ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 3ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Η εκθετική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα ενός συμμετρικού κι ενός αντισυμμετρικού μέρους, δηλ.

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ή

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

όπου θέσαμε:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Στη συνέχεια, μπορούμε να ορίσουμε:

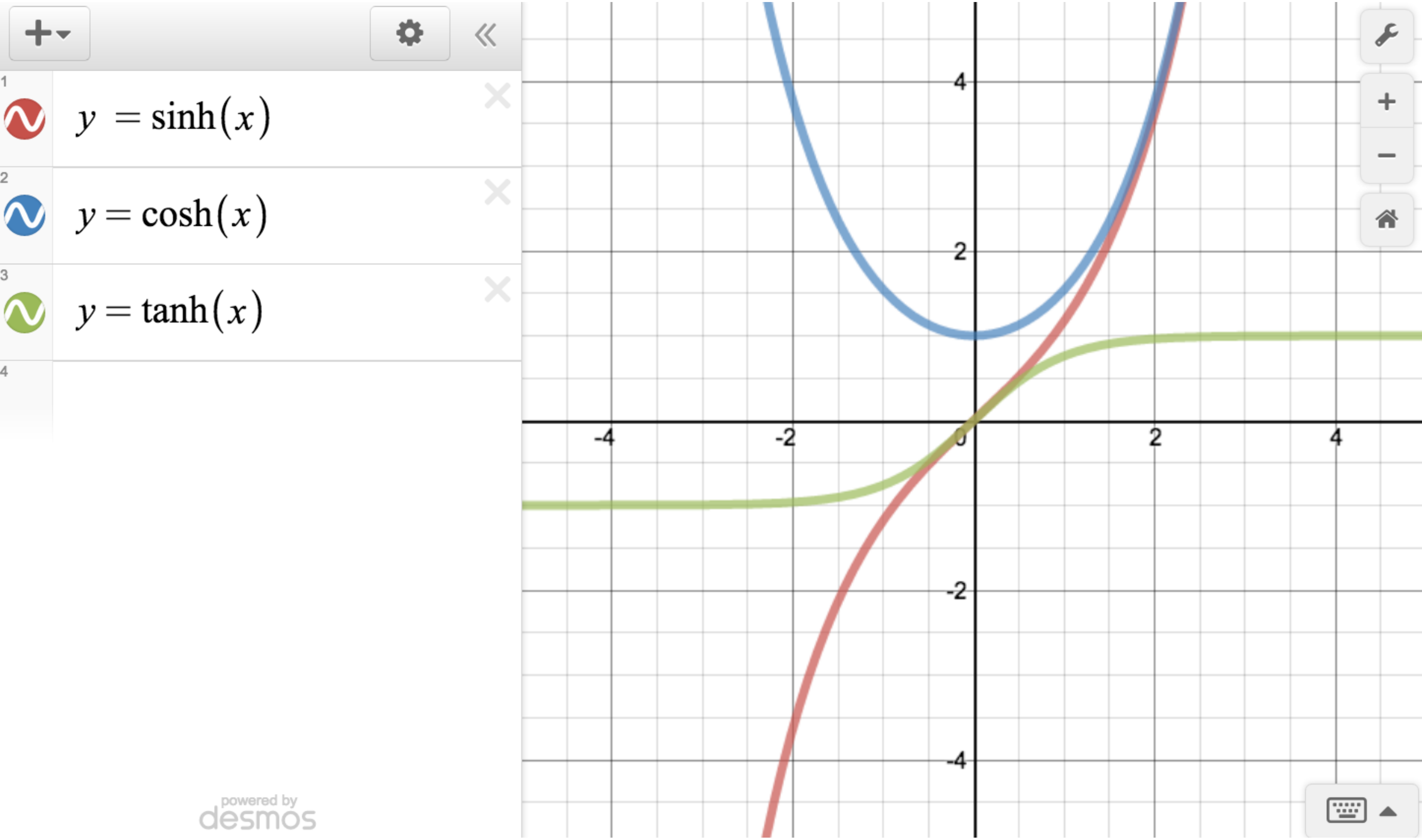
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

