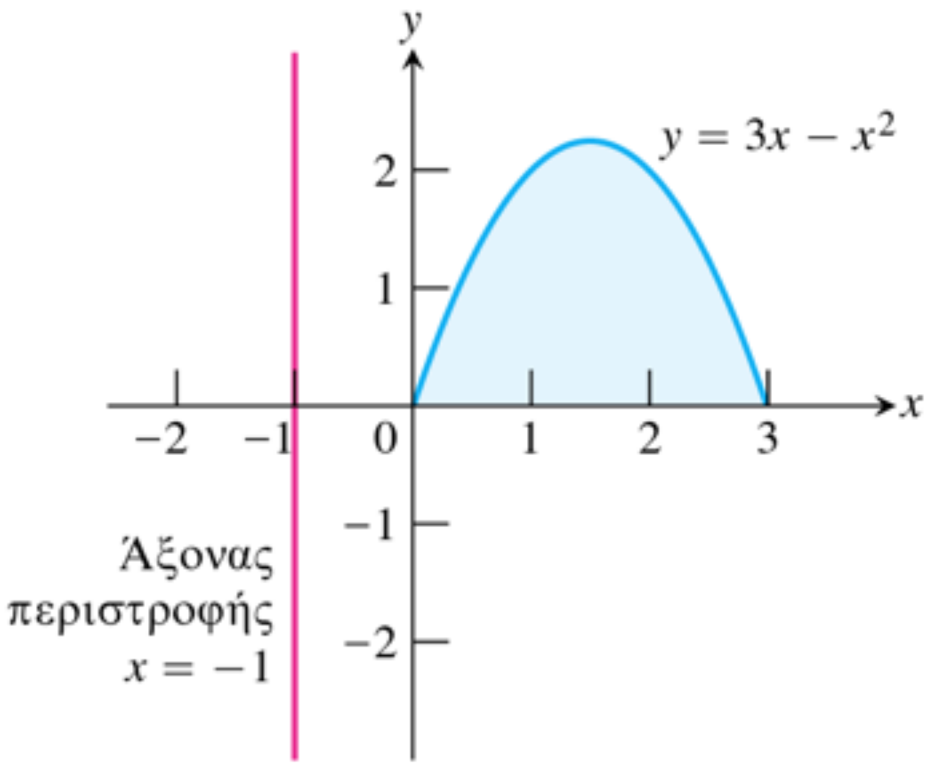
Τύπος των φλοιών για περιστροφή ως προς κατακόρυφο άξονα

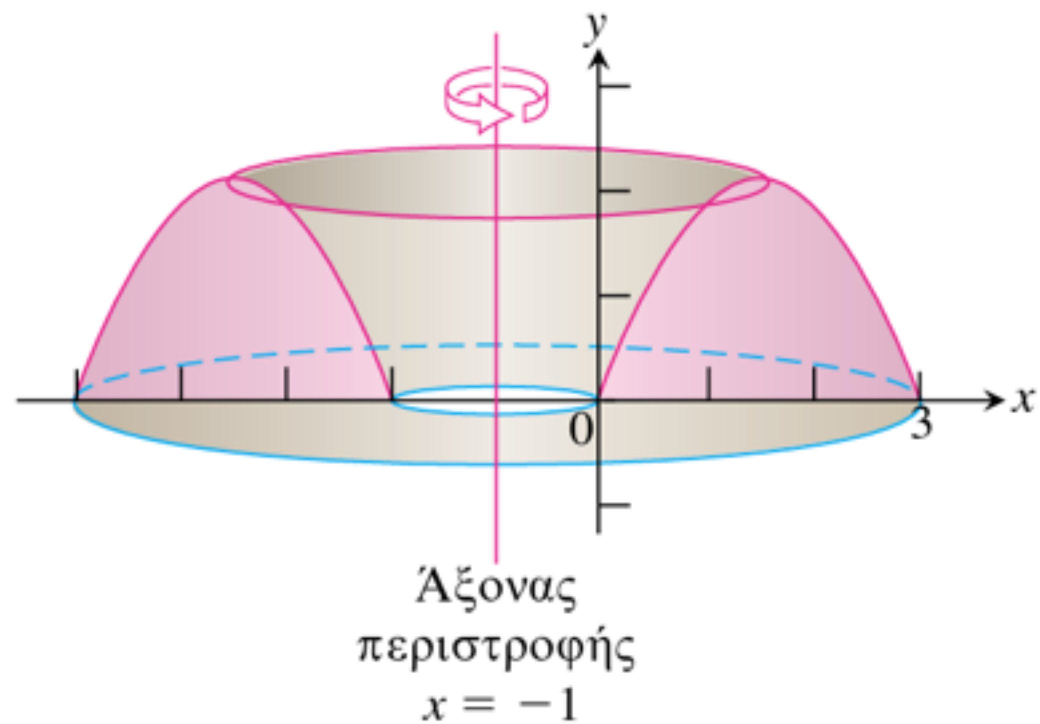
Ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή ως προς κατακόρυφο άξονα του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα x και από τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $y = f(x) \geq 0$, $0 \leq a \leq x \leq b$, ισούται με

