ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 2ο

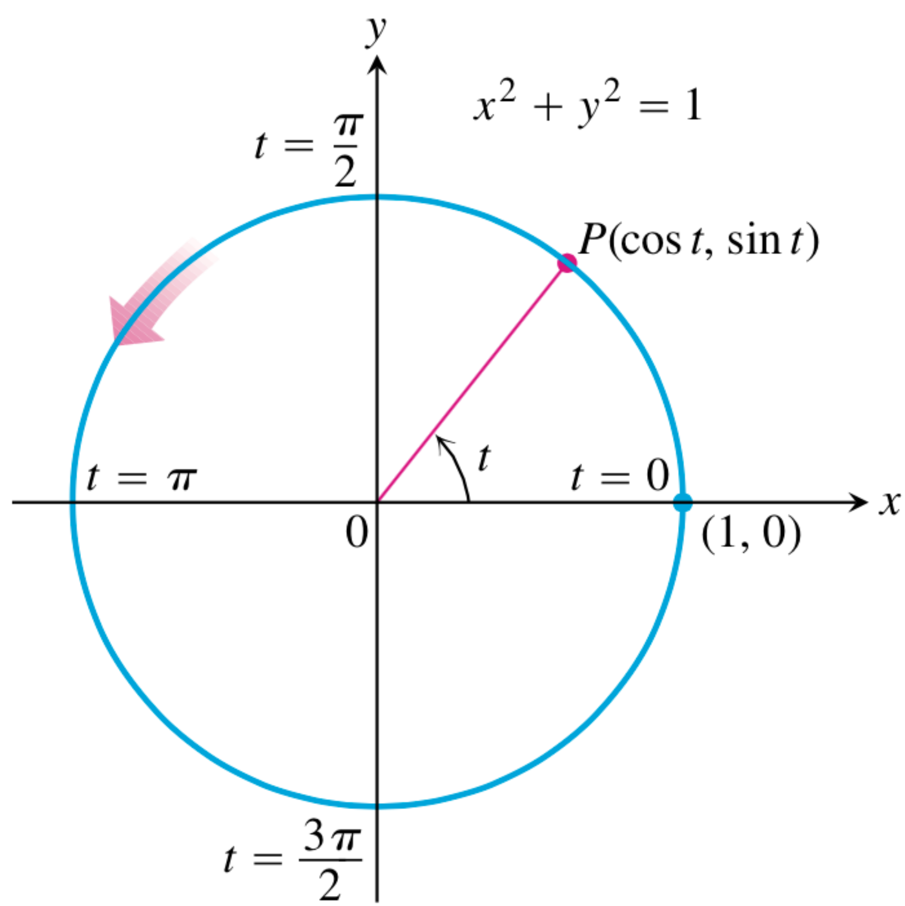
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Παραμετρικές Εξισώσεις

