ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 17ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Παραμετρικές καμπύλες

Παραμετρικός τύπος μήκους τόξου (καμπύλης)

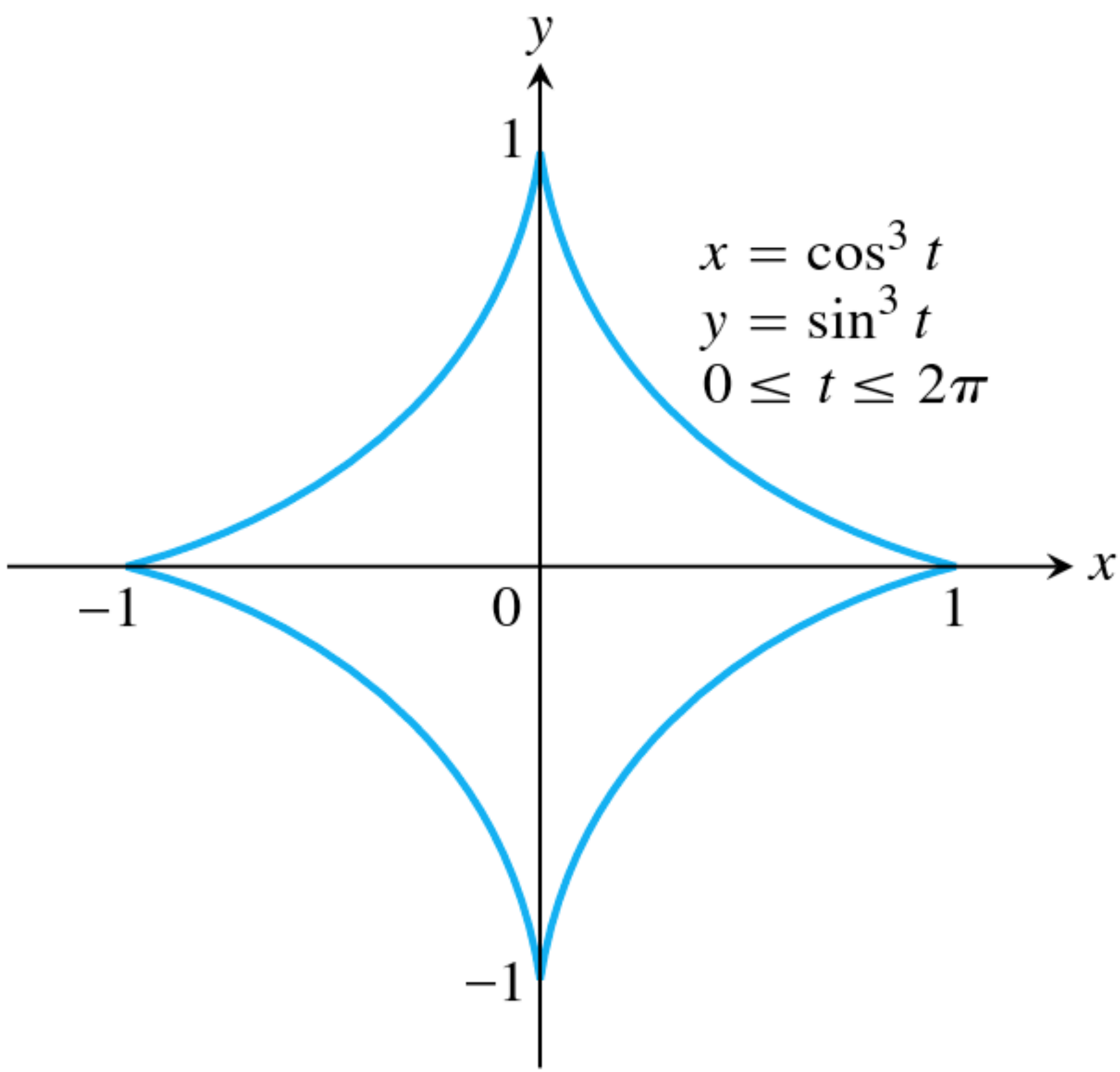
Αν μια καμπύλη C περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, όπου f' και g' συνεχείς και μη ταυτόχρονα μηδενιζόμενες στο $[\alpha, \beta]$, και αν η C διατρέχεται ακριβώς μια φορά καθώς το t αυξάνεται από το α στο β, τότε το μήκος της καμπύλης C ισούται με

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{4}$$

Παράδειγμα

Βρείτε το μήκος της αστροειδούς καμπύλης (Σχήμα 5.30)

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \sin^3 t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Παράδειγμα

Λύση Εξαιτίας της συμμετρίας της καμπύλης ως προς τους άξονες συντεταγμένων, το ζητούμενο μήκος θα είναι τετραπλάσιο του μήκους της καμπύλης στο πρώτο τεταρτημόριο. Έχουμε λοιπόν

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \sin^3 t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = [3\cos^2 t(-\sin t)]^2 = 9\cos^4 t\sin^2 t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = [3\sin^2 t(\cos t)]^2 = 9\sin^4 t\cos^2 t$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1}} \\ &= \sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t} \\ &= 3|\cos t\sin t| \\ &= 3\cos t\sin t. \qquad \cos t\sin t \geq 0 \text{ για } 0 \leq t \leq \pi/2\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Μήκος της καμπύλης στο πρώτο τεταρτημόριο είναι