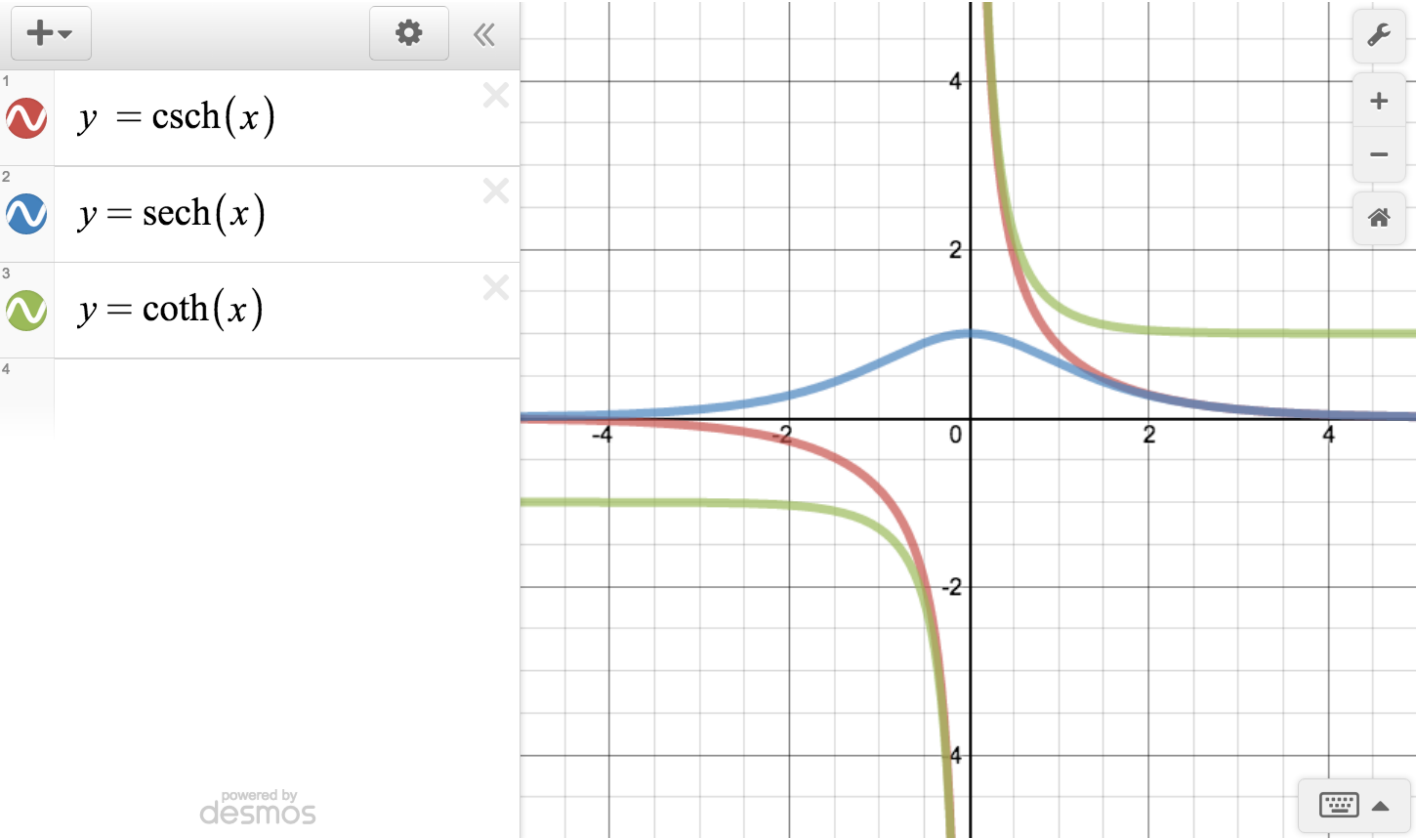
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