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix} \text{ακτίνα} \\ \text{φλοιού} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ύψος} \\ \text{φλοιού} \end{pmatrix} dx.$$

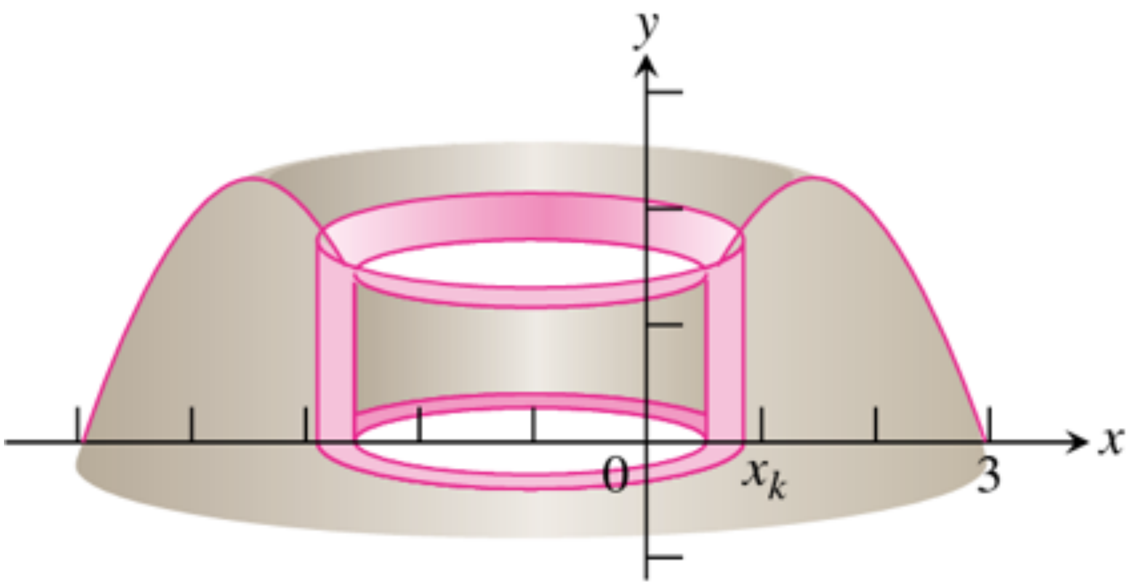
Παράδειγμα

Το χωρίο που περικλείεται από τον άξονα x και από την παραβολή $y = f(x) = 3x - x^2$ περιστρέφεται ως προς την ευθεία $x = -1$ παράγοντας ένα στερεό (Σχήματα 5.15 και 5.16), του οποίου ζητείται ο όγκος.