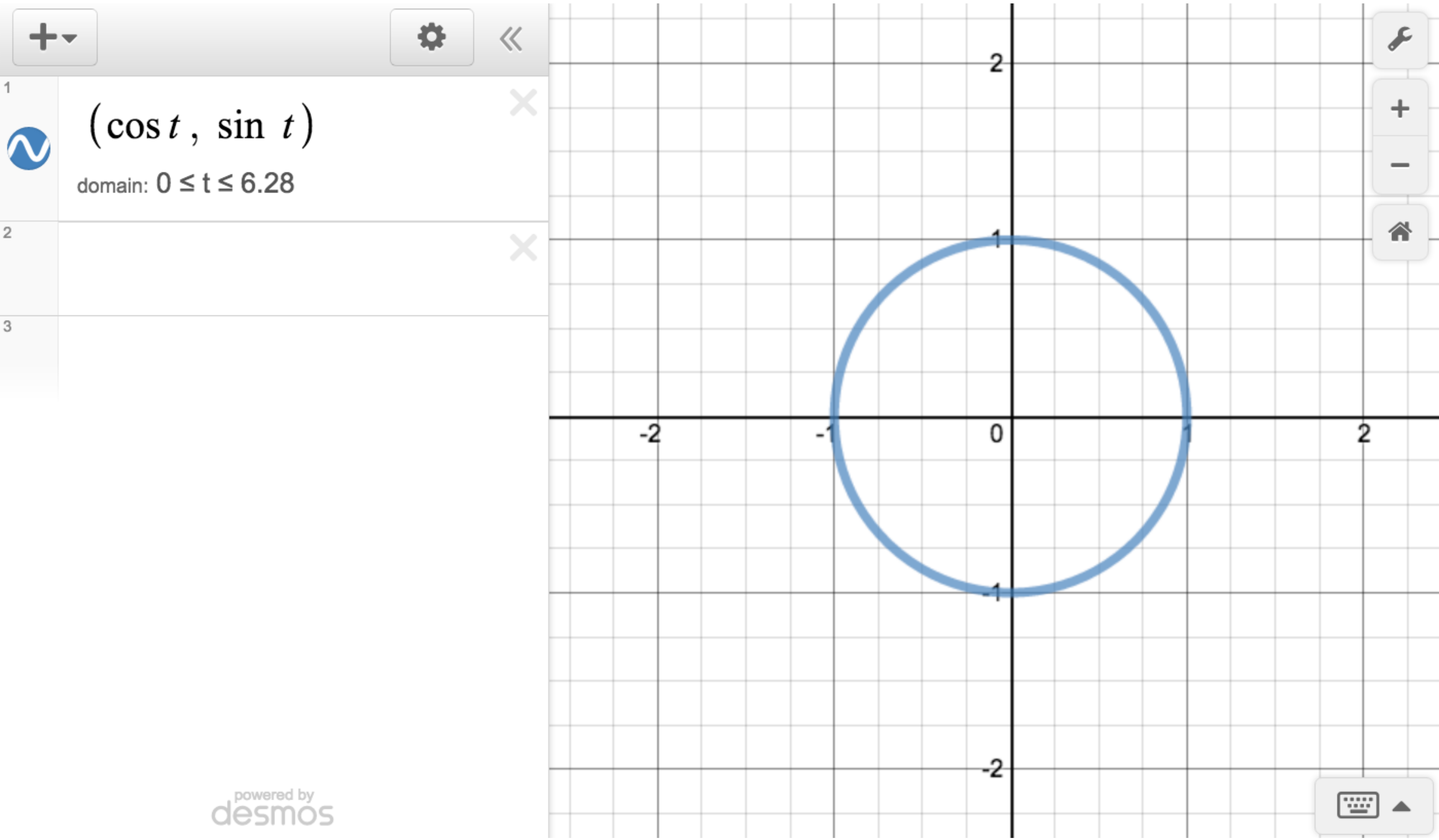
Σχεδιάστε τις παραμετρικές καμπύλες

(α) $x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

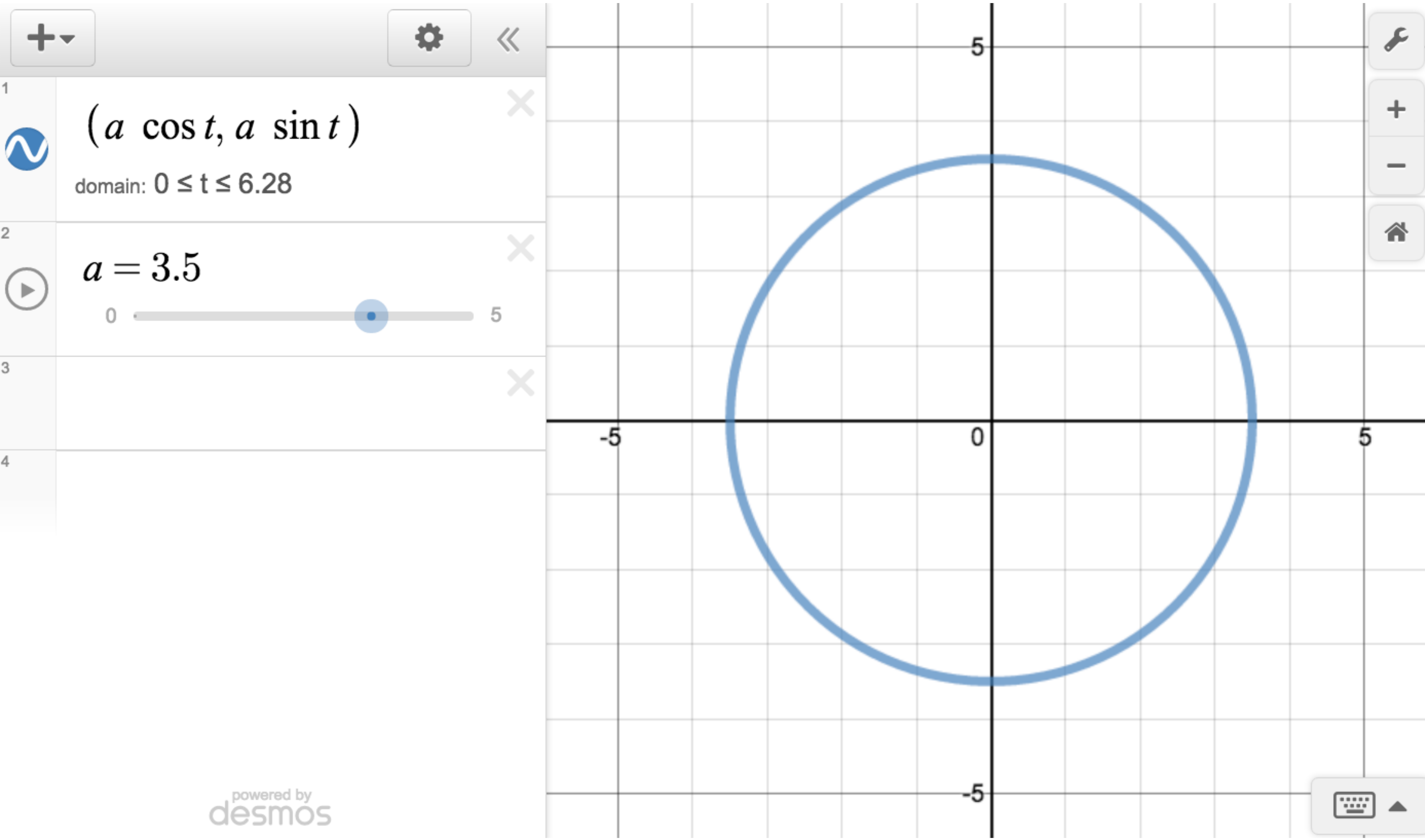
(β) $x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$.



Παραμετρικές Εξισώσεις



Παραμετρικές Εξισώσεις

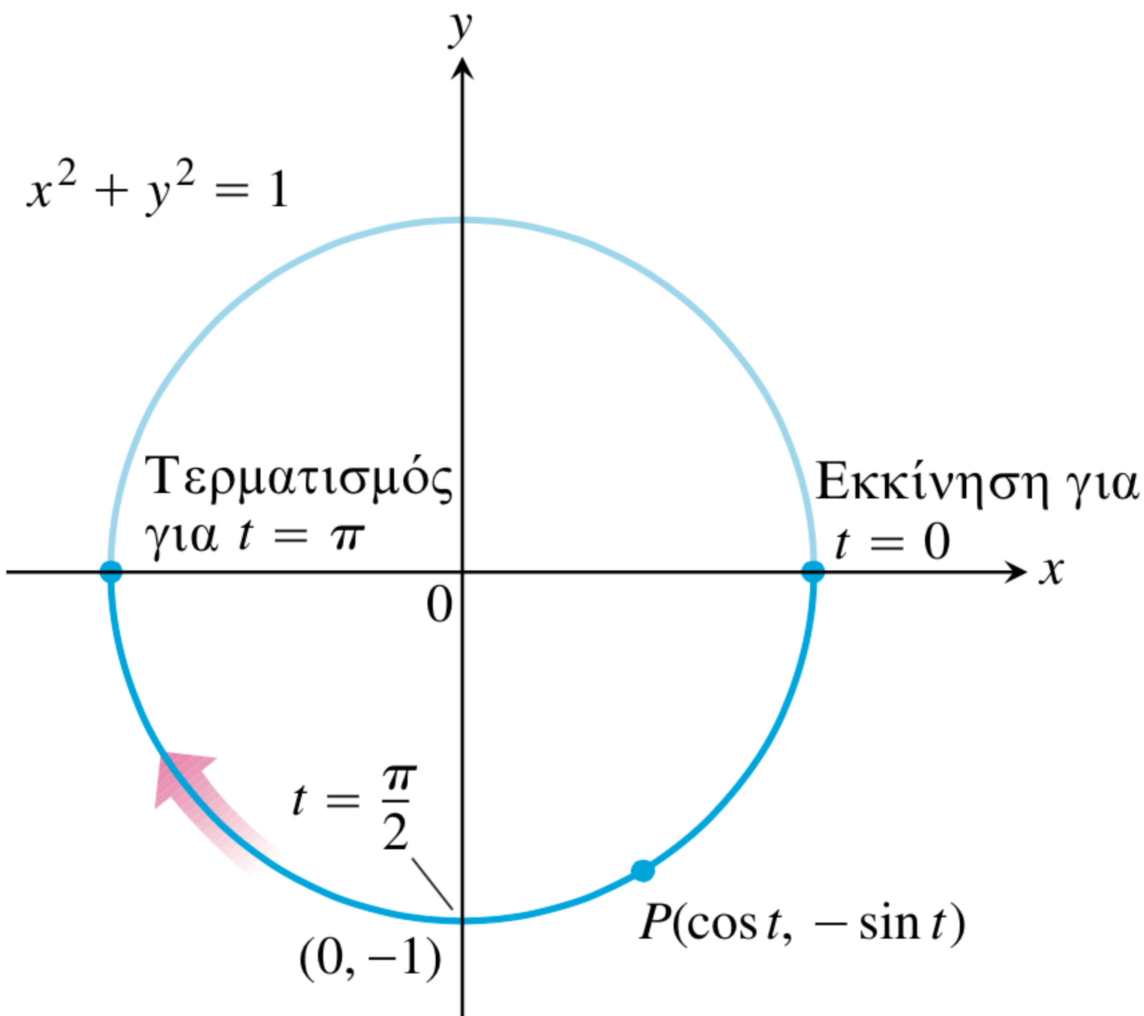


Παραμετρικές Εξισώσεις

Παράδειγμα 3 Διανύοντας ένα ημικύκλιο με δεξιόστροφη φορά

Σχεδιάστε την παραμετρική καμπύλη

$$x = \cos t\,, \qquad y = -\sin t\,, \qquad 0 \le t \le \pi\,.$$



Άσκηση 1

Παράδειγμα 5 Παραμετρικοποίηση ευθύγραμμου τμήματος

Βρείτε μια παραμετρικοποίηση για το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(-2, 1)$ και $(3, 5)$.