Υπερβολικές Συναρτήσεις



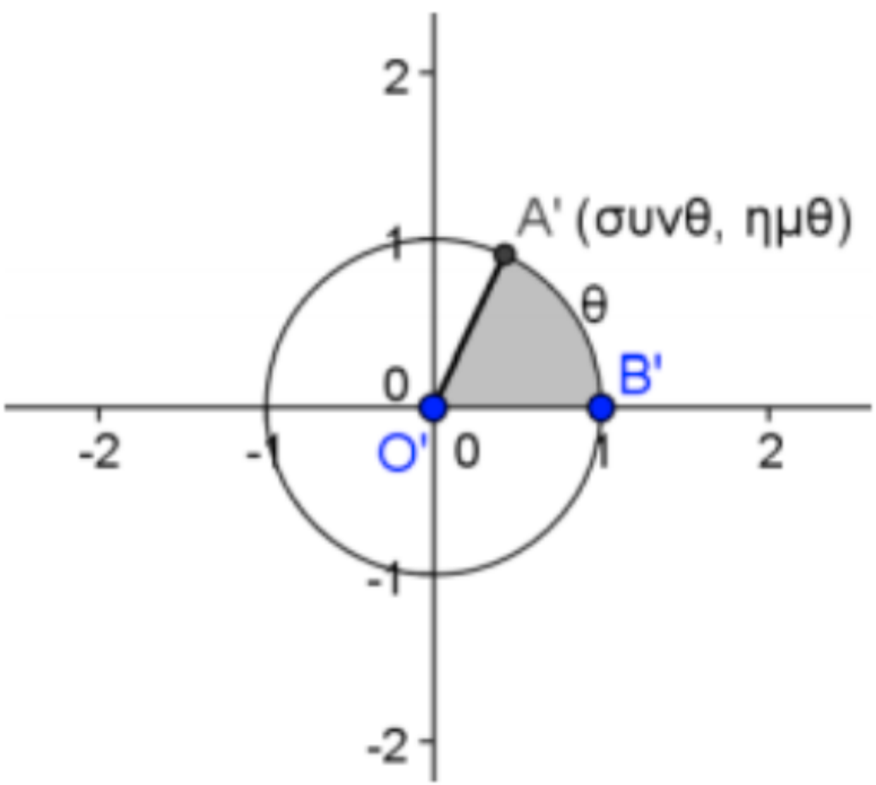
Υπερβολικές Συναρτήσεις

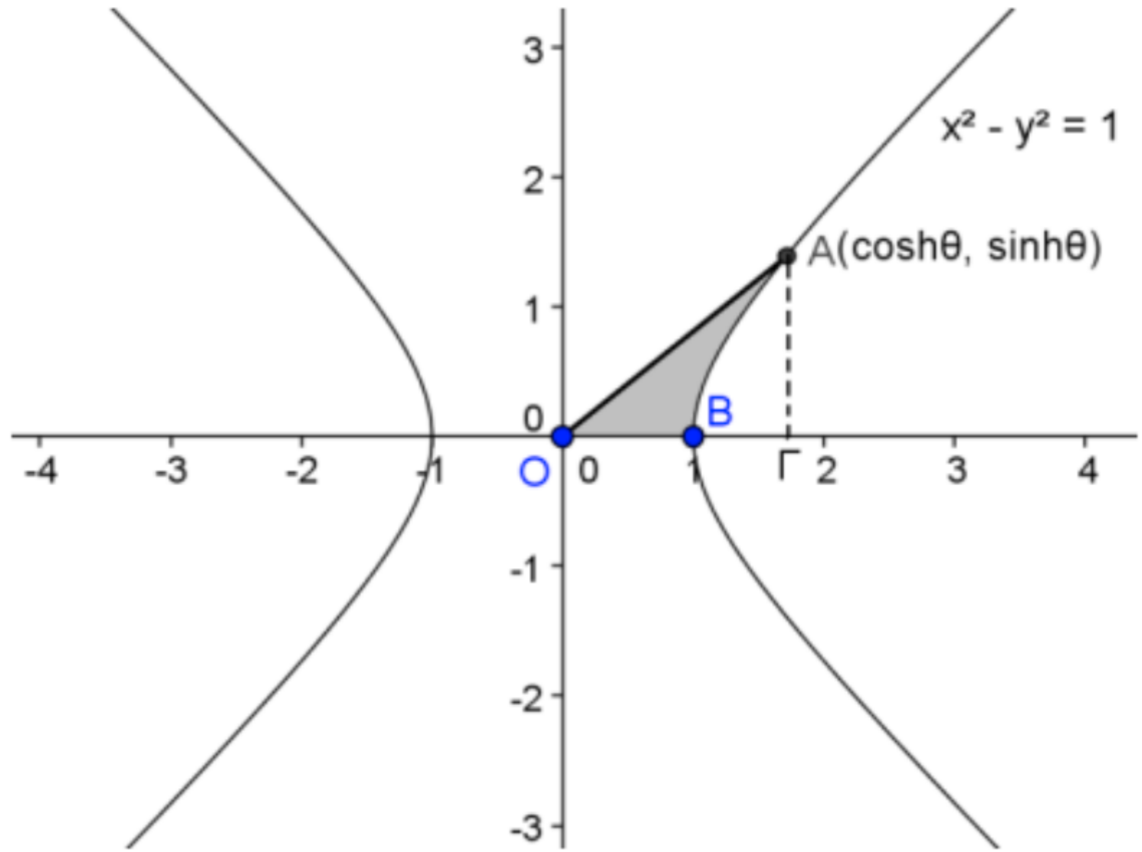


Γεωμετρική Ερμηνεία

Στον **κύκλο** $x^2 + y^2 = 1$, η γωνία $\boldsymbol{\theta}$ ισούται με το διπλάσιο του εμβαδού του *κυκλικού τομέα* ΟΑ΄Β΄.

Σε μια **υπερβολή** $x^2 - y^2 = 1$, η γωνία $\boldsymbol{\theta}$ ισούται με το διπλάσιο του εμβαδού του *υπερβολικού τομέα* ΟΑΒ.