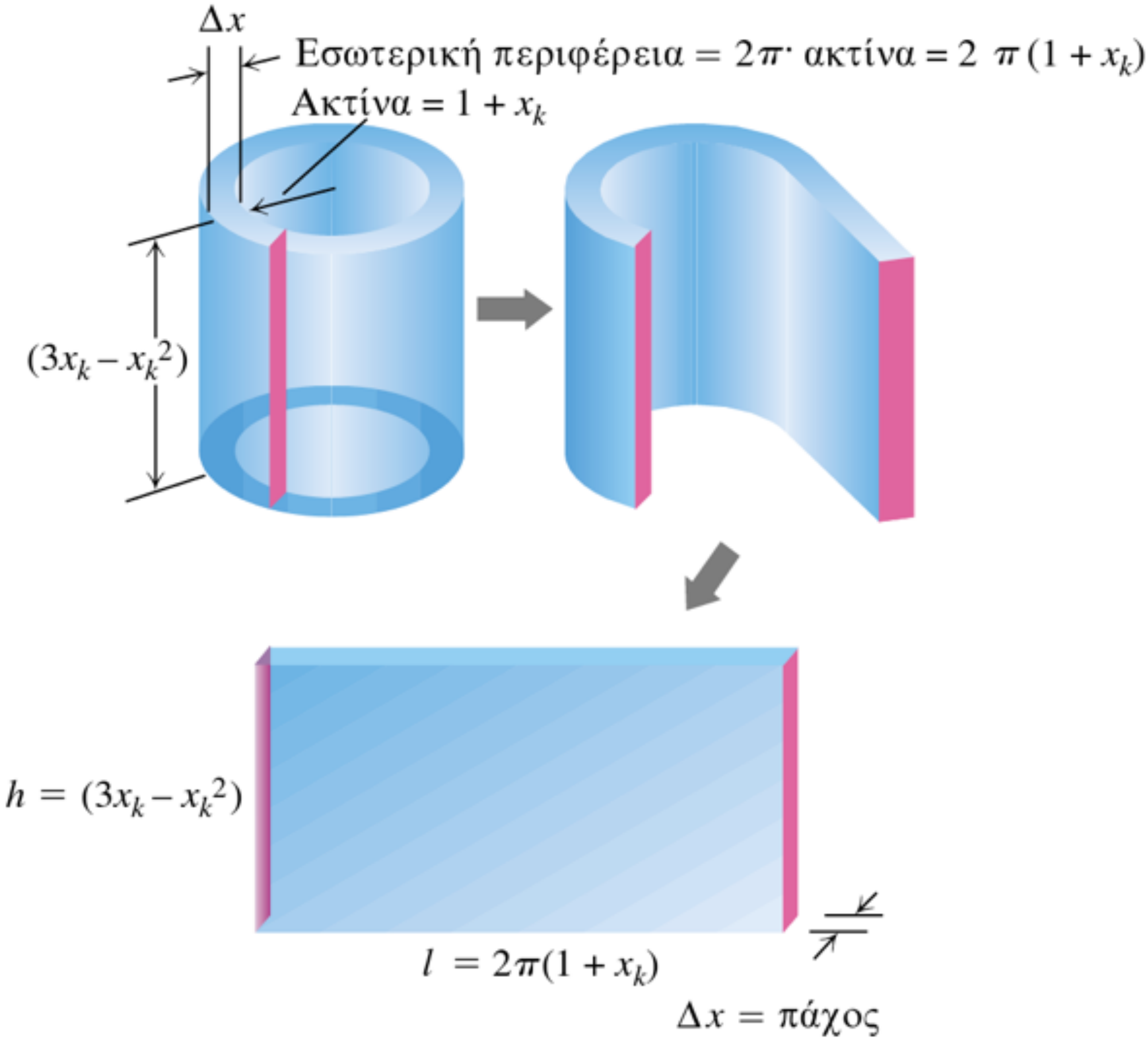
Παράδειγμα



ΣΧΗΜΑ 5.17 Αποκόπτουμε λεπτούς κυλινδρικούς φλοιούς, από μέσα προς τα έξω. Κάθε φλοιός βρίσκεται στη θέση x_k μεταξύ 0 και 3 και έχει πάχος Δx.

$$
\begin{aligned}
\Delta V &\approx \text{μήκος} \times \text{ύψος} \times \text{πάχος} \\
&\approx 2\pi(1 + x_k) \cdot (3x_k - x_k^2) \cdot \Delta x.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα



Δx
Εσωτερική περιφέρεια = 2π· ακτίνα = 2 π (1 + x_k)
Ακτίνα = 1 + x_k
(3x_k − x_k^2)
h = (3x_k − x_k^2)
l = 2π(1 + x_k)
Δx = πάχος