Λύση Χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες του σημείου $(-2, 1)$ κατασκευάζουμε τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = -2 + at, \qquad y = 1 + bt.$$

Αυτές παριστάνουν μια ευθεία, όπως διαπιστώνουμε λύνοντας κάθε εξίσωση ως προς t και εξισώνοντας τα δεξιά μέλη, οπότε

$$\frac{x+2}{a} = \frac{y-1}{b}.$$

Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $(-2, 1)$ για $t = 0$. Προσδιορίζουμε τα a και b έτσι ώστε να διέρχεται και από το $(3, 5)$ για $t = 1$.

$$3 = -2 + a \Rightarrow a = 5 \qquad x = 3 \text{ για } t = 1.$$
$$5 = 1 + b \Rightarrow b = 4 \qquad y = 5 \text{ για } t = 1.$$

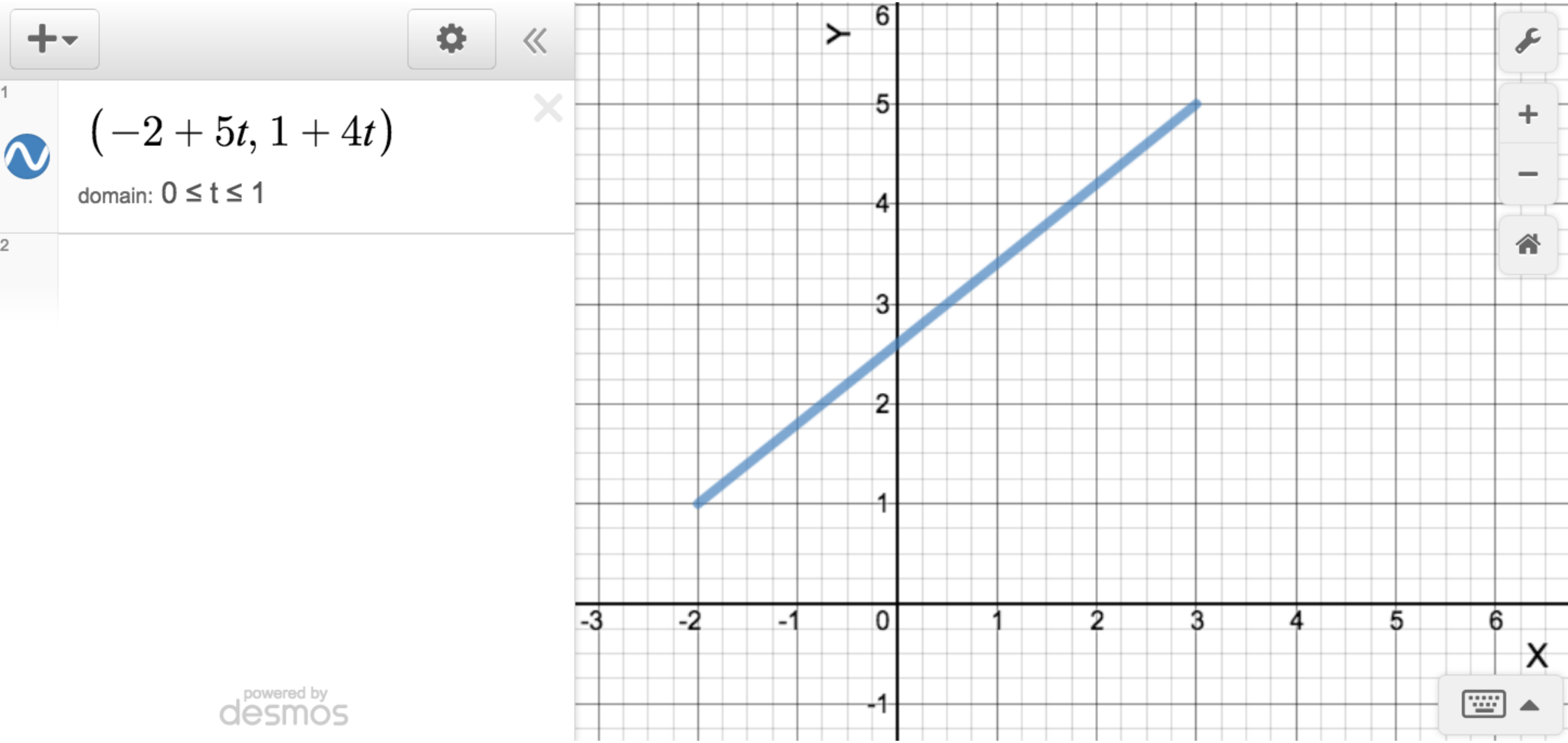
Συνεπώς, η

$$x = -2 + 5t, \qquad y = 1 + 4t, \qquad 0 \le t \le 1$$

είναι μια παραμετρικοποίηση του ευθύγραμμου τμήματος με αρχικό και τελικό σημείο το $(-2, 1)$ και $(3, 5)$ αντίστοιχα.

Άσκηση 1

Βρείτε μια παραμετρικοποίηση του ευθύγραμμου τμήματος που έχει ως άκρα τα σημεία (-2,1) και (3,5).



Παραμετρικοποίηση Αντίστροφων Συναρτήσεων

Οποιαδήποτε συνάρτηση $y = f(x)$ μπορεί να παρασταθεί παραμετρικά ως εξής:

$$x = t$$

$$y = f(t)$$

Με εναλλαγή των x και y προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις της αντίστροφης συνάρτησης:

$$x = f(t)$$

$$y = t$$

Παράδειγμα

Η $y = x^2$ μπορεί να παρασταθεί παραμετρικά ως εξής:

$$x = t$$

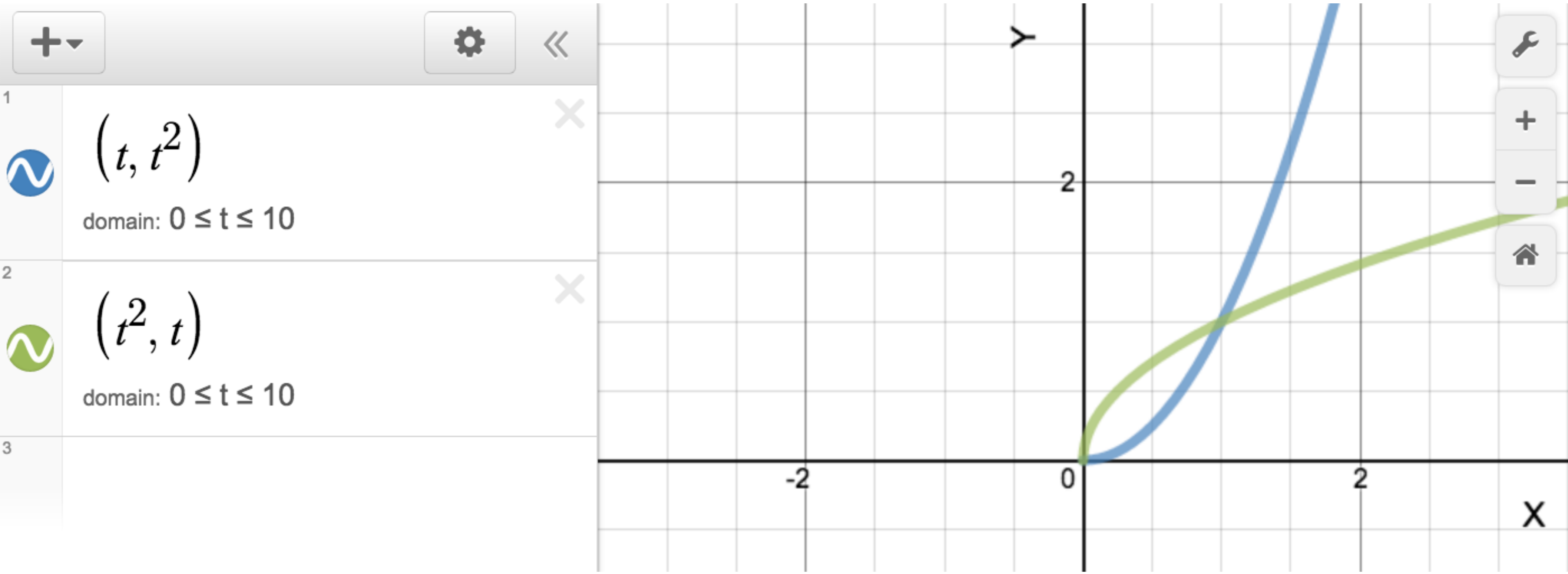
$$y = t^2$$

Με <u>εναλλαγή</u> των x και y προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις της <u>αντίστροφης συνάρτησης</u>:

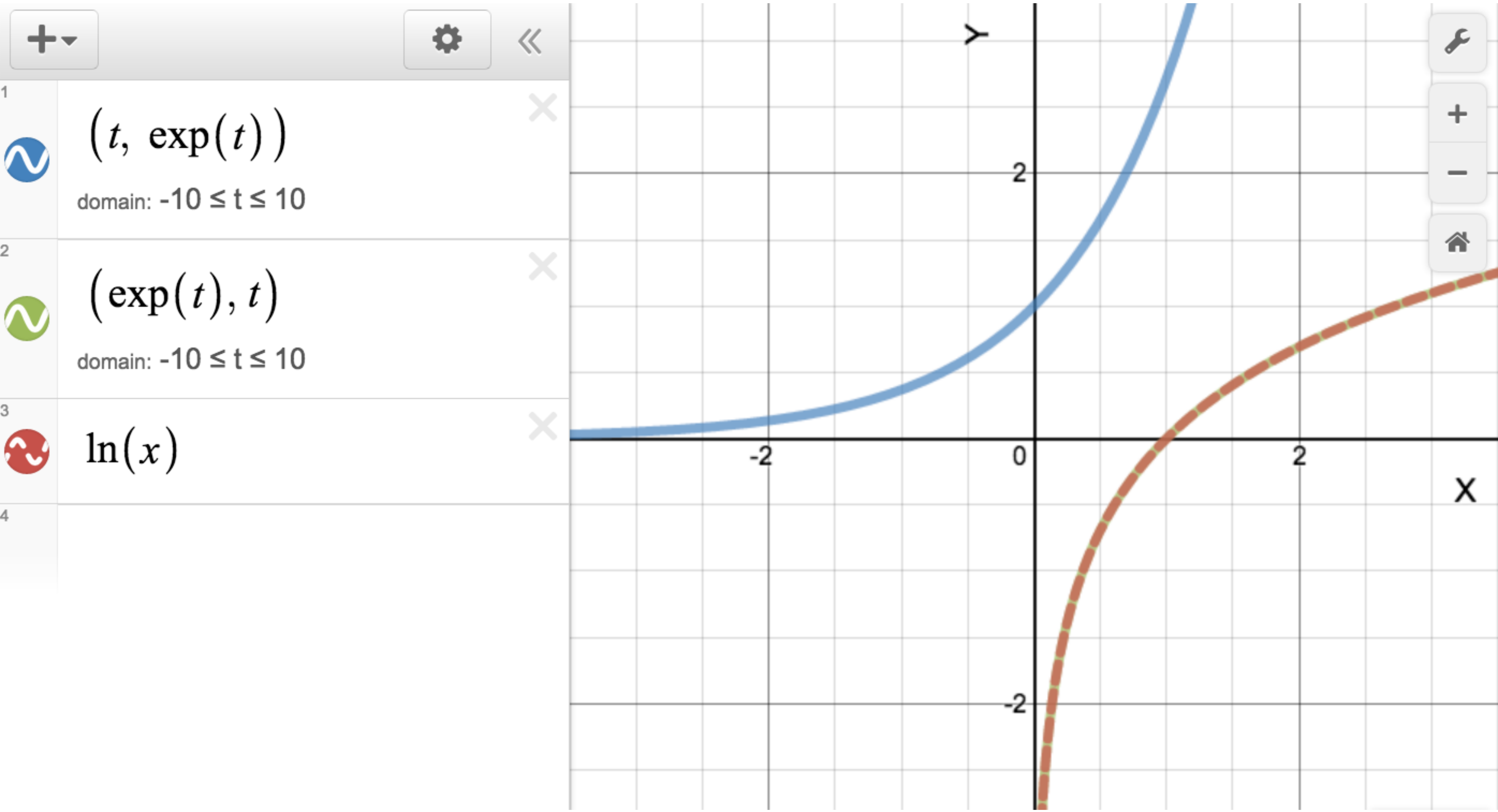
$$x = t^2$$

$$y = t$$

Παράδειγμα



Παράδειγμα



Άσκηση 2

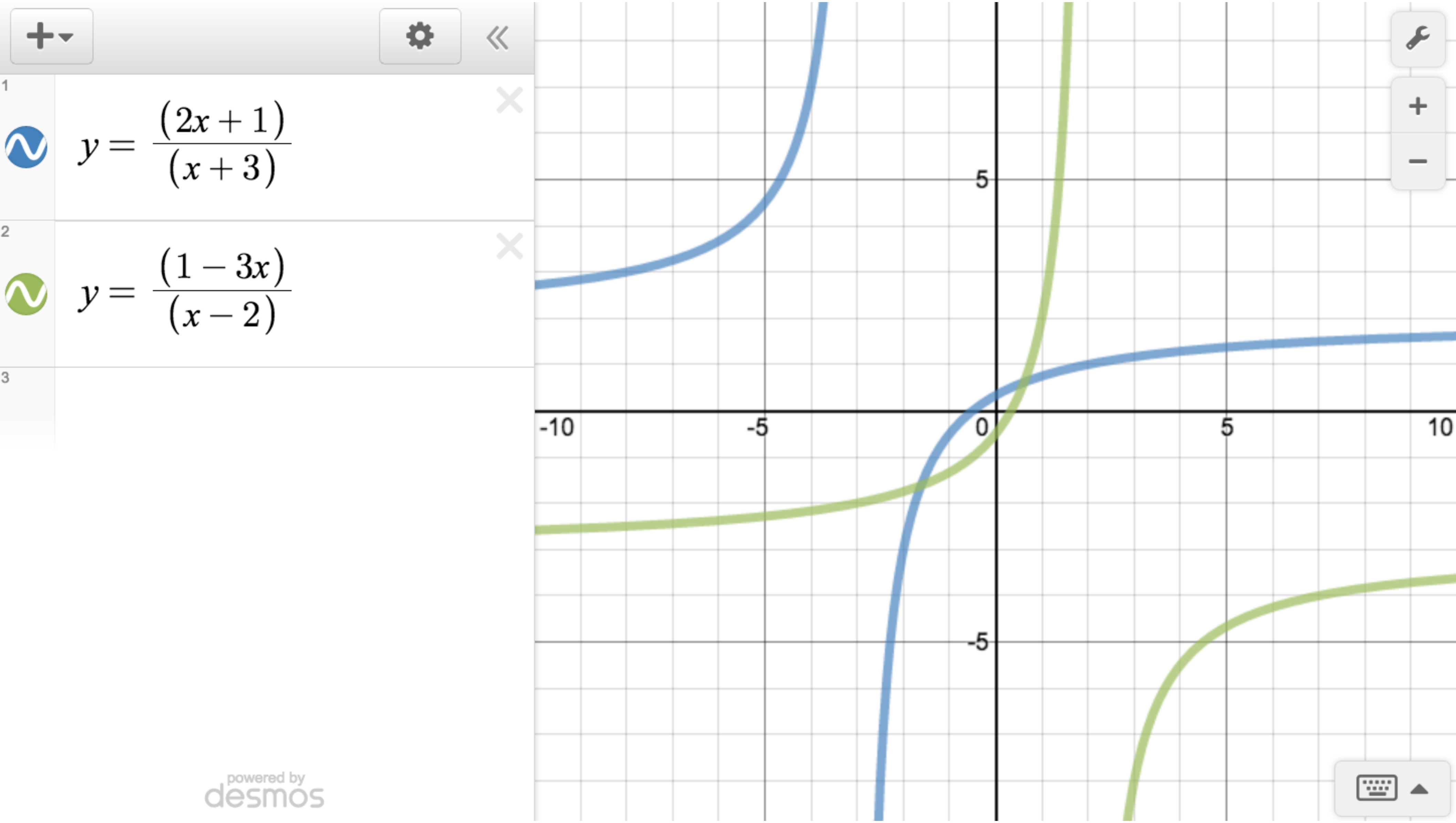
Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$$