$$= \int_0^{\pi/2} 3 \cos t \sin t \, dt$$

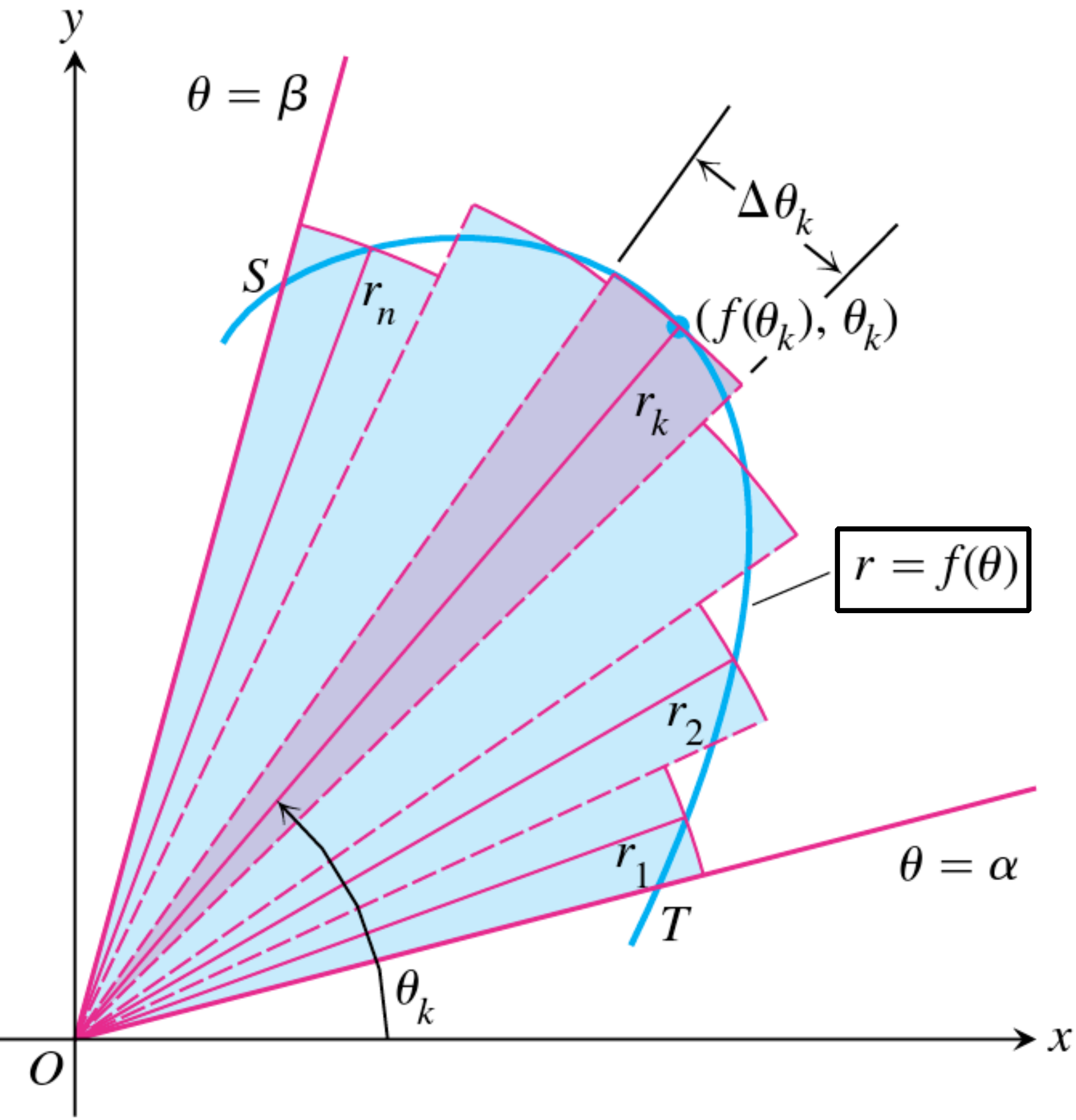
$$= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t \, dt \qquad \cos t \sin t = (1/2) \sin 2t$$

$$= -\frac{3}{4} \cos 2t \Big]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}.$$

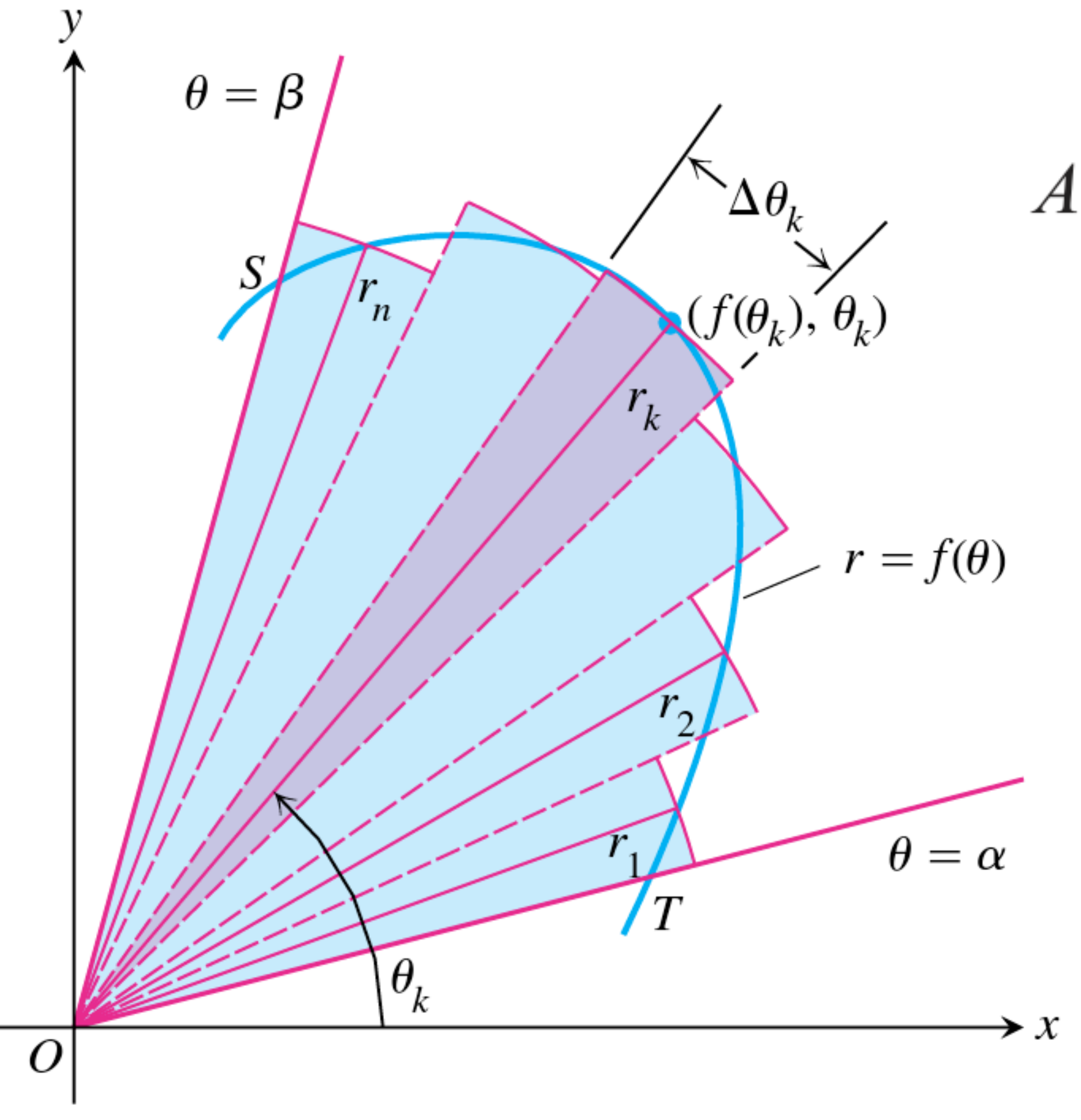
Το συνολικό μήκος της αστροειδούς καμπύλης είναι τετραπλάσιο της παραπάνω τιμής, δηλαδή $4(3/2) = 6$.

Εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες

$$r_k = f(\theta_k)$$



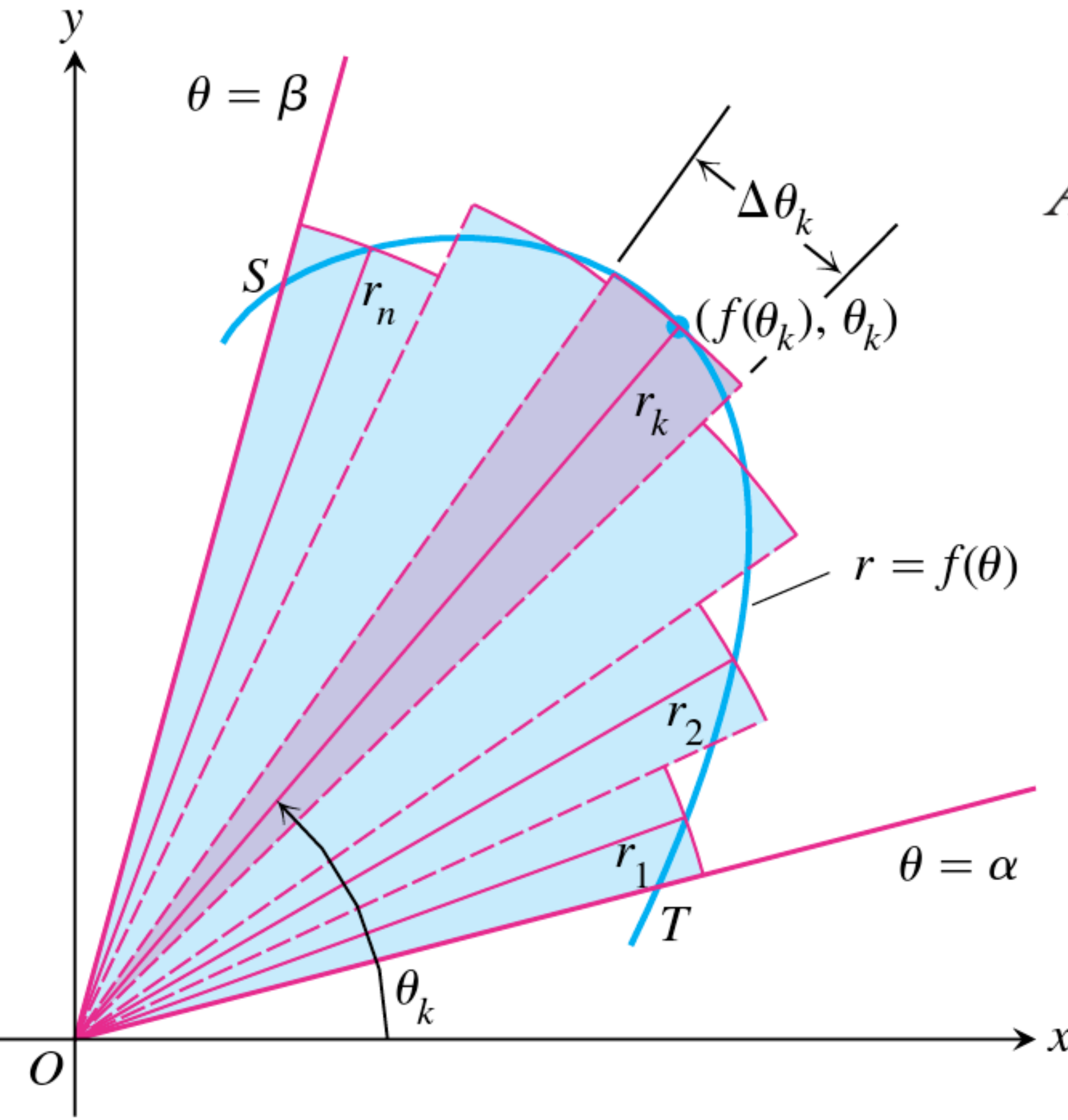
Εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες



$$r_k = f(\theta_k)$$

$$A_k = \frac{1}{2} {r_k}^2 \, \Delta\theta_k = \frac{1}{2} \left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k$$

Εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες

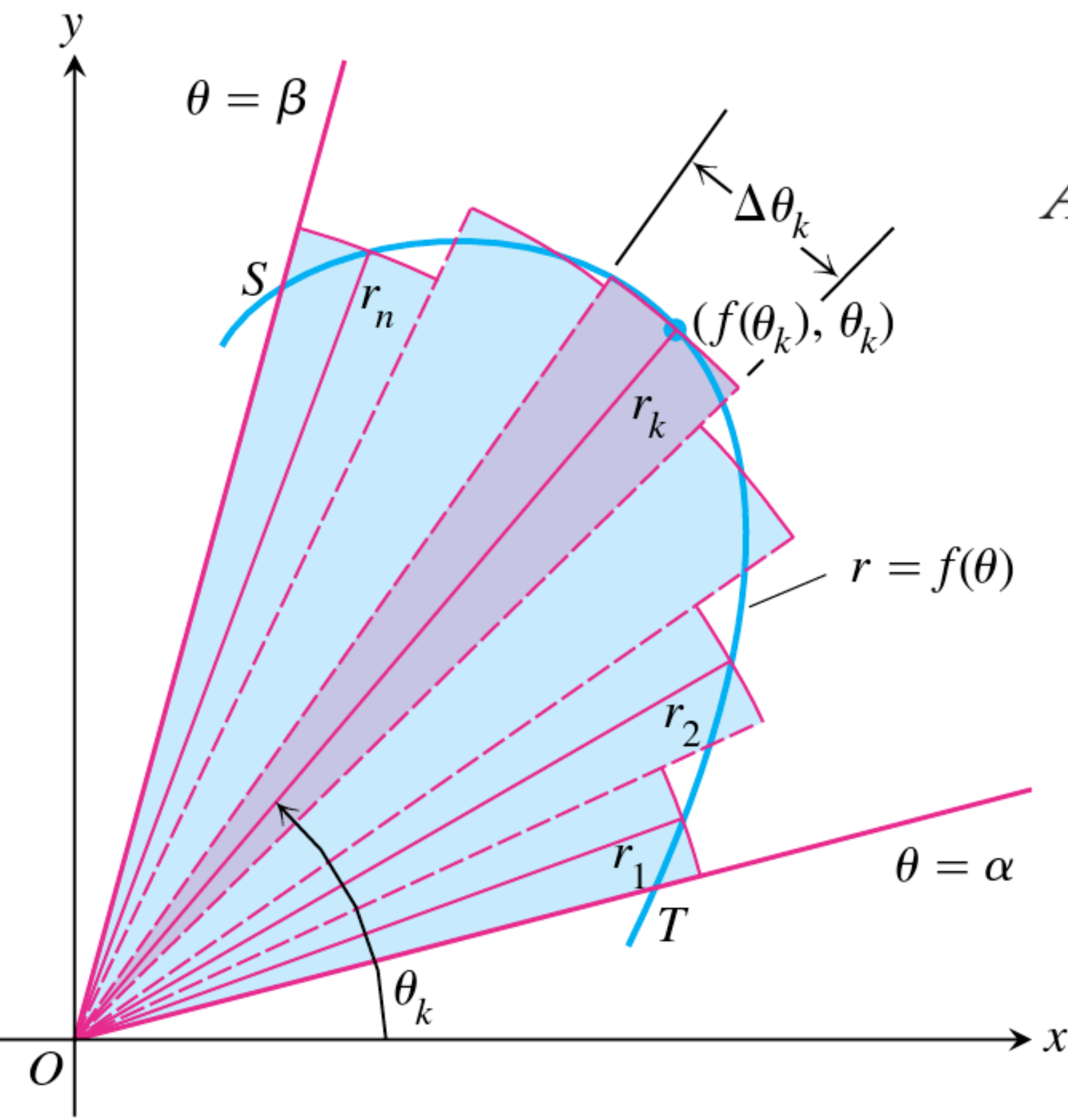


$$r_k = f(\theta_k)$$

$$A_k = \frac{1}{2}\, r_k{}^2\, \Delta\theta_k = \frac{1}{2}\, (f(\theta_k))^2\, \Delta\theta_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\, (f(\theta_k))^2\, \Delta\theta_k$$

Εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες



$$r_k = f(\theta_k)$$

$$A_k = \frac{1}{2} {r_k}^2 \, \Delta\theta_k = \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \, \Delta\theta_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \, \Delta\theta_k$$

$$A = \lim_{\| P \| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \, \Delta\theta_k$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (f(\theta))^2 \, d\theta .$$

Εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες

Εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες

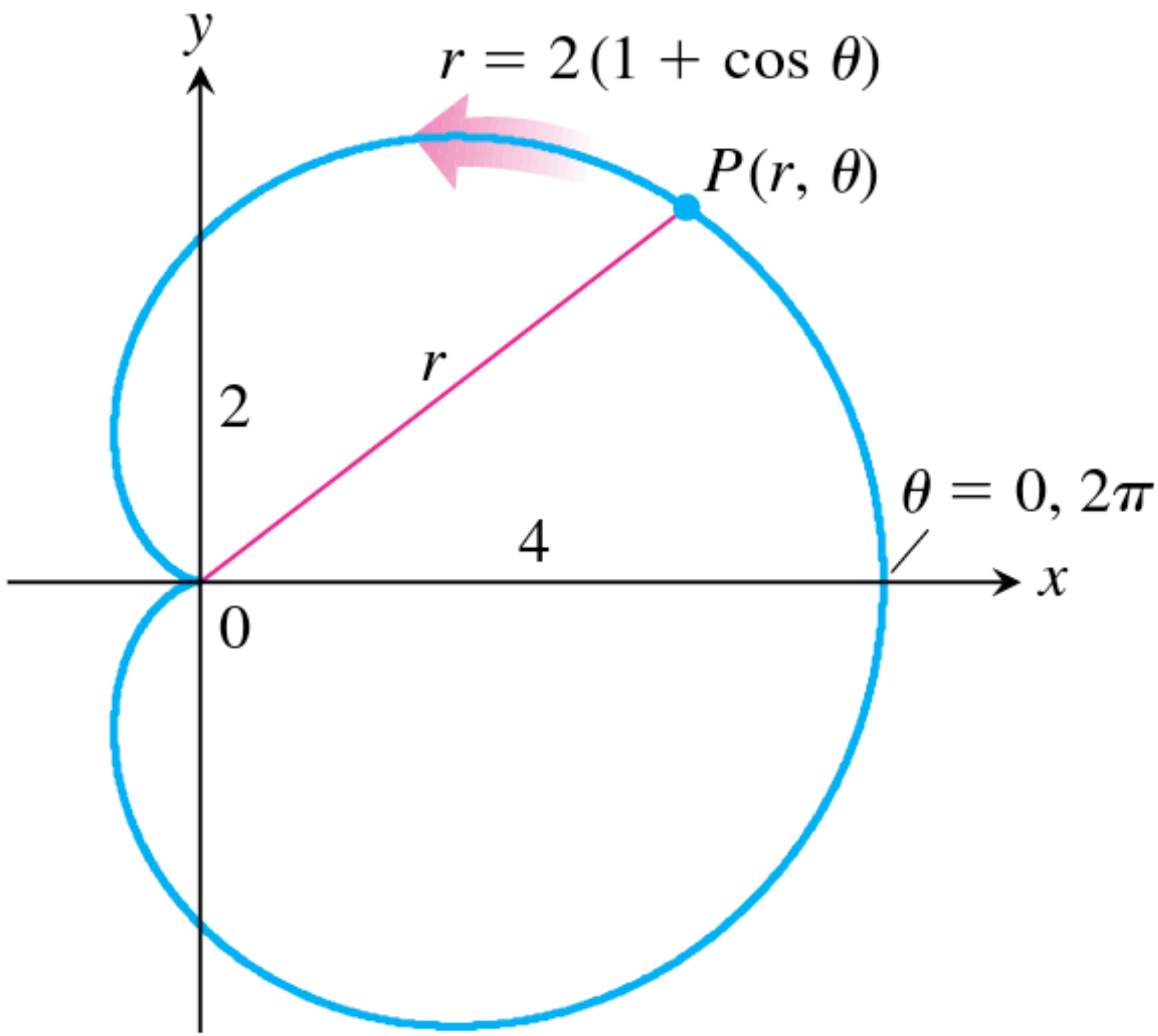
Το **εμβαδόν** του χωρίου **το οποίο σαρώνει η ακτίνα** $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, είναι

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta.$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου στο επίπεδο που περικλείεται από την καρδιοειδή καμπύλη $r = 2(1 + \cos\theta)$.