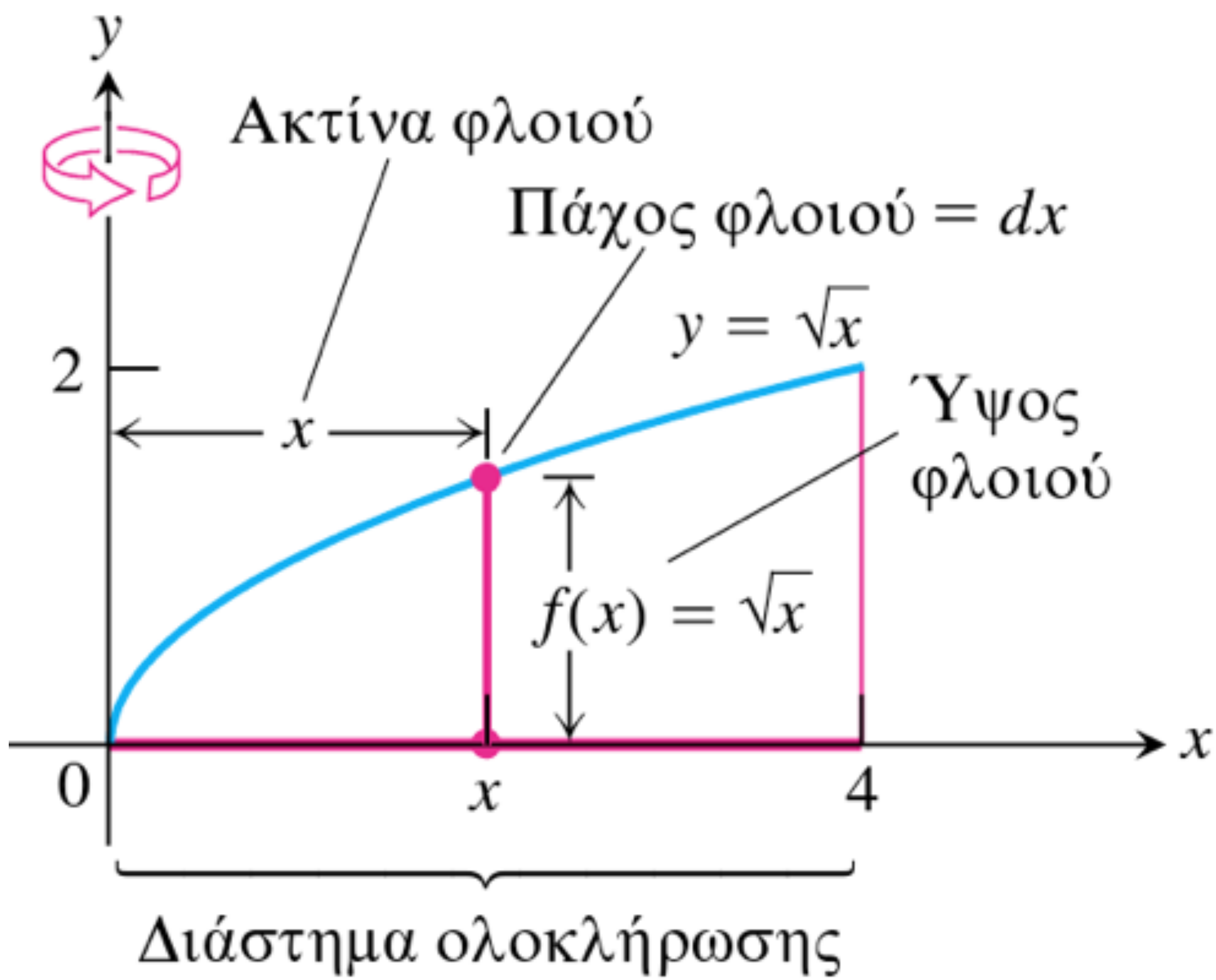
Παράδειγμα

Βήμα 3: Αν αθροίσουμε τους όγκους των επιμέρους κυλινδρικών φλοιών στο διάστημα $0 \le x \le 3$, προκύπτει ένα άθροισμα Riemann $\Sigma\, 2\pi(x_k + 1)(3x_k - x_k^{\,2})\, \Delta x$. Αν τώρα πάρουμε το όριο καθώς το πάχος $\Delta x \to 0$, προκύπτει το ολοκλήρωμα