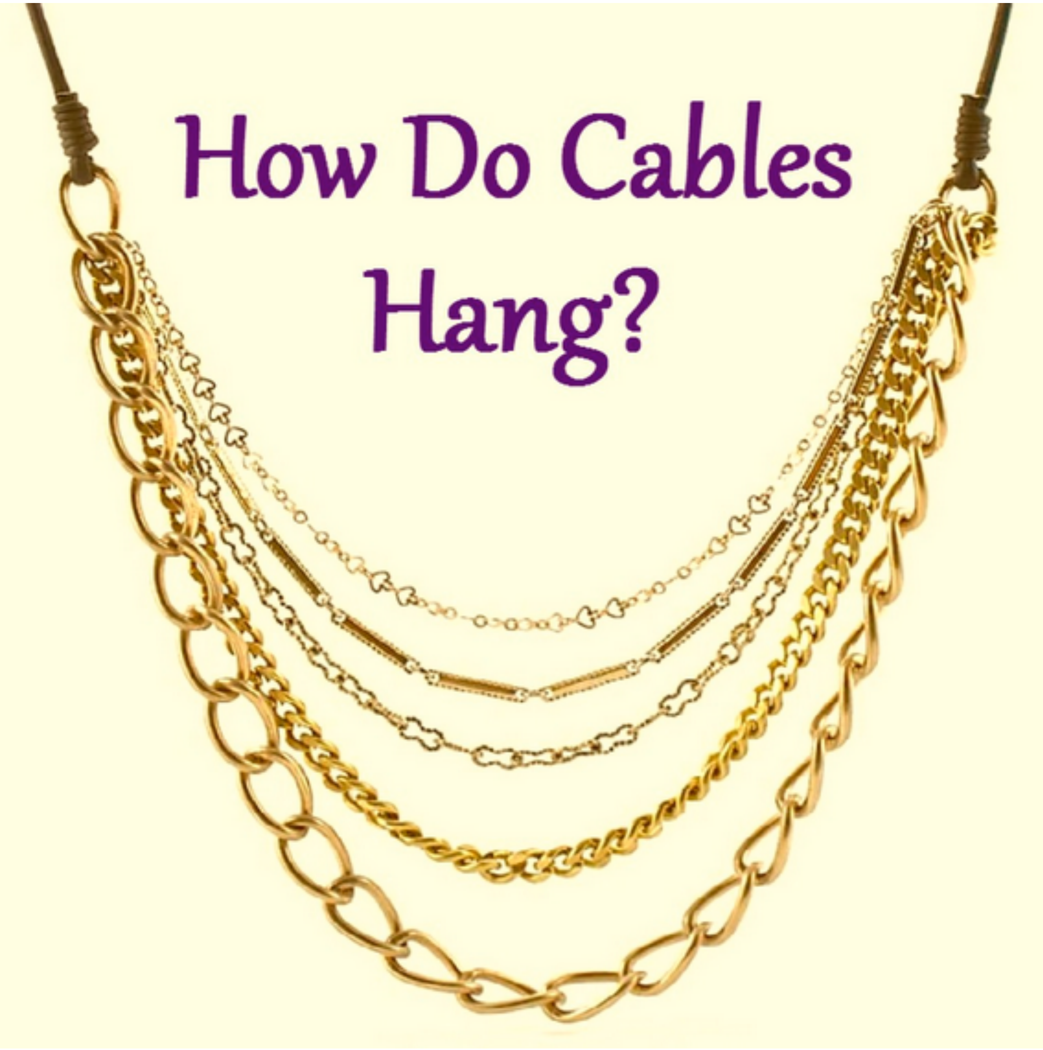




Εφαρμογές

1690: Jakob Bernoulli

Ποιο είναι το σχήμα μιας καδένας που κρέμεται ελεύθερα ανάμεσα σε δυο σημεία;



Εφαρμογές

1691: C. Huygens / G. W. Leibnitz / Johann Bernoulli

$$y = \frac{1}{\kappa} \cosh \kappa x$$

όπου το κ εξαρτάται από τις φυσικές ιδιότητες της καδένας.

Εξήγηση: το σχήμα αυτό *ελαχιστοποιεί τη δυναμική ενέργεια* σε ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο.

Εφαρμογές στην Αρχιτεκτονική

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Οι συμμετρίες είναι:

$$
\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh x \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\tanh(-x) &= -\tanh x \\
\coth(-x) &= -\coth x \\
\mathrm{sech}(-x) &= \mathrm{sech}\ x \\
\mathrm{scsh}(-x) &= -\mathrm{scsh}\ x
\end{aligned}
$$

Υπερβολικές Συναρτήσεις

1. Η συνάρτηση $f(x)=\sinh x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού $f^{'}(x)=\cosh x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της, η οποία μπορεί να προσδιοριστεί από την επίλυση της εξίσωσης $y=\sinh x$ ως προς x. Έχουμε

$$y=\sinh x \Leftrightarrow y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^{x}-\frac{1}{e^{x}}-2y=0 \Leftrightarrow (e^{x})^{2}-2ye^{x}-1=0$$

$$\Leftrightarrow e^{x}=y+\sqrt{y^{2}+1} \text{, για κάθε } y\in\mathbb{R} \text{ (αφού } y+\sqrt{y^{2}+1}=e^{x}>0)$$

$$\Leftrightarrow x=\ln\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right),\ y\in\mathbb{R}.$$

Άρα έχουμε τη συνάρτηση

$$\boxed{\sinh^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\to y=\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right).}$$

Υπερβολικές Συναρτήσεις

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right); x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right); |x| < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right); 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right); |x| > 1$$

Υπερβολικές Συναρτήσεις

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x},$$

$$1 - \coth^2 x = -\frac{1}{\sinh^2 x},$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