Παράδειγμα

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 4(1 + \cos\ \theta)^2\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2(1 + 2\ \cos\ \theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

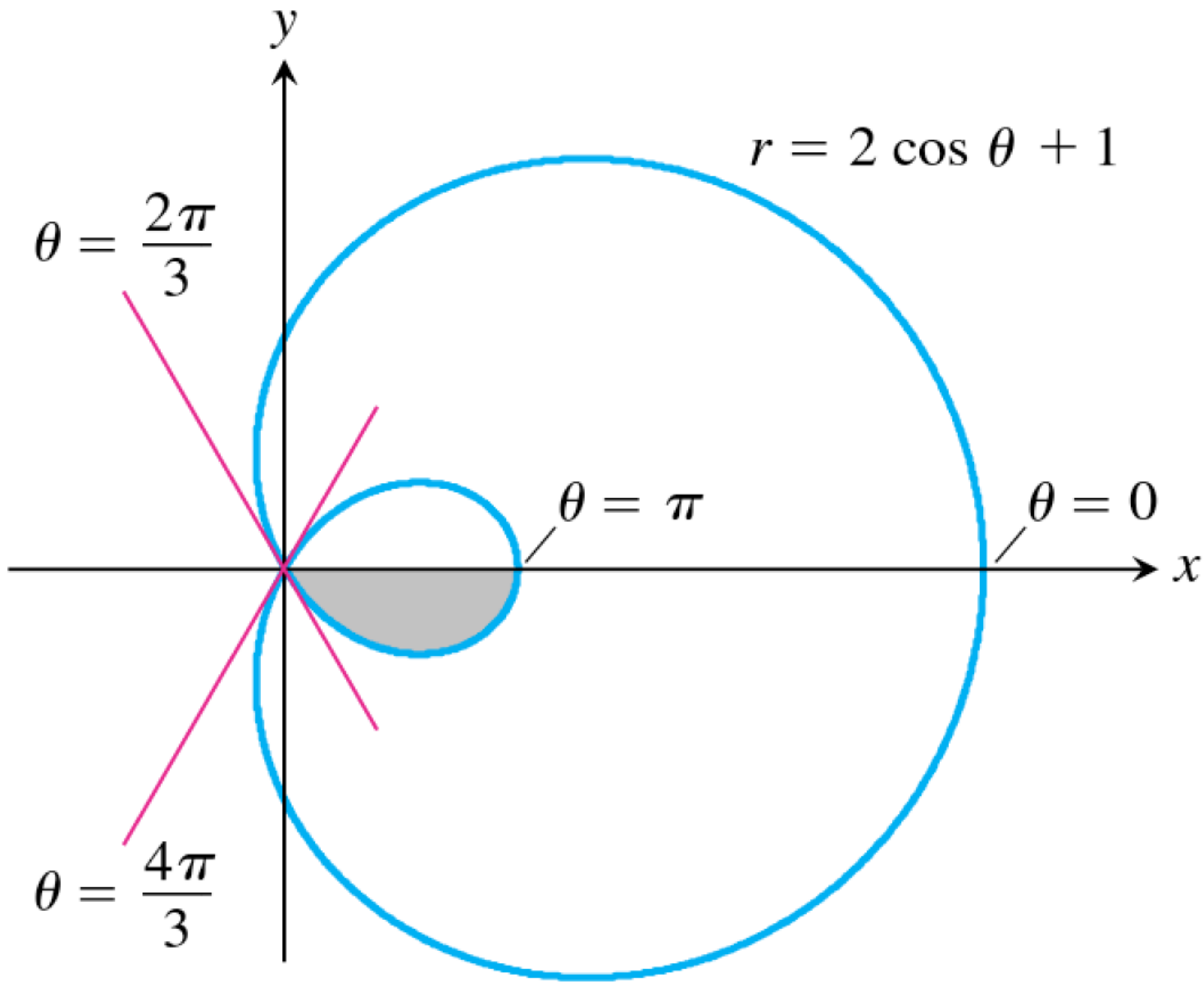
$$= \int_0^{2\pi} \left(2 + 4\ \cos\ \theta + 2\,\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (3 + 4\ \cos\ \theta + \cos\ 2\theta)\, d\theta$$

$$= \left[3\theta + 4\ \sin\ \theta + \frac{\sin\ 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 6\pi - 0 = 6\pi$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το εμβαδόν του μικρότερου βρόχου της κοχλιοειδούς καμπύλης $r = 2\cos\theta + 1$.



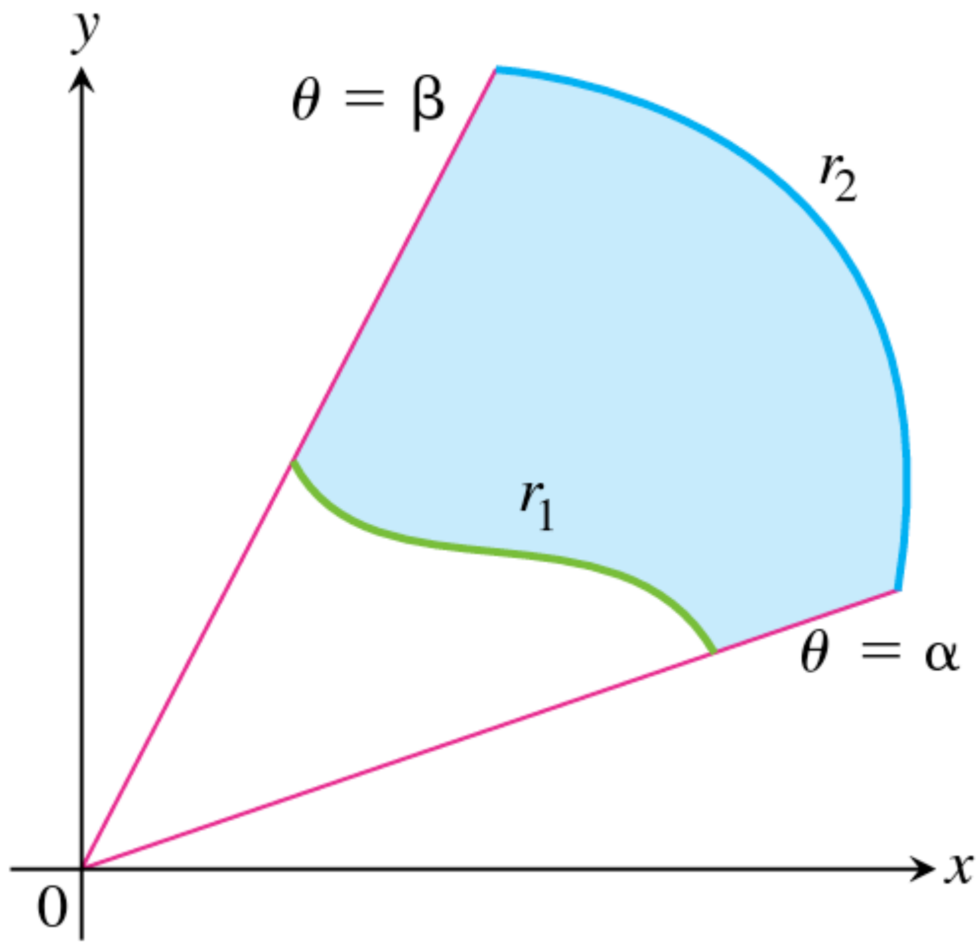
Παράδειγμα

$$A = 2\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \int_{2\pi/3}^{\pi} r^2 \, d\theta$$