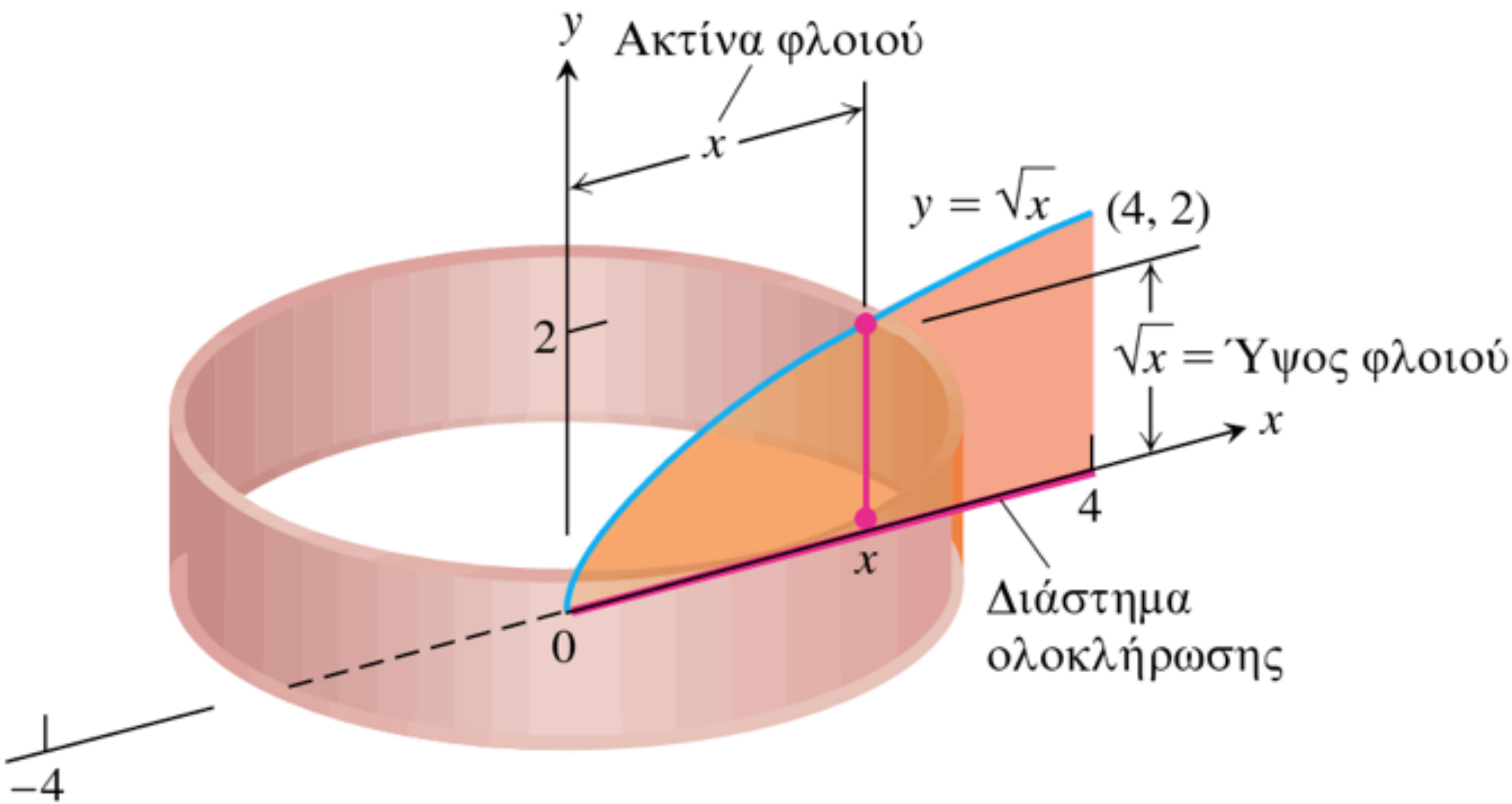
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^3 2\pi(x+1)(3x - x^2)\, dx \\
&= \int_0^3 2\pi(3x^2 + 3x - x^3 - x^2)\, dx \\
&= 2\pi \int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3)\, dx \\
&= 2\pi \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^3 \\
&= \frac{45\pi}{2} \text{ κυβικές μονάδες.}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

Το χωρίο που φράσσεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x}$, τον άξονα x, και την ευθεία $x = 4$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα y ώστε να παραγάγει ένα στερεό, του οποίου ζητείται ο όγκος.