Βρείτε την f^{-1} και επαληθεύστε ότι

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Άσκηση 2



Άσκηση 3

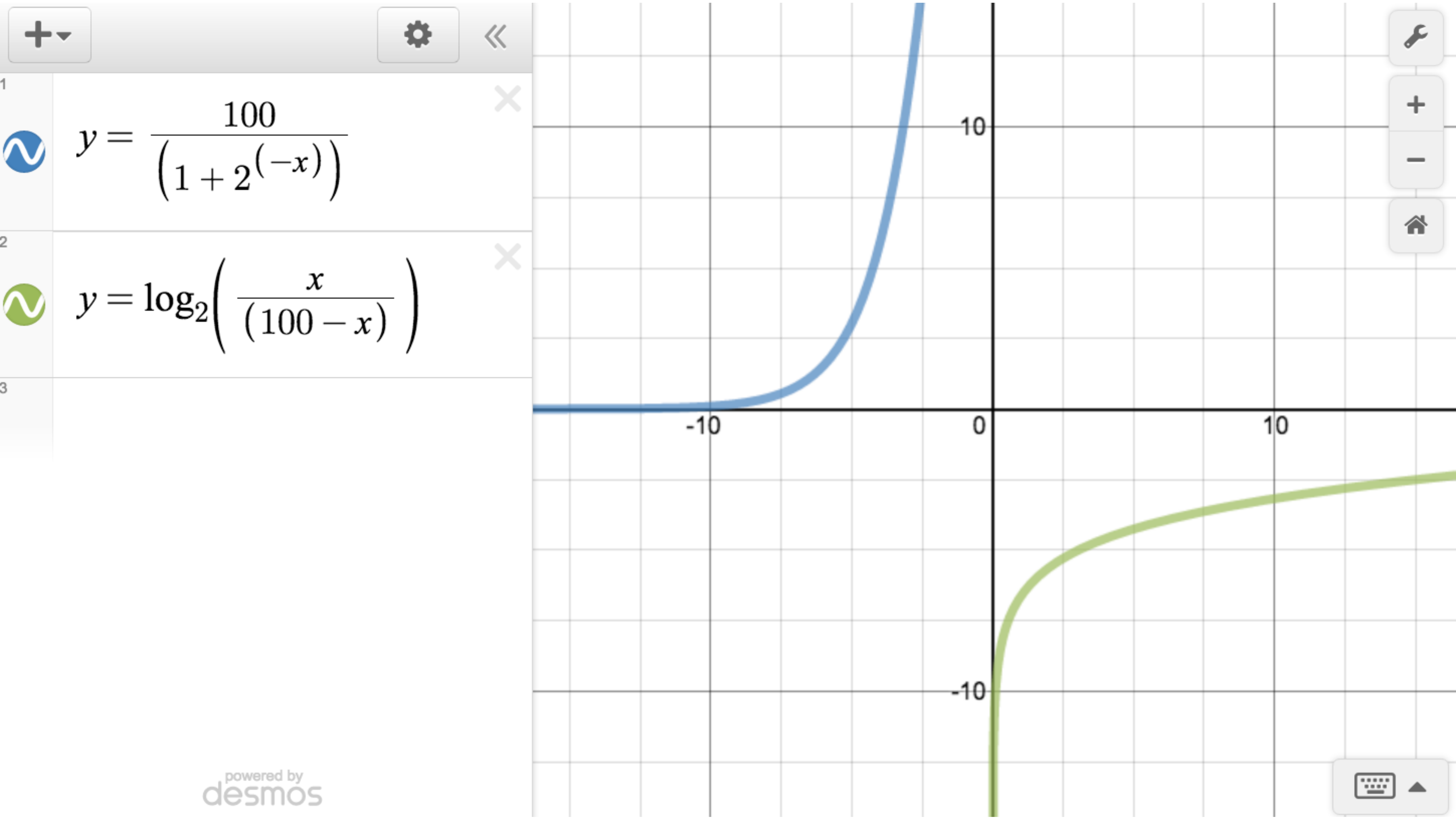
Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{100}{1+2^{-x}}$$

Βρείτε την f^{-1} και επαληθεύστε ότι

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Άσκηση 3



$y = \frac{100}{\left(1 + 2^{(-x)}\right)}$
$y = \log_2\left(\frac{x}{(100 - x)}\right)$
10
-10
0
10
-10
powered by
desmos

Άσκηση 4

Έστω $x = a \sec t$ και $y = b \tan t$.

α) Βρείτε τη γραφική παράσταση στο παραμετρικό διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$ για $a = 2$, $b = 3$.