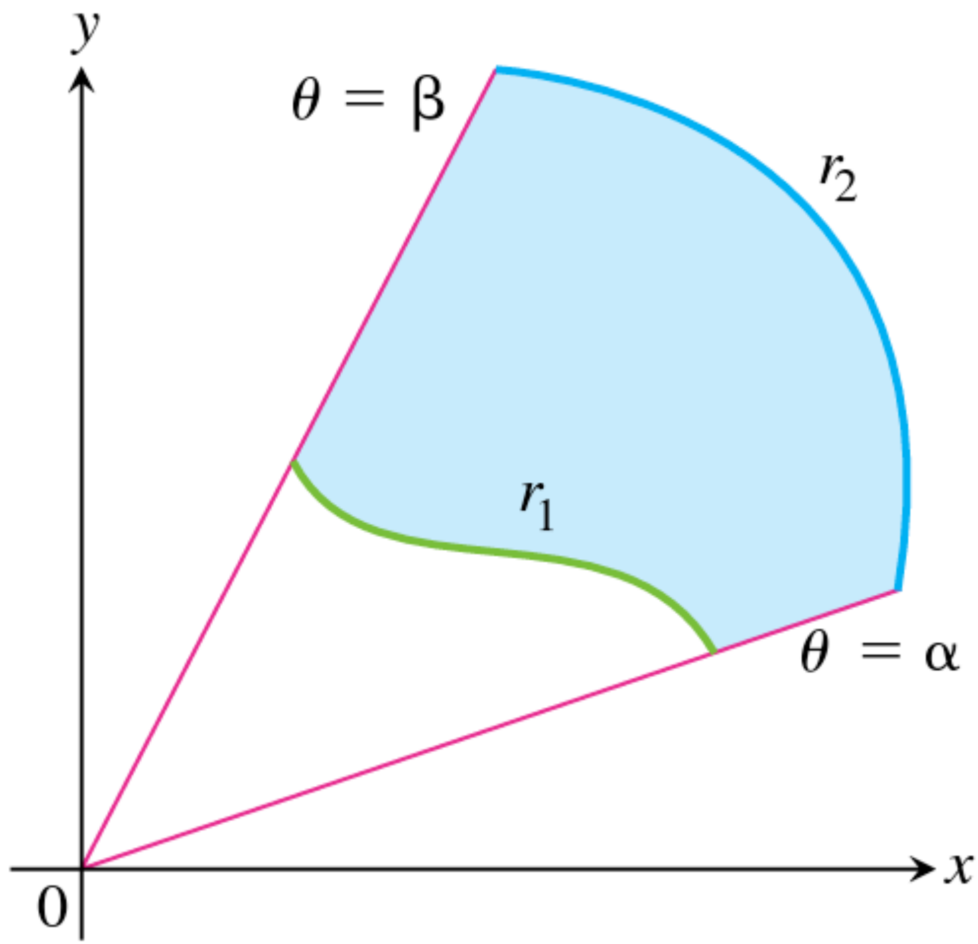
$$\begin{aligned} r^2 &= (2\cos\theta + 1)^2 = 4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1 \\ &= 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 4\cos\theta + 1 \\ &= 2 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta + 1 \\ &= 3 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{2\pi/3}^{\pi} (3 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta) \, d\theta \\ &= \Big[3\theta + \sin 2\theta + 4\sin\theta \Big]_{2\pi/3}^{\pi} \\ &= (3\pi) - \left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Εμβαδόν μεταξύ πολικών καμπυλών