Παράδειγμα

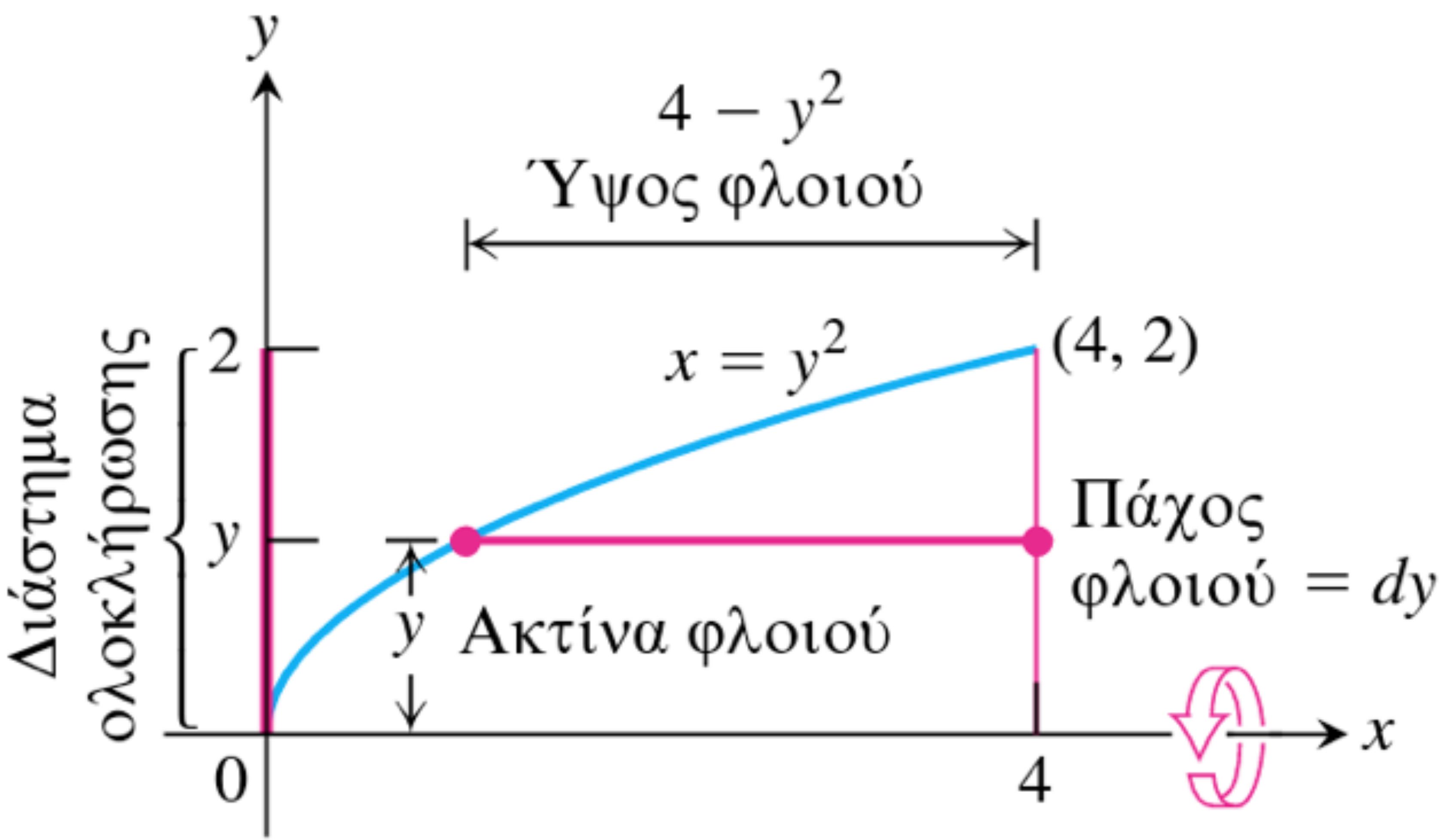


$$V = \int_0^4 2\pi(x)(\sqrt{x})\,dx$$

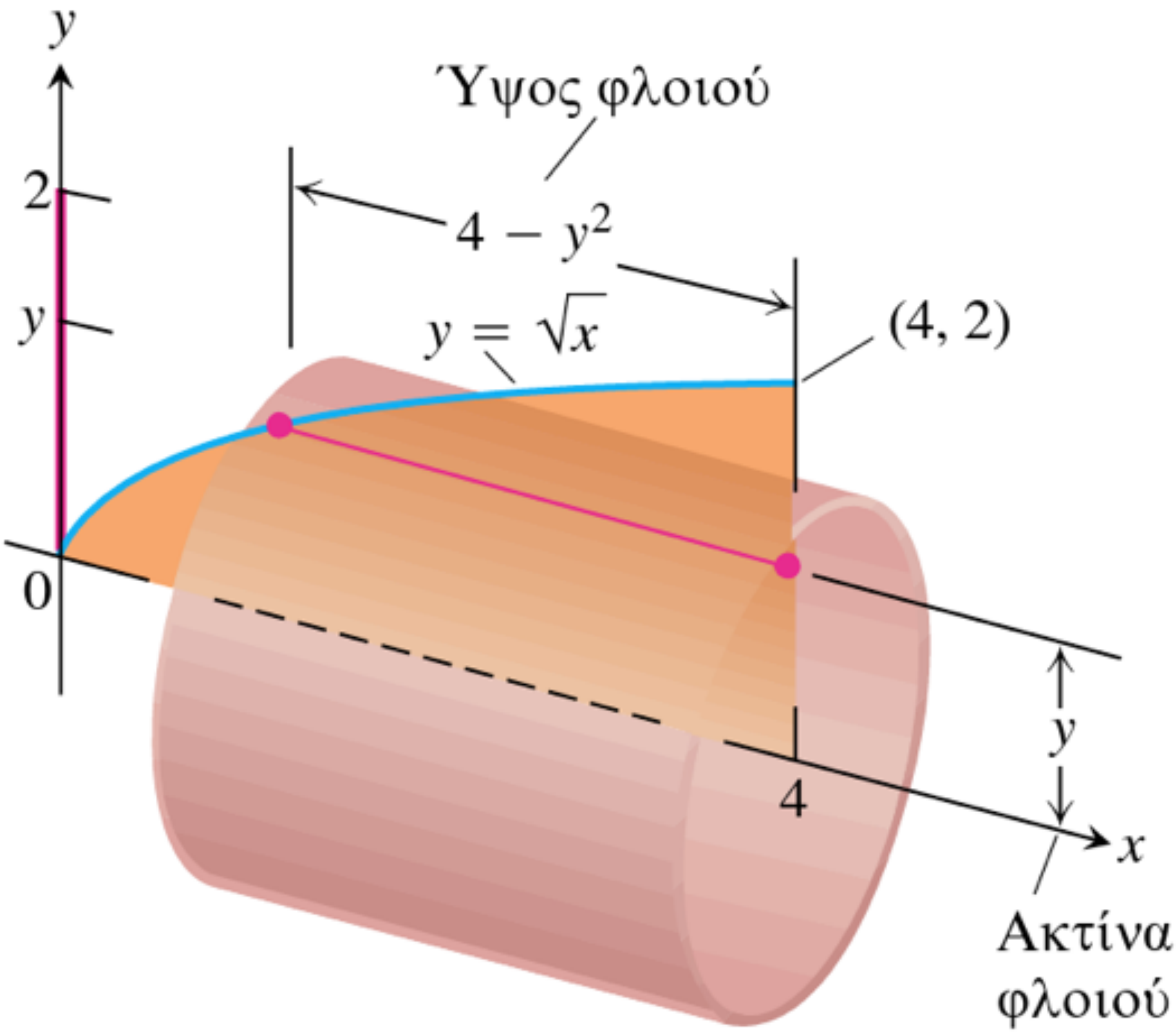
$$= 2\pi \int_a^b x^{3/2}dx - 2\pi \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^4 - \frac{128\pi}{5}\text{ κυβικές μονάδες}$$