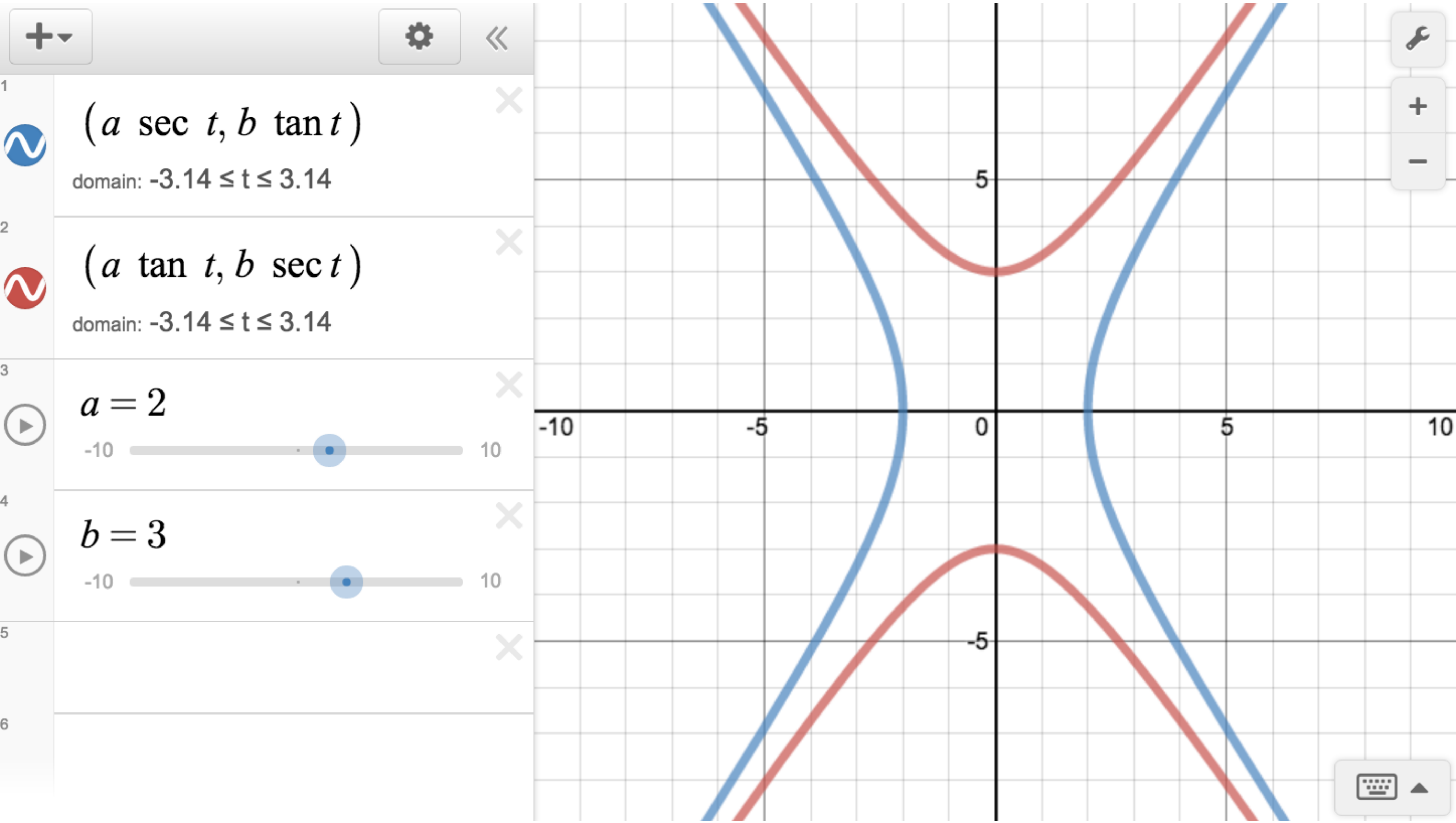
β) Επαναλάβετε για $x = a \tan t$ και $y = b \sec t$.

γ) Τι παρατηρείτε για $a = b$;

δ) Αποδείξτε αλγεβρικά ότι:

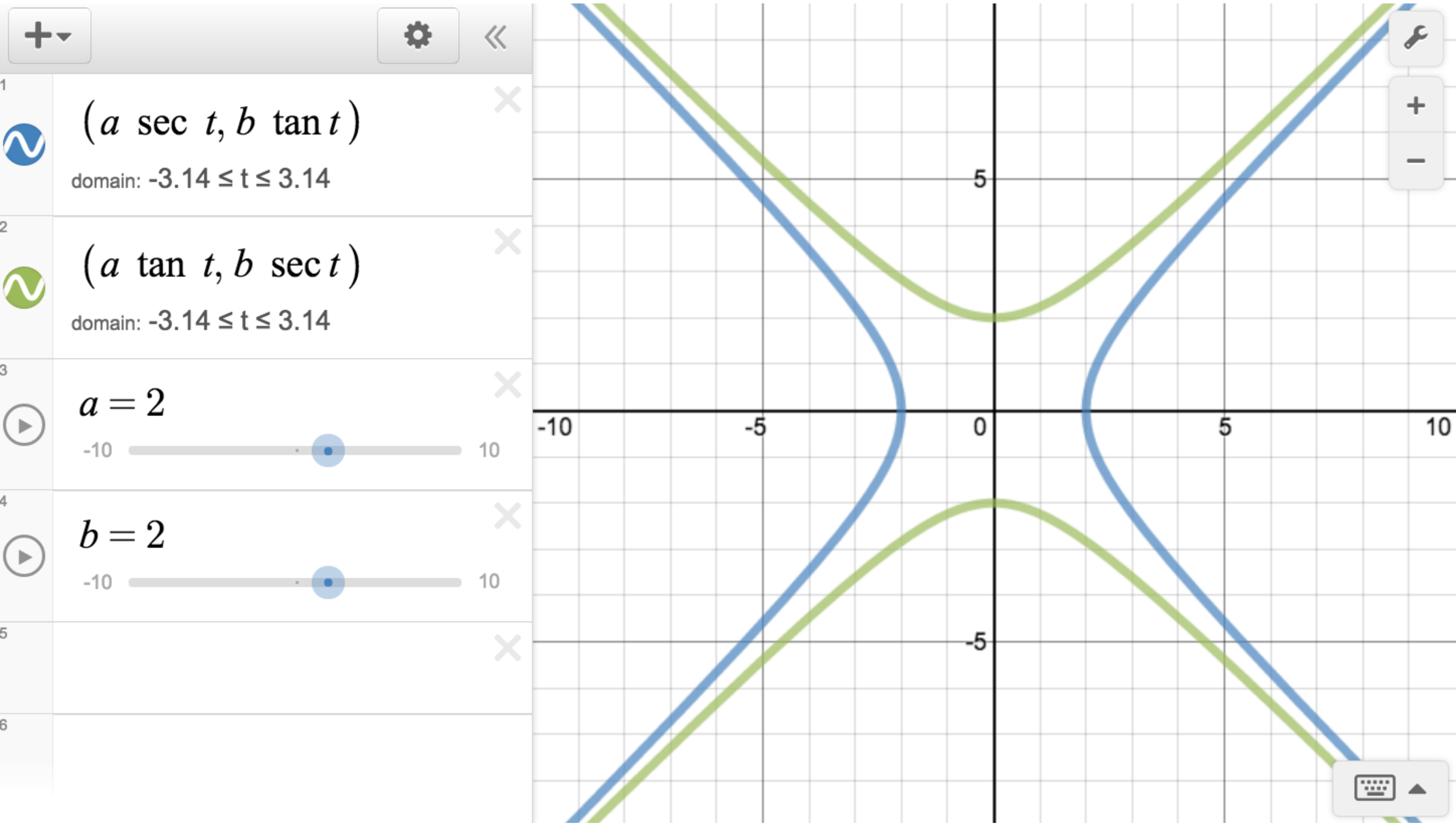
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Άσκηση 4



$(a \sec t, b \tan t)$
domain: $-3.14 \le t \le 3.14$
$(a \tan t, b \sec t)$
domain: $-3.14 \le t \le 3.14$
$a = 2$
-10
10
$b = 3$
-10
10
-10
-5
0
5
10
5
-5

Άσκηση 4



$(a \sec t, b \tan t)$
domain: -3.14 ≤ t ≤ 3.14
$(a \tan t, b \sec t)$
domain: -3.14 ≤ t ≤ 3.14
$a = 2$
-10
10
$b = 2$
-10
10
-10
-5
0
5
10
5
-5

