# ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

## Μέρος 18ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

# Παράδειγμα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \ln x \, dx.$$

Λύση Εφόσον το $\int \ln x \, dx$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\int \ln x \cdot 1 \, dx$, εφαρμόζουμε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ όπου

$u = \ln x$ Απλοποιείται όταν παραγωγιστεί

$dv = dx$ Ολοκληρώνεται εύκολα

$du = \frac{1}{x} dx,$

$v = x.$ Η απλούστερη δυνατή αντιπαράγωγος

Έτσι,

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

# Παράδειγμα πολλαπλής χρήσης

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int x^2 e^x \, dx.$$

Λύση Με $u = x^2$, $dv = e^x \, dx$, $du = 2x \, dx$, και $v = e^x$, έχουμε

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx.$$

και

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x \, dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C. \end{aligned}$$

# Παράδειγμα πινακοειδούς ολοκλήρωσης

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int x^3 \sin x \, dx.$$

| $f(x)$ και οι παράγωγοί της | | $g(x)$ και τα ολοκληρώματά της |
|---|---|---|
| $x^3$ | $(+)$ | $\sin x$ |
| $3x^2$ | $(-)$ | $-\cos x$ |
| $6x$ | $(+)$ | $-\sin x$ |
| $6$ | $(-)$ | $\cos x$ |
| $0$ | | $\sin x$ |

$$\boxed{\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C.}$$

# Παράδειγμα ολοκλήρωσης με μερικά κλάσματα

Εφαρμόστε τη μέθοδο μερικών κλασμάτων για να υπολογίσετε το

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx.$$

Λύση Παραγοντοποιούμε πρώτα τον παρονομαστή: $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$. Κατόπιν προσδιορίζουμε τις τιμές των $A$ και $B$ έτσι ώστε

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}.$$

Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και απλοποιούμε:

$$5x - 3 = A(x-3) + B(x+1)$$ Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $(x+1)(x-3)$.

$$= (A+B)x - 3A + B.$$ Συγκεντρώνουμε τους ομοειδείς όρους.

# Παράδειγμα ολοκλήρωσης με μερικά κλάσματα

Εξισώνουμε τώρα τους συντελεστές όμοιων δυνάμεων, παίρνοντας το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων.

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ -3A + B &= -3 \end{aligned}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές ως σύστημα παίρνουμε $A = 2$ και $B = 3$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx &= \int \frac{2}{x + 1}\,dx + \int \frac{3}{x - 3}\,dx \\ &= 2 \ln |x + 1| + 3 \ln |x - 3| + C. \end{aligned}$$

# Προϋπόθεση

*Ο βαθμός του αριθμητή* $f(x)$ *πρέπει να είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή* $g(x)$. Με άλλα λόγια, το κλάσμα πρέπει να είναι *γνή-σιο*. Αν δεν είναι, εκτελούμε τη διαίρεση του $f(x)$ με το $g(x)$ και εφαρμόζουμε τη μέθοδο στον όρο που προκύπτει ως υπόλοιπο της διαίρεσης.

# Παράδειγμα

Εκφράστε το ακόλουθο κλάσμα ως άθροισμα μερικών κλασμάτων:

$$\frac{6x + 7}{(x + 2)^2}.$$

Λύση Πρέπει να εκφράσουμε το κλάσμα ως άθροισμα μερικών κλασμάτων με απροσδιόριστους συντελεστές.

$$\frac{6x + 7}{(x + 2)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 2)^2}$$

$$6x + 7 = A(x + 2) + B$$ Πολλαπλασιάζουμε κάθε μέλος με $(x + 2)^2$.

$$= Ax + (2A + B)$$ Συγκεντρώνουμε ομοειδείς όρους.

# Παράδειγμα

Εξισώνοντας συντελεστές όμοιων δυνάμεων του $x$ παίρνουμε

$$A = 6 \qquad \text{και} \qquad 2A + B = 12 + B = 7, \qquad \text{δηλαδή}$$

$$A = 6 \qquad \text{και} \qquad B = -5.$$

Συνεπώς,

$$\frac{6x + 7}{(x + 2)^2} = \frac{6}{x + 2} - \frac{5}{(x + 2)^2}\ .$$

# Παράδειγμα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\, dx.$$

Λύση Εκτελούμε πρώτα τη διαίρεση με σκοπό να καταλήξουμε σε ένα πολυώνυμο συν ένα γνήσιο κλάσμα.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 4x^2 - x - 3 & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{2-2} -(2x^3 - 4x^2 - 6x) & 2x \\ \cline{1-1} 5x - 3 & \end{array}$$

Κατόπιν γράφουμε το καταχρηστικό κλάσμα ως άθροισμα του πολυωνύμου και του γνήσιου κλάσματος.