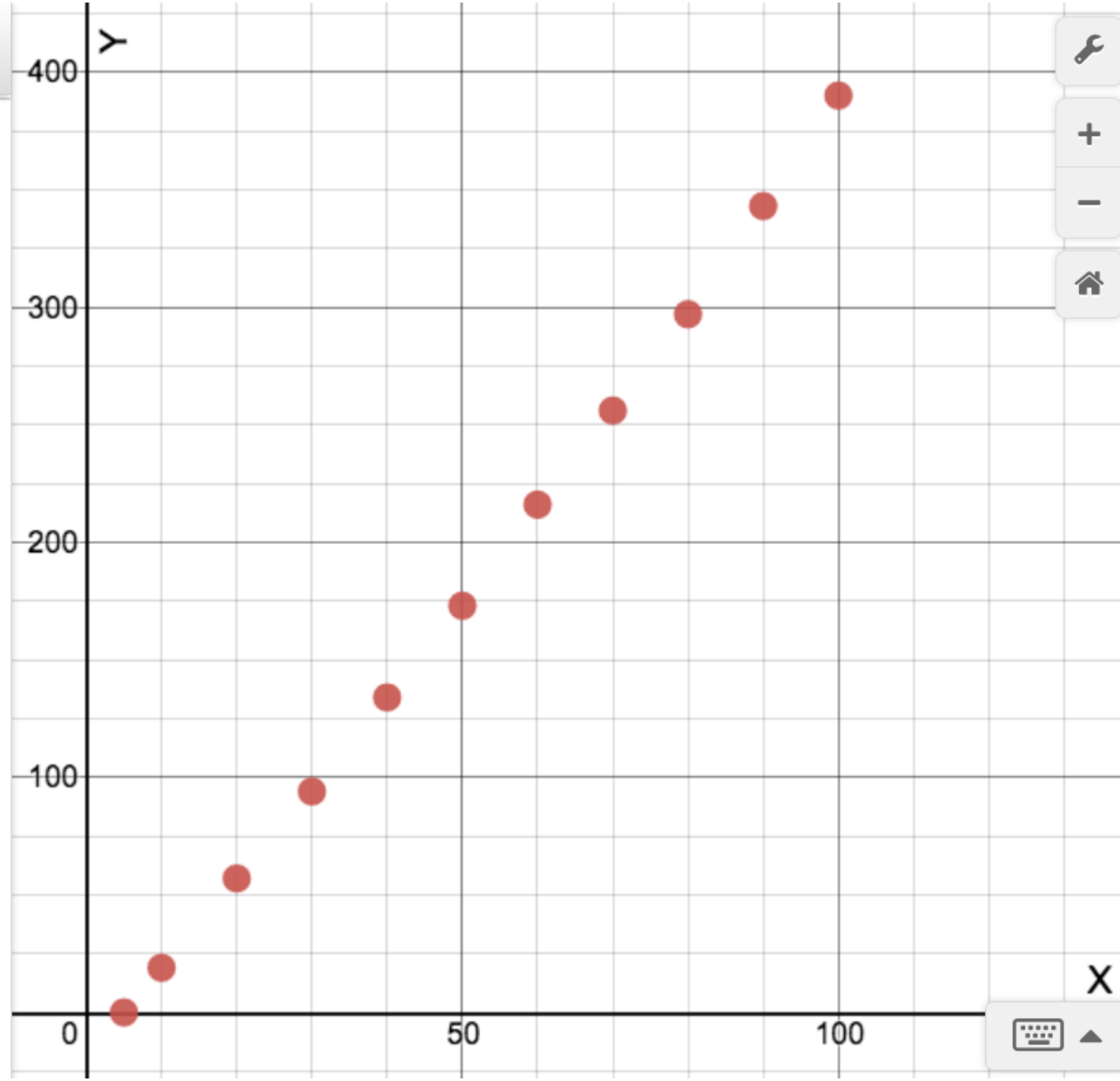
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