Άσκηση 5

Σχεδιάστε την οφιοειδή καμπύλη του Νεύτωνα

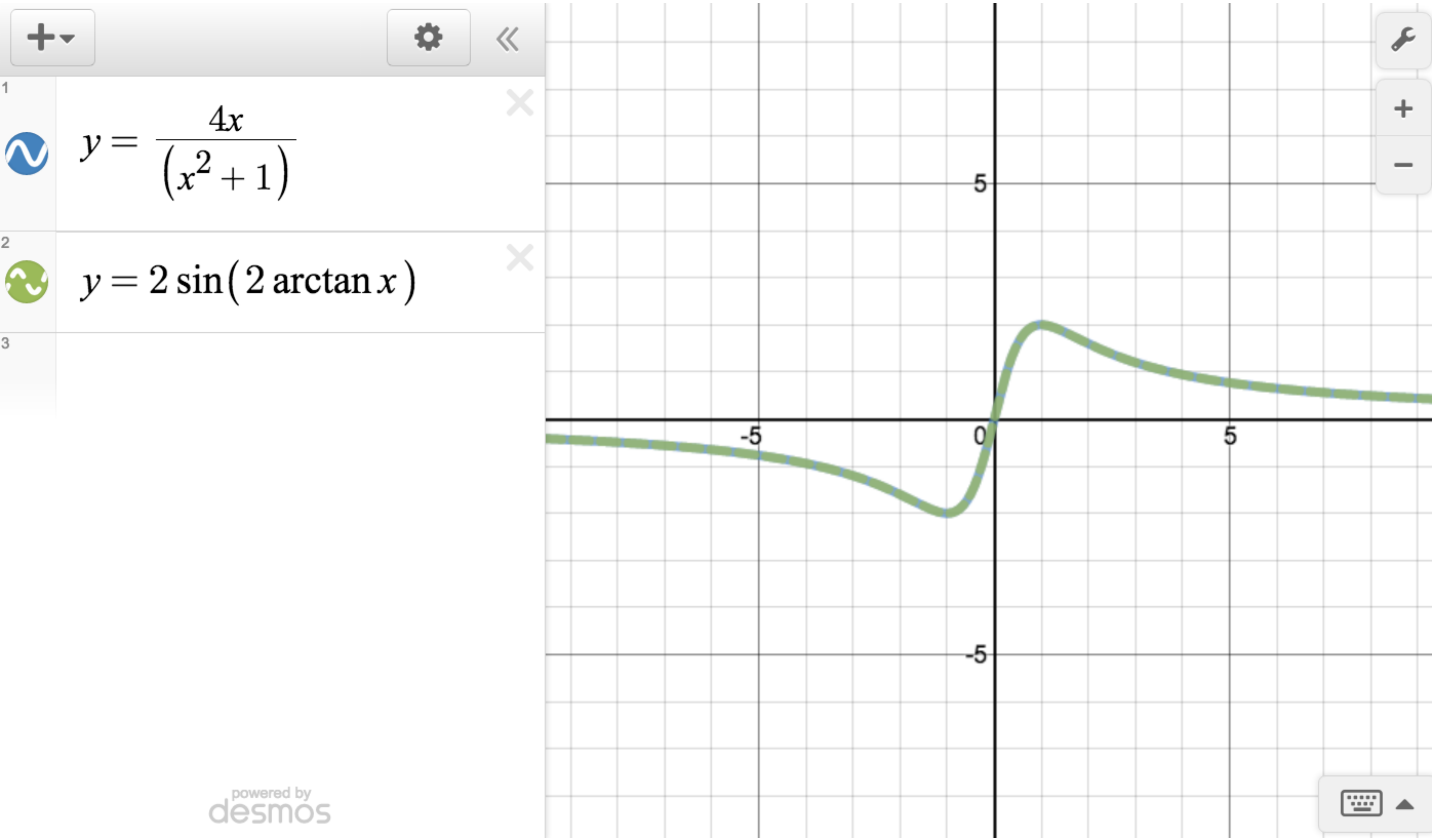
$$y = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

Κατόπιν, σχεδιάστε και την καμπύλη

$$y = 2\sin(2\tan^{-1}x)$$

Τι παρατηρείτε; Εξηγείστε.

Άσκηση 5



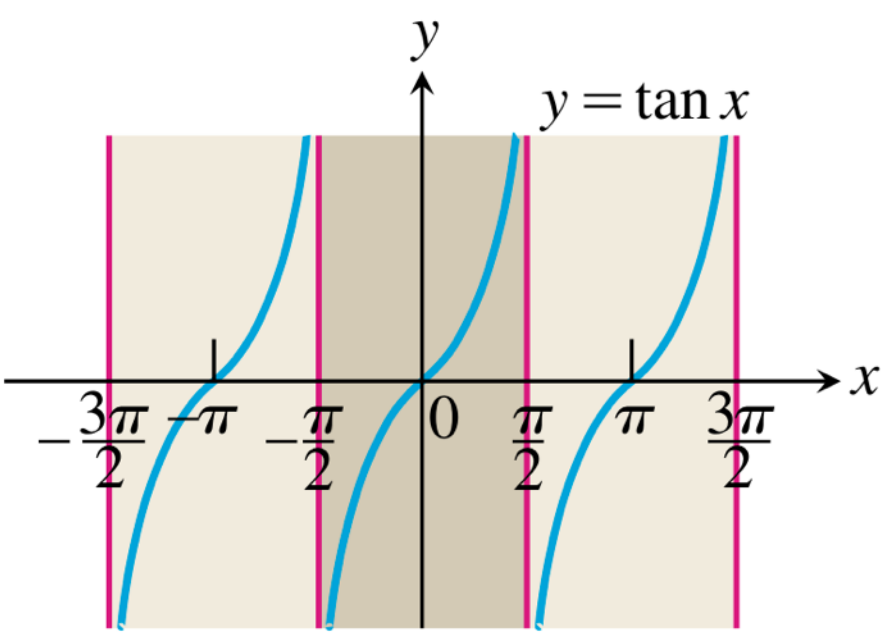
1
$y = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)}$
2
$y = 2\sin\left(2\arctan x\right)$
3
powered by
desmos
5
-5
0
5
-5

Άσκηση 6

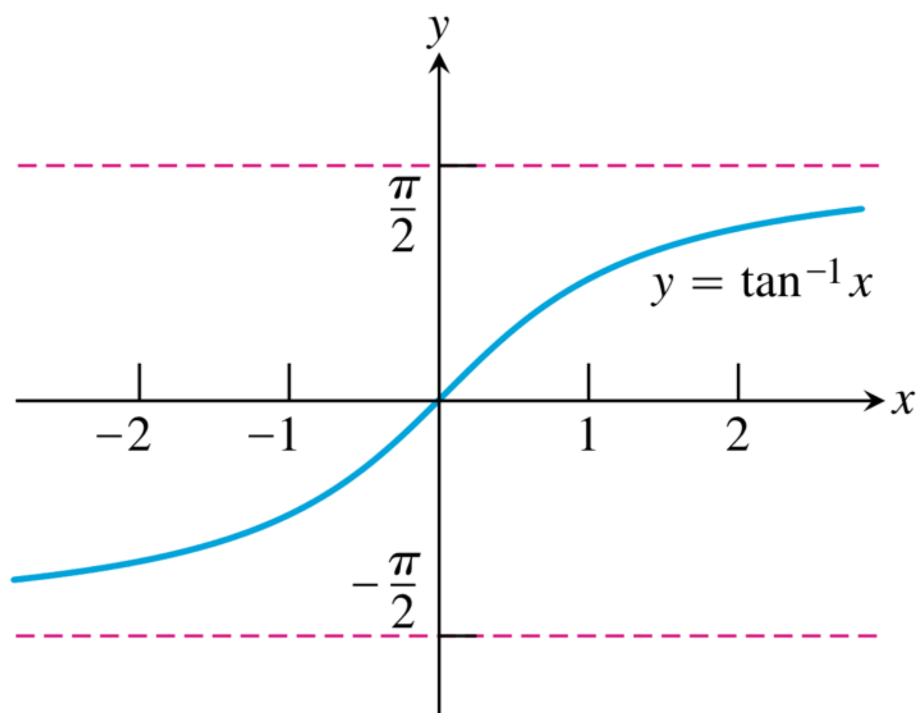
Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών των συναρτήσεων