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

Τελικά:

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\, dx = \int 2x\, dx + \int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}\, dx$$

$$= x^2 + 2 \ln |x + 1| + 3 \ln |x - 3| + C.$$

# Παράδειγμα μεθόδου Heavyside

Βρείτε τα $A$, $B$, και $C$ στο ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}\,. \tag{2}$$

Λύση Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε μέλος της Εξίσωσης (2) με $(x-1)$ ώστε

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B(x-1)}{x-2} + \frac{C(x-1)}{x-3}$$

και θέσουμε $x = 1$, προκύπτει μια εξίσωση την οποία λύνουμε ως προς $A$:

$$\frac{(1)^2+1}{(1-2)(1-3)} = A + 0 + 0,$$

$$A = 1.$$

# Παράδειγμα μεθόδου Heavyside

$$A = \frac{(1)^2 + 1}{\underbrace{\boxed{(x-1)}}_{\Uparrow \text{ Καλύπτουμε}}(1-2)(1-3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1.$$

$$B = \frac{(2)^2 + 1}{(2-1)\underbrace{\boxed{(x-2)}}_{\Uparrow \text{ Καλύπτουμε}}(2-3)} = \frac{5}{(1)(-1)} = -5.$$

Στις σχέσεις για τα B και C στο βιβλίο υπάρχουν συνολικά 3 τυπογραφικά, που διορθώθηκαν εδώ.

$$C = \frac{(3)^2 + 1}{(3-1)(3-2)\underbrace{\boxed{(x-3)}}_{\Uparrow \text{ Καλύπτουμε}}} = \frac{10}{(2)(+1)} = 5.$$

# Παράδειγμα μεθόδου Heavyside

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx.$$

Λύση Ο βαθμός του $f(x) = x + 4$ είναι μικρότερος του βαθμού του $g(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$, ενώ παραγοντοποιώντας το $g(x)$ παίρνουμε

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} = \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}.$$

Οι ρίζες του $g(x)$ είναι $r_1 = 0$, $r_2 = 2$, και $r_3 = -5$. Βρίσκουμε λοιπόν

$$A_1 = \frac{0+4}{\underset{\substack{\Uparrow \\ \text{Καλύπτουμε}}}{\boxed{x}}\,(0-2)(0+5)} = \frac{4}{(-2)(5)} = -\frac{2}{5}$$

# Παράδειγμα μεθόδου Heavyside

$$A_2 = \frac{2+4}{2 \quad \boxed{(x-2)} \quad (2+5)} = \frac{6}{(2)(7)} = \frac{3}{7}$$

$\Uparrow$

Καλύπτουμε

$$A_3 = \frac{-5+4}{(-5)(-5-2) \quad \boxed{(x+5)}} = \frac{-1}{(-5)(-7)} = -\frac{1}{35}\,.$$

$\Uparrow$

Καλύπτουμε

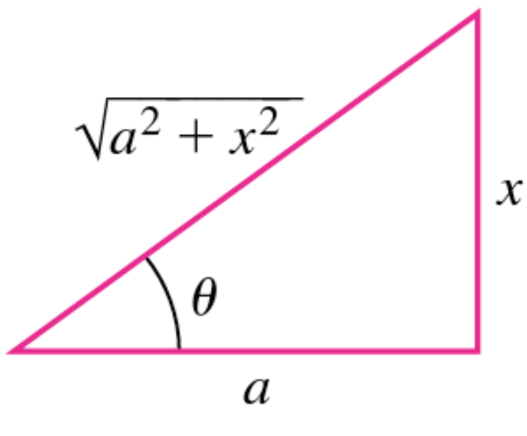
Συνεπώς,

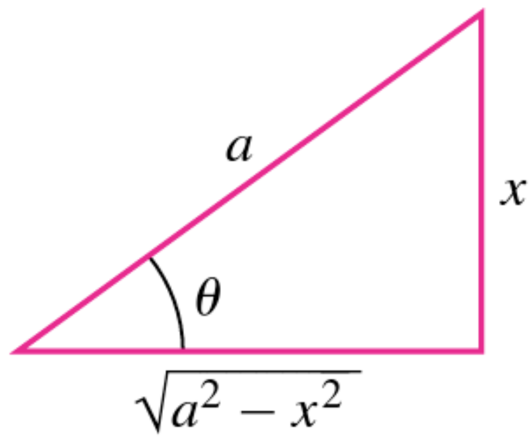
$$\frac{x+4}{x(x-2)(x+5)} = -\frac{2}{5x} + \frac{3}{7(x-2)} - \frac{1}{35(x+5)},$$