Παράδειγμα

Το χωρίο που φράσσεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x}$, τον άξονα x, και την ευθεία $x = 4$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα x ώστε να παραγάγει ένα στερεό, του οποίου ο όγκος ζητείται.



Παράδειγμα



Παράδειγμα

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{ακτίνα}\\ \text{φλοιού}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{ύψος}\\ \text{φλοιού}\end{pmatrix} dy$$

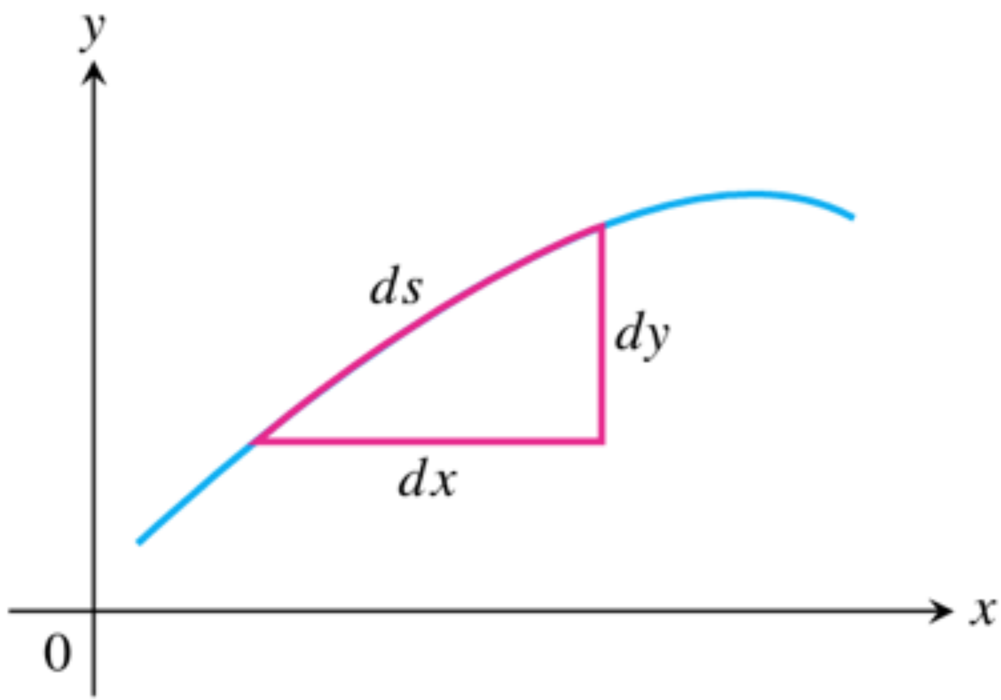
(στο βιβλίο υπάρχει τυπογραφικό)

$$= \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2)\, dy.$$

$$= 2\pi \left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi \text{ κυβικές μονάδες}$$

Μήκος καμπύλης

Μια συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο είναι **λεία,** και η γραφική της παράσταση είναι μια **λεία καμπύλη.**