$$y = \tan^{-1}(\tan x) \quad \text{και} \quad y = \tan(\tan^{-1} x)$$

Υπενθύμιση:



Πεδίο ορισμού: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Πεδίο τιμών: $-\infty < y < \infty$



Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$

Πεδίο τιμών: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Άσκηση 6

Η $y = \tan x$ *δεν είναι αμφιμονοσήμαντη* συνάρτηση, αλλά περιοδική, με πεδίο ορισμού $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$, … και πεδίο τιμών $-\infty < x < \infty$.

Στην περιοχή $-\infty < x < \infty$ η $y = \tan^{-1} x$ παίρνει τιμές $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Άρα, η $y = \tan^{-1} (\tan x)$ συνολικά έχει:

πεδίο ορισμού: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$, …

πεδίο τιμών: $-\pi/2 < x < \pi/2$

Άσκηση 6

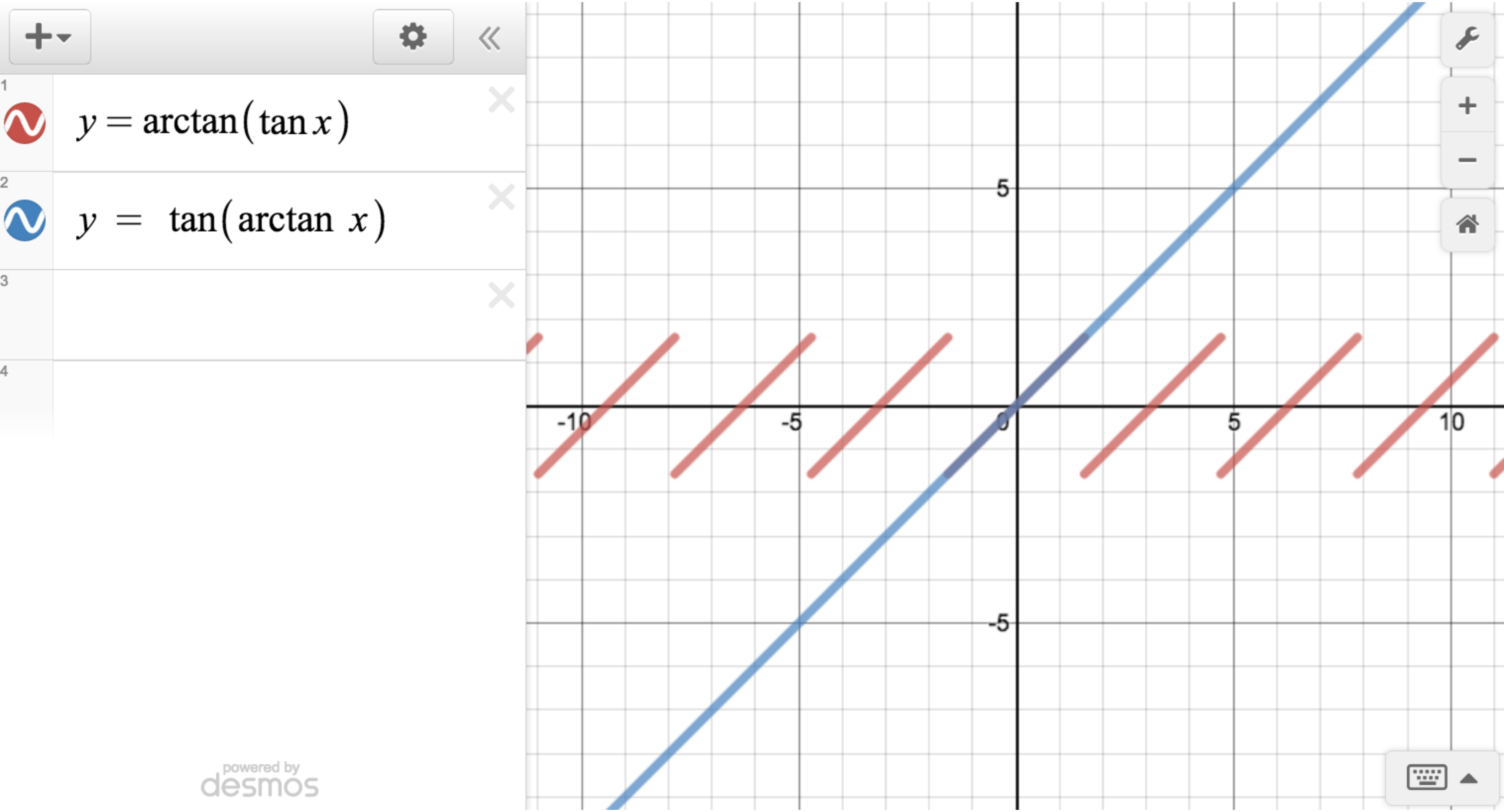
Η $y = \tan^{-1} x$ *είναι αμφιμονοσήμαντη* συνάρτηση στο πεδίο ορισμού $-\infty < x < \infty$ με πεδίο τιμών $-\pi/2 < x < \pi/2$. Σε αυτή την περιοχή, η $y = \tan x$ έχει πεδίο τιμών $-\infty < x < \infty$.

Άρα, η $y = \tan(\tan^{-1} x)$ συνολικά έχει:

πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$

πεδίο τιμών: $-\infty < x < \infty$

Άσκηση 6



Άσκηση 6

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η σχέση

$$\tan^{-1}(\tan x) = x$$

ισχύει μόνο στο πεδίο ορισμού $-\pi/2 < x < \pi/2$, όπου η $y = \tan x$ είναι αμφιμονοσήμαντη και μπορεί να αντιστραφεί.

Ενώ, η σχέση

$$\tan(\tan^{-1} x) = x$$

ισχύει στο πεδίο ορισμού $-\infty < x < \infty$, διότι σε αυτό η $y = \tan^{-1} x$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

Άσκηση 6

Οι συναρτήσεις $y = \tan x$ και $y = \tan^{-1} x$ αποτελούν *ζεύγος αντίστροφων συναρτήσεων* (η μία αντίστροφη της άλλης) και ισχύει ταυτόχρονα

$$\tan^{-1}(\tan x) = \tan(\tan^{-1} x) = x$$

μόνο στην κοινή περιοχή $-\pi/2 < x < \pi/2$ *όπου και οι δύο είναι αμφιμονοσήμαντες*.

(βλ. ταύτηση κόκκινης και μπλε γραμμής στο προηγούμενο σχήμα)

Παράδειγμα