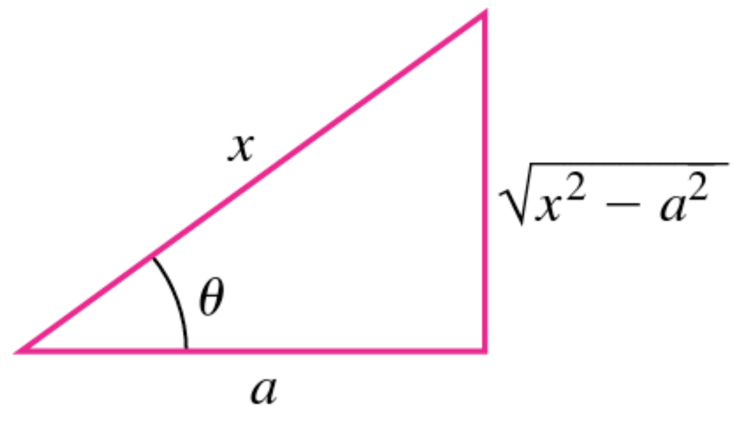
και

$$\int \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}\,dx = -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{3}{7}\ln|x-2| - \frac{1}{35}\ln|x+5| + C.$$

# Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις




$x = a \tan \theta$ | $x = a \sin \theta$ | $x = a \sec \theta$

$\boxed{\sqrt{a^2 + x^2} = a|\sec \theta|}$ | $\boxed{\sqrt{a^2 - x^2} = a|\cos \theta|}$ | $\boxed{\sqrt{x^2 - a^2} = a|\tan \theta|}$

Για $x = a \tan \theta$,

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \tan^2 \theta = a^2(1 + \tan^2 \theta) = a^2 \sec^2 \theta.$$

Για $x = a \sin \theta$,

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sin^2 \theta = a^2(1 - \sin^2 \theta) = a^2 \cos^2 \theta.$$

Για $x = a \sec \theta$,

$$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2 \theta - a^2 = a^2(\sec^2 \theta - 1) = a^2 \tan^2 \theta.$$

# Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

Για να έχουμε λοιπόν αντιστρεψιμότητα,

η $x = a\tan\theta$ απαιτεί $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ με $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

η $x = a\sin\theta$ απαιτεί $\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ με $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

η $x = a\sec\theta$ απαιτεί $\theta = \sec^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ με $\begin{cases} 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{x}{a} \geqslant 1 \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi, & \dfrac{x}{a} \leqslant -1. \end{cases}$

# Παράδειγμα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$$

Λύση Θέτουμε

$$x = 2\tan\theta, \qquad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$4 + x^2 = 4 + 4\tan^2\theta = 4(1+\tan^2\theta) = 4\sec^2\theta.$$

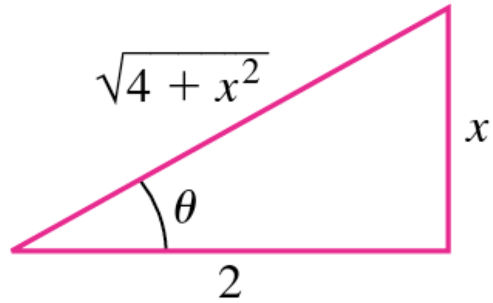
Τότε

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{|\sec\theta|} \qquad \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta|$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta \qquad \sec\theta > 0 \text{ για } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

# Παράδειγμα




**ΣΧΗΜΑ 7.4** Τρίγωνο αναφοράς για $x = 2 \tan \theta$ (Παράδειγμα 1):

$$\tan \theta = \frac{x}{2}$$

και

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2}.$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}} = \ln \left| \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C \qquad \text{Από το Σχήμα 7.4}$$

$$= \ln \left| \sqrt{4 + x^2} + x \right| + C'. \qquad \text{Θέτοντας } C' = C - \ln 2$$

# Παράδειγμα

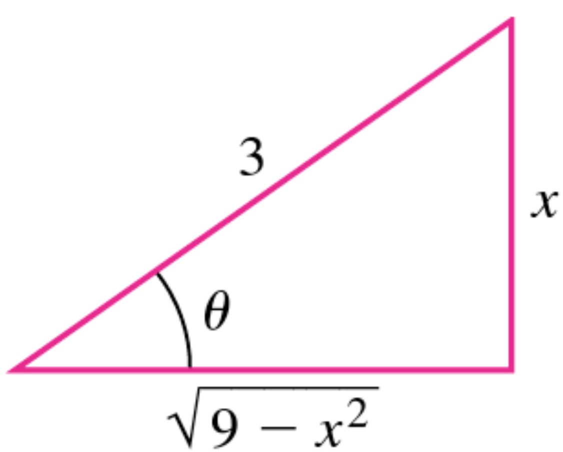
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}, \qquad -3 < x < 3.$$