Εμβαδόν μεταξύ πολικών καμπυλών



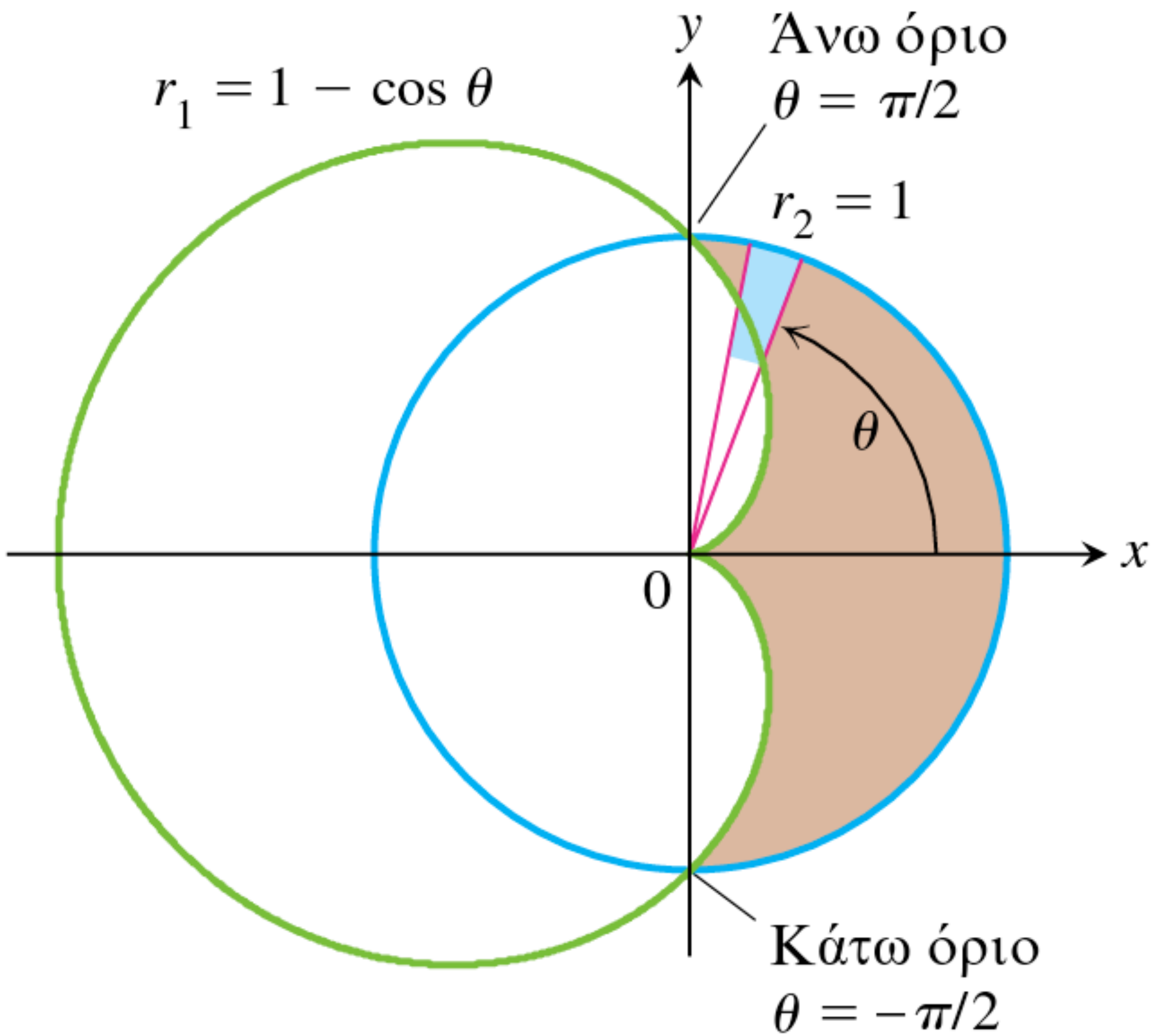
Εμβαδόν μεταξύ πολικών καμπυλών

Το εμβαδόν του χωρίου $0 \leq r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, είναι

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r_2^2 \, d\theta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r_1^2 \, d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) \, d\theta .$$

Παράδειγμα

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που κείται εντός του κύκλου $r = 1$ και εκτός της καρδιοειδούς καμπύλης $r = 1 - \cos\theta$.



Παράδειγμα

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} ({r_2}^2 - {r_1}^2)\, d\theta$$

$$= 2 \int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2} ({r_2}^2 - {r_1}^2)\, d\theta \qquad \text{Συμμετρία}$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} (1 - (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta))\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} (2\cos\theta - \cos^2\theta)\, d\theta = \int_{0}^{\pi/2} \left(2\cos\theta - \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \left[2\sin\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{0}^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{4}.$$

Μήκος καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

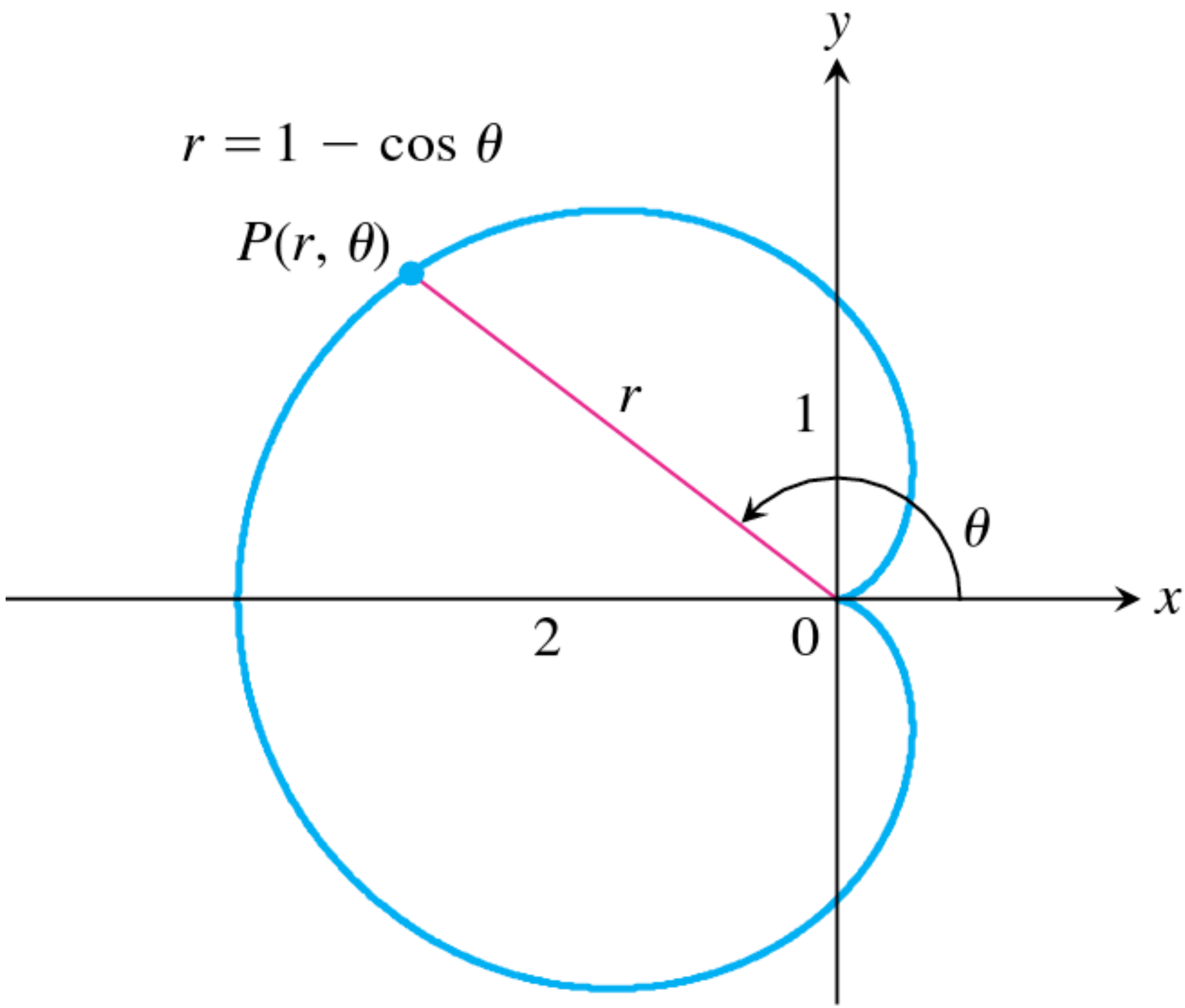
Μήκος πολικής καμπύλης

Αν η $r = f(\theta)$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο για $\alpha \leq \theta \leq \beta$ και αν το σημείο $P(r, \theta)$ διατρέχει την καμπύλη $r = f(\theta)$ ακριβώς μία φορά καθώς το θ μεταβάλλεται από α σε β, τότε το μήκος της καμπύλης είναι

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το μήκος της καρδιοειδούς καμπύλης $r = 1 - \cos\theta$.