Ορισμός **Το διαφορικό μήκους τόξου και ο διαφορικός τύπος μήκους τόξου**

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

διαφορικό μήκος τόξου

$$L = \int ds$$

διαφορικός τύπος μήκους τόξου

Μήκος καμπύλης

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad L = \int_{c}^{d} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Μήκος καμπύλης

Τύπος μήκους λείας καμπύλης

Αν η f είναι λεία στο $[a, b]$, το **μήκος** της καμπύλης $y = f(x)$ από a έως b είναι

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{1}$$

Αν η g είναι λεία στο $[c, d]$, το **μήκος** της καμπύλης $x = g(y)$ από c έως d είναι

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \tag{2}$$

Παράδειγμα

Βρείτε το *ακριβές* μήκος της καμπύλης

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2} - 1 \qquad \text{για} \qquad 0 \le x \le 1.$$

Λύση

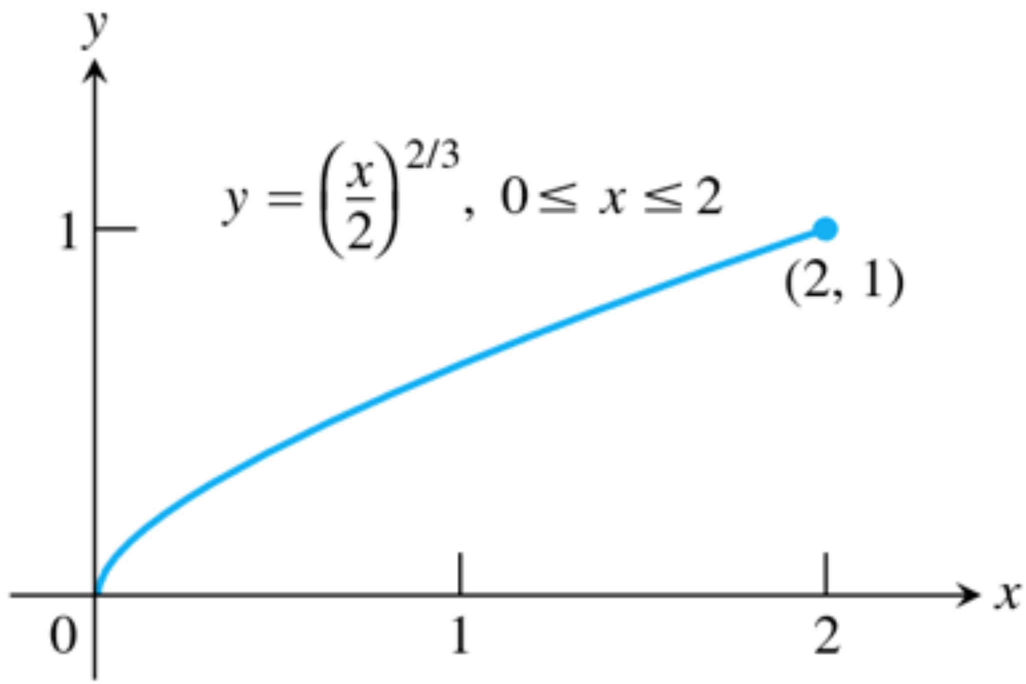
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} = 2\sqrt{2}\, x^{1/2},$$

που είναι συνεχής συνάρτηση στο [0, 1]. Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + (2\sqrt{2}x^{1/2})^2}\, dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + 8x}\, dx \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} (1 + 8x)^{3/2} \Big]_0^1 \\ &= \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Βρείτε το μήκος της καμπύλης $y = (x/2)^{2/3}$ από $x = 0$ έως $x = 2$.



Λύση   Η παράγωγος

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

δεν ορίζεται για $x = 0$, οπότε δεν μπορούμε να βρούμε το μήκος της καμπύλης κάνοντας χρήση της Εξίσωσης (1).

Παράδειγμα

Κατά συνέπεια, ξαναγράφουμε την εξίσωση εκφράζοντας το x συναρτήσει του y:

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$$

$$y^{3/2} = \frac{x}{2}$$ Υψώνουμε και τα δύο μέλη στη δύναμη 3/2.

$$x = 2y^{3/2}.$$ Λύνουμε ως προς x.

$$\frac{dx}{dy} = 2\left(\frac{3}{2}\right)y^{1/2} = 3y^{1/2}$$

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\,dy$$ Εξ. (2) με $c = 0$, $d = 1$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}(1 + 9y)^{3/2}\Big]_0^1$$ Θέτουμε $u = 1 + 9y$ και $du/9 = dy$, ολοκληρώνουμε, και αντικαθιστούμε.

$$= \frac{2}{27}(10\sqrt{10} - 1) \approx 2{,}27.$$