Λύση Θέτουμε

$$x = 3\sin\theta, \qquad dx = 3\cos\theta\,d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$9 - x^2 = 9 - 9\sin^2\theta = 9(1-\sin^2\theta) = 9\cos^2\theta.$$



# Παράδειγμα

Τότε

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{27\sin^3\theta \cdot 3\cos\theta\,d\theta}{|3\cos\theta|}$$

$\cos\theta > 0$ για $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$= 27\int \sin^3\theta\,d\theta$$

$$= 27\int (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$$= -27\cos\theta + 9\cos^3\theta + C$$

$$= -27\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + 9\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right)^3 + C$$

Σχήμα 7.5, $a = 3$

$$= -9\sqrt{9-x^2} + \frac{(9-x^2)^{3/2}}{3} + C.$$

# Παράδειγμα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}}, \qquad x > \frac{2}{5}.$$

Λύση Κατ' αρχάς ξαναγράφουμε τη ρίζα ως εξής

$$\sqrt{25x^2 - 4} = \sqrt{25\left(x^2 - \frac{4}{25}\right)}$$

$$= 5\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

# Παράδειγμα

Κατόπιν αντικαθιστούμε

$$x = \frac{2}{5}\sec\theta, \qquad dx = \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\,d\theta, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

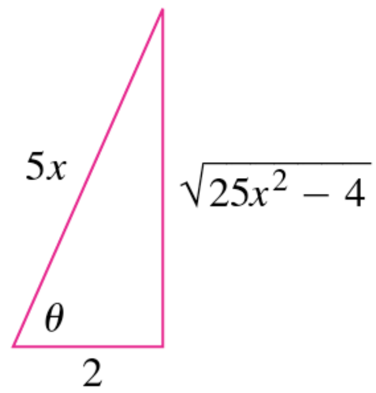
$$x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25}$$

$$= \frac{4}{25}(\sec^2\theta - 1) = \frac{4}{25}\tan^2\theta$$

$\tan\theta > 0$ για
$0 < \theta < \pi/2$

$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}|\tan\theta| = \frac{2}{5}\tan\theta.$$

# Παράδειγμα




**ΣΧΗΜΑ 7.6** Αν $x = (2/5)\sec\theta$, $0 \leq \theta < \pi/2$, τότε $\theta = \sec^{-1}(5x/2)$, ενώ οι τιμές των υπόλοιπων τριγωνομετρικών συναρτήσεων του $\theta$ βρίσκονται από αυτό το ορθογώνιο τρίγωνο.

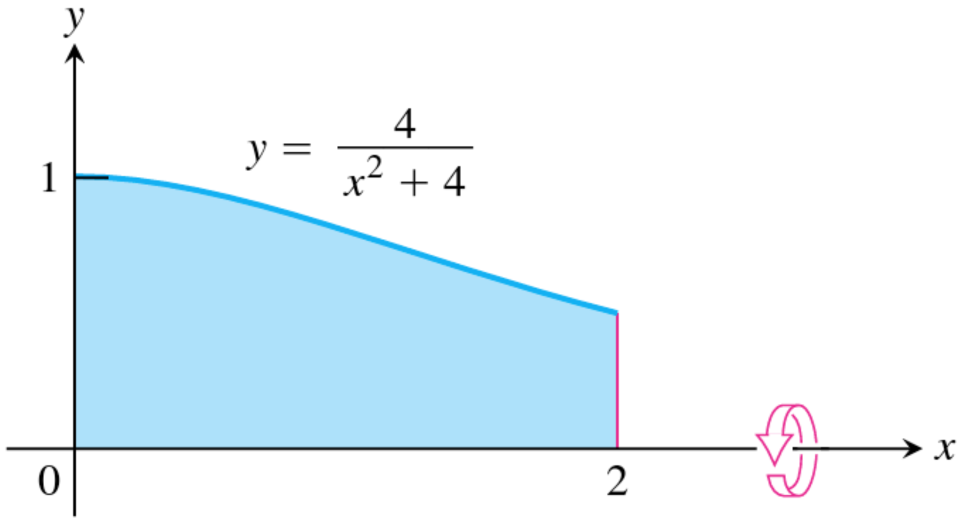
$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}} = \int \frac{dx}{5\sqrt{x^2 - (4/25)}} = \int \frac{(2/5)\ \sec\ \theta\ \tan\ \theta\ d\theta}{5 \cdot (2/5)\ \tan\ \theta}$$