Παράδειγμα

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (1 - \cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2$$

$$= 1 - 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} = 2 - 2\cos\theta$$

Παράδειγμα

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \qquad \text{Εξίσωση (4)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \qquad 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta \qquad \sin\frac{\theta}{2} \geq 0 \text{ για } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$= \left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8.$$

Κύριοι τύποι ολοκλήρωσης

1. $\int du = u + C$

2. $\int k\,du = ku + C \qquad$ (τυχών αριθμός k)

3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$

4. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln |u| + C$

6. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
$\qquad = \ln|\sec u| + C$

13. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$
$\qquad = -\ln|\csc u| + C$

14. $\int e^u\,du = e^u + C$

15. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1)$

16. $\int \sinh u\,du = \cosh u + C$

17. $\int \cosh u\,du = \sinh u + C$

18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$

19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$

20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left|\dfrac{u}{a}\right| + C$

21. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \sinh^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$

22. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C \qquad (u > a > 0)$

Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

Παράδειγμα 1 Απλοποίηση με αντικατάσταση

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2x - 9}{\sqrt{x^2 - 9x + 1}}\, dx.$$

Λύση

$$\boxed{\int \frac{2x - 9}{\sqrt{x^2 - 9x + 1}}\, dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}}}$$

$u = x^2 - 9x + 1,$
$du = (2x - 9)\, dx$

$$= \int u^{-1/2}\, du$$

$$= \frac{u^{(-1/2)+1}}{(-1/2) + 1} + C$$

Πίνακας 7.1, Τύπος 4, για $n = -1/2$

$$= 2u^{1/2} + C$$

$$= 2\sqrt{x^2 - 9x + 1} + C$$

Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

Παράδειγμα 2 Συμπλήρωση του τετραγώνου

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}}.$$

Λύση Συμπληρώνουμε το τετράγωνο γράφοντας την υπόρριζη ποσότητα στη μορφή

$$\begin{aligned} 8x - x^2 &= -(x^2 - 8x) = -(x^2 - 8x + 16 - 16) \\ &= -(x^2 - 8x + 16) + 16 = 16 - (x-4)^2. \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{16 - (x-4)^2}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} && a = 4,\ u = (x-4),\ du = dx \\ &= \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C && \text{Πίνακας 7.1, Τύπος 18} \\ &= \sin^{-1}\left(\frac{x-4}{4}\right) + C. \end{aligned}$$

Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

Παράδειγμα 3 Ανάπτυξη δύναμης και χρήση τριγωνομετρικής ταυτότητας

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int (\sec x + \tan x)^2 \, dx.$$

Λύση Αναπτύσσουμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση

$$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \tan^2 x.$$

Οι δύο πρώτοι όροι στο δεξιό μέλος της εξίσωσης αυτής μας είναι ήδη γνώριμοι· μπορούμε αμέσως να τους ολοκληρώσουμε. Τι γίνεται όμως με τον όρο $\tan^2 x$; Υπάρχει μια ταυτότητα που τον συνδέει με το $\sec^2 x$:

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1.$$

Αντικαθιστούμε λοιπόν το $\tan^2 x$ με το $\sec^2 x - 1$ και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int (\sec x + \tan x)^2 \, dx &= \int (\sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \sec^2 x - 1) \, dx \\
&= 2 \int \sec^2 x \, dx + 2 \int \sec x \tan x \, dx - \int 1 \, dx \\
&= 2 \tan x + 2 \sec x - x + C.
\end{aligned}$$

Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

Παράδειγμα 4 Απαλοιφή τετραγωνικής ρίζας

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\, dx.$$

Λύση Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \qquad \text{δηλαδή} \qquad 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta.$$

Για $\theta = 2x$, η ταυτότητα αυτή γίνεται

$$1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x.$$

Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

Συνεπώς,

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\; dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\, dx \qquad \sqrt{u^2} = |u|$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx$$

Στο διάστημα $[0, \pi/4]$, $\cos 2x \geq 0$, οπότε $|\cos 2x| = \cos 2x$.

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{2} - 0\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

Παράδειγμα 5 Αναγωγή καταχρηστικού κλάσματος

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2}\, dx.$$

Λύση Η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι ένα καταχρηστικό κλάσμα (δηλαδή ο αριθμητής είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον παρονομαστή). Για να ολοκληρώσουμε, κάνουμε πρώτα τη διαίρεση, οπότε παίρνουμε ένα πηλίκο συν ένα υπόλοιπο το οποίο τώρα είναι γνήσιο κλάσμα:

$$\frac{3x^2 - 7x}{3x + 2} = x - 3 + \frac{6}{3x + 2}.$$

Έτσι,

$$\int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2}\, \mathrm{d}x = \int \left(x - 3 + \frac{6}{3x + 2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 \ln |3x + 2| + C.$$

Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

Παράδειγμα 6 Χωρισμός ενός κλάσματος σε δύο

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Λύση Χωρίζουμε πρώτα την ολοκληρωτέα ποσότητα σε δύο κλάσματα, παίρνοντας

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, κάνουμε την αντικατάσταση

Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

$$u = 1 - x^2, \qquad du = -2x\,dx, \qquad \text{και} \qquad x\,dx = -\frac{1}{2}\,du.$$

$$3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 3\int \frac{(-1/2)\,du}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2}\int u^{-1/2}\,du$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C_1 = -3\sqrt{1-x^2} + C_1$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα έχει τη γνωστή μας μορφή,

$$2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\ \sin^{-1} x + C_2.$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα αυτά και ορίζοντας εκ νέου τη σταθερά ολοκλήρωσης $C_1 + C_2$ σε C, παίρνουμε

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -3\sqrt{1-x^2} + 2\ \sin^{-1} x + C.$$

Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

Παράδειγμα 7 Πολλαπλασιαμός με έκφραση που ισούται με μονάδα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \sec x \, dx.$$

Λύση

$$\int \sec x \, dx = \int (\sec x)(1) \, dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

$$= \int \frac{du}{u} \qquad u = \tan x + \sec x, \quad du = (\sec^2 x + \sec x \tan x) \, dx$$

$$= \ln |u| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

Πίνακας 7.2 Ολοκληρώματα τέμνουσας και συντέμνουσας

1. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$

2. $\int \csc u \, du = -\ln |\csc u + \cot u| + C$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\int\left(u\frac{dv}{dx}\right)dx = \int\left(\frac{d}{dx}(uv)\right)dx - \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx$$
$$= uv - \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx.$$

Τύπος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{1}$$

$$\int_{v_1}^{v_2} u\,dv = (u_2v_2 - u_1v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v\,du\,. \tag{2}$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int x \cos x \, dx.$$

Λύση Εφαρμόζουμε τον τύπο

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

όπου

$$u = x, \qquad dv = \cos x \, dx.$$

Για να συμπληρώσουμε τον τύπο, παίρνουμε το διαφορικό του u και βρίσκουμε την απλούστερη αντιπαράγωγο του $\cos x$.

$$du = dx, \qquad v = \sin x$$

Έτσι,

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$