Παλινδρόμιση

x_1	y_1
5	0
10	19
20	57
30	94
40	134
50	173
60	216
70	256
80	297
90	343
100	390



Παλινδρόμιση

$y_1 \sim m x_1$

STATISTICS

$R^2 = 0.988$

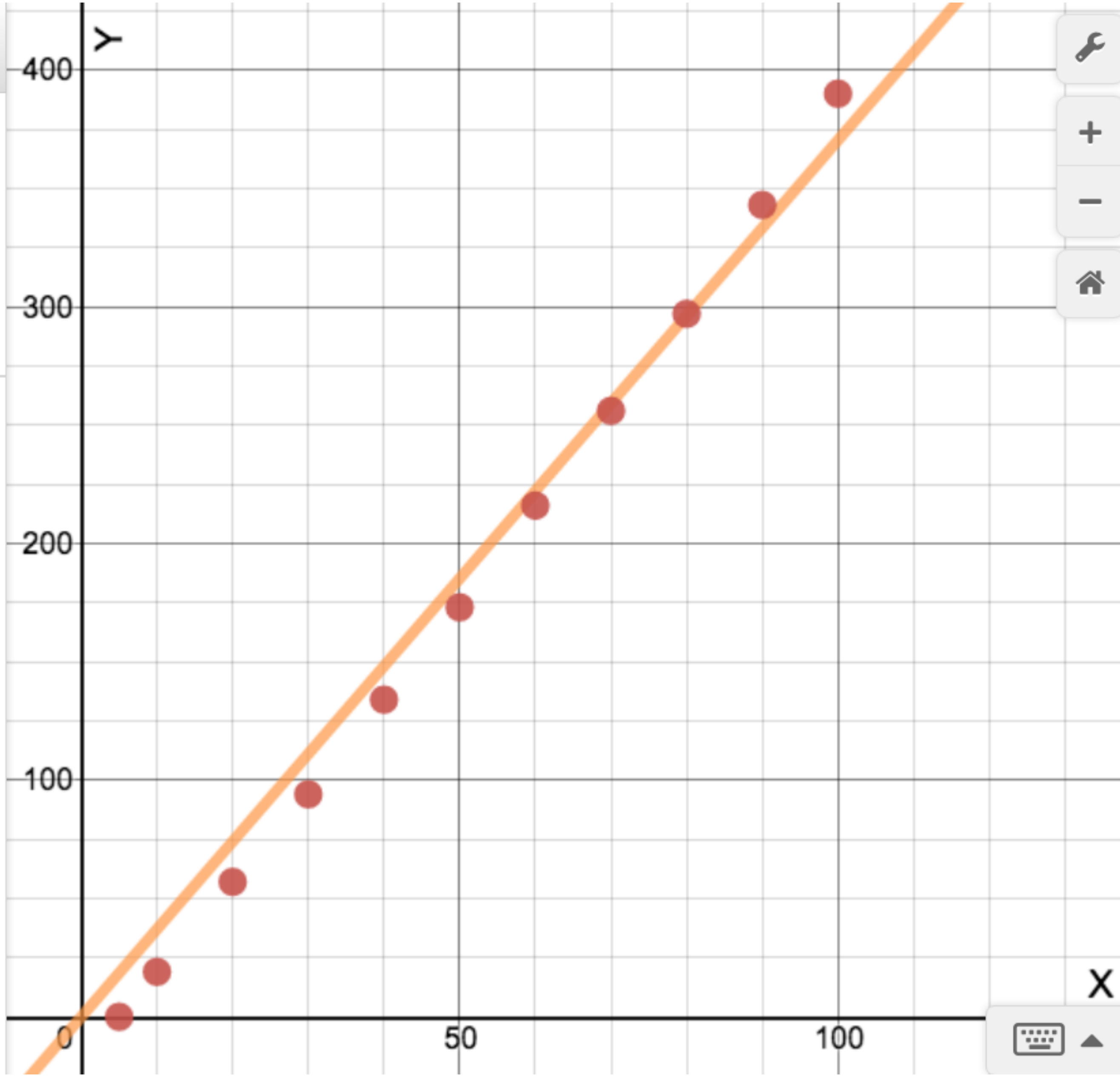
RESIDUALS

e_1 plot

PARAMETERS

$m = 3.7033$

x_1	y_1
5	0
10	19
20	57
30	94
40	134
50	173
60	216
70	256



Παλινδρόμιση

$$y_1 \sim mx_1 + b$$

STATISTICS

$r^2 = 0.999$

$r = 0.999$

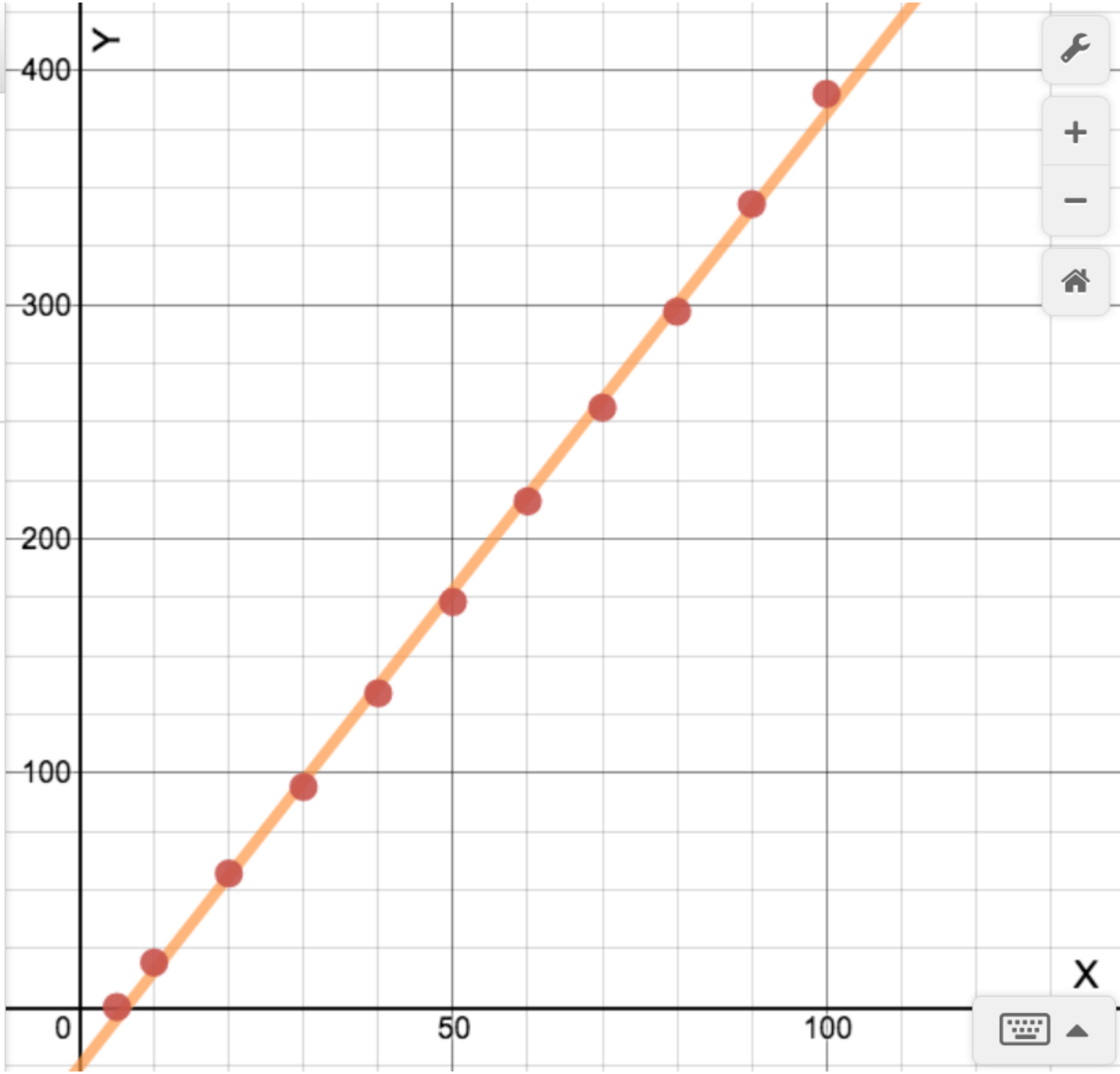
RESIDUALS

e_1 plot

PARAMETERS

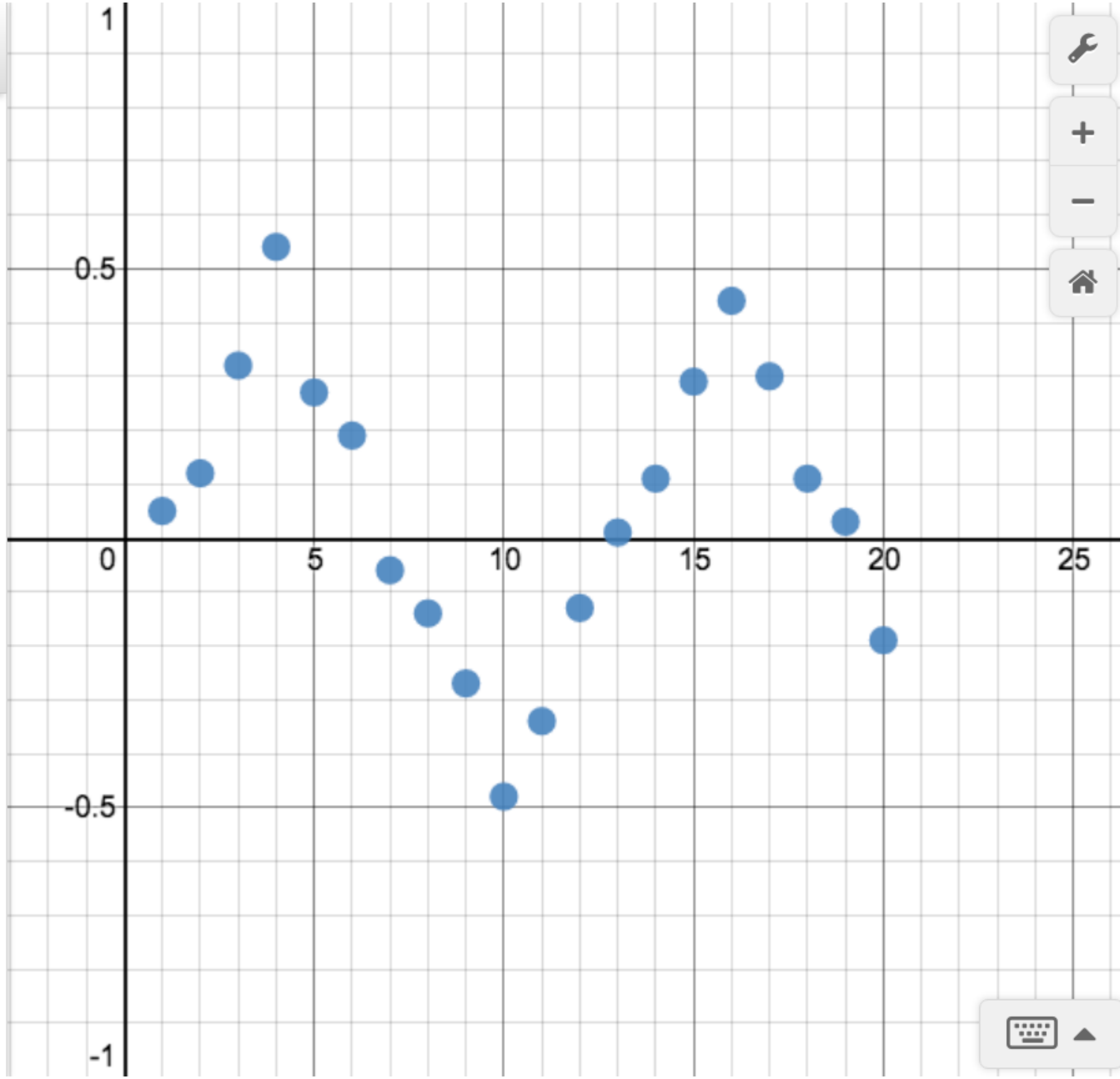
$m = 4.0693$ $\quad b = -25.407$

x_1	y_1
5	0
10	19
20	57
30	94
40	134
50	173
60	216

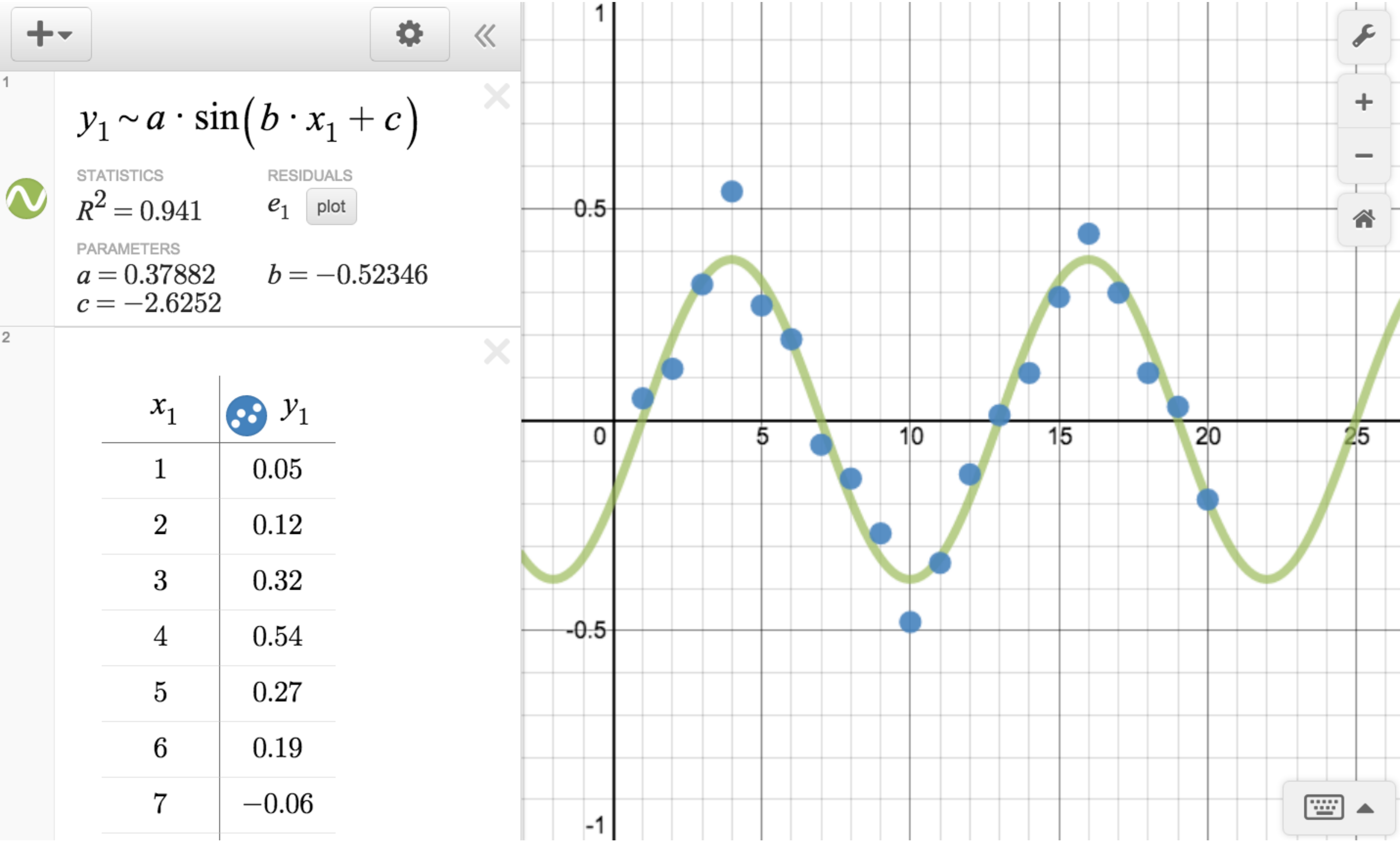


Παλινδρόμιση