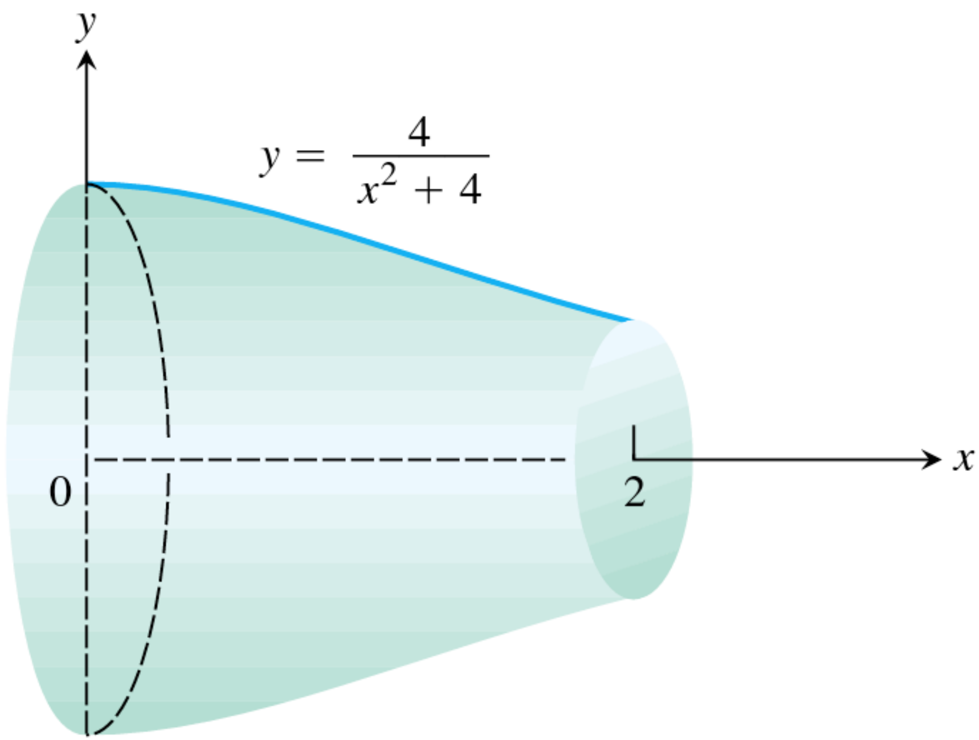
$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta\, d\theta = \frac{1}{5}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2 - 4}}{2}\right| + C \quad \text{Σχήμα 7.6}$$

# Παράδειγμα

Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε ως προς τον άξονα $x$ το χωρίο που φράσσεται από την καμπύλη $y = 4/(x^2 + 4)$, τον άξονα $x$, και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$.




**Λύση** Σχεδιάζουμε το χωρίο (Σχήμα 7.7) και χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των δίσκων για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

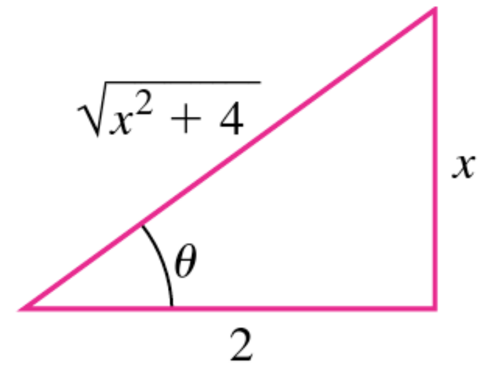
$$V = \int_0^2 \pi[R(x)]^2\,dx = 16\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2}. \qquad R(x) = \frac{4}{x^2+4}$$

# Παράδειγμα

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, θέτουμε

$$x = 2\tan\theta, \qquad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{x}{2},$$

$$x^2 + 4 = 4\tan^2\theta + 4 = 4(\tan^2\theta + 1) = 4\sec^2\theta$$




(Σχήμα 7.8). Με τις αντικαταστάσεις αυτές, έχουμε

$$\begin{aligned}
V &= 16\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2} \\
&= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(4\sec^2\theta)^2} \\
&= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{16\sec^4\theta} = \pi \int_0^{\pi/4} 2\cos^2\theta\, d\theta \\
&= \pi \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta = \pi\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} \\
&= \pi\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] \approx 4{,}04.
\end{aligned}$$

$\theta = 0$ για $x = 0$·
$\theta = \pi/4$ για $x = 2$

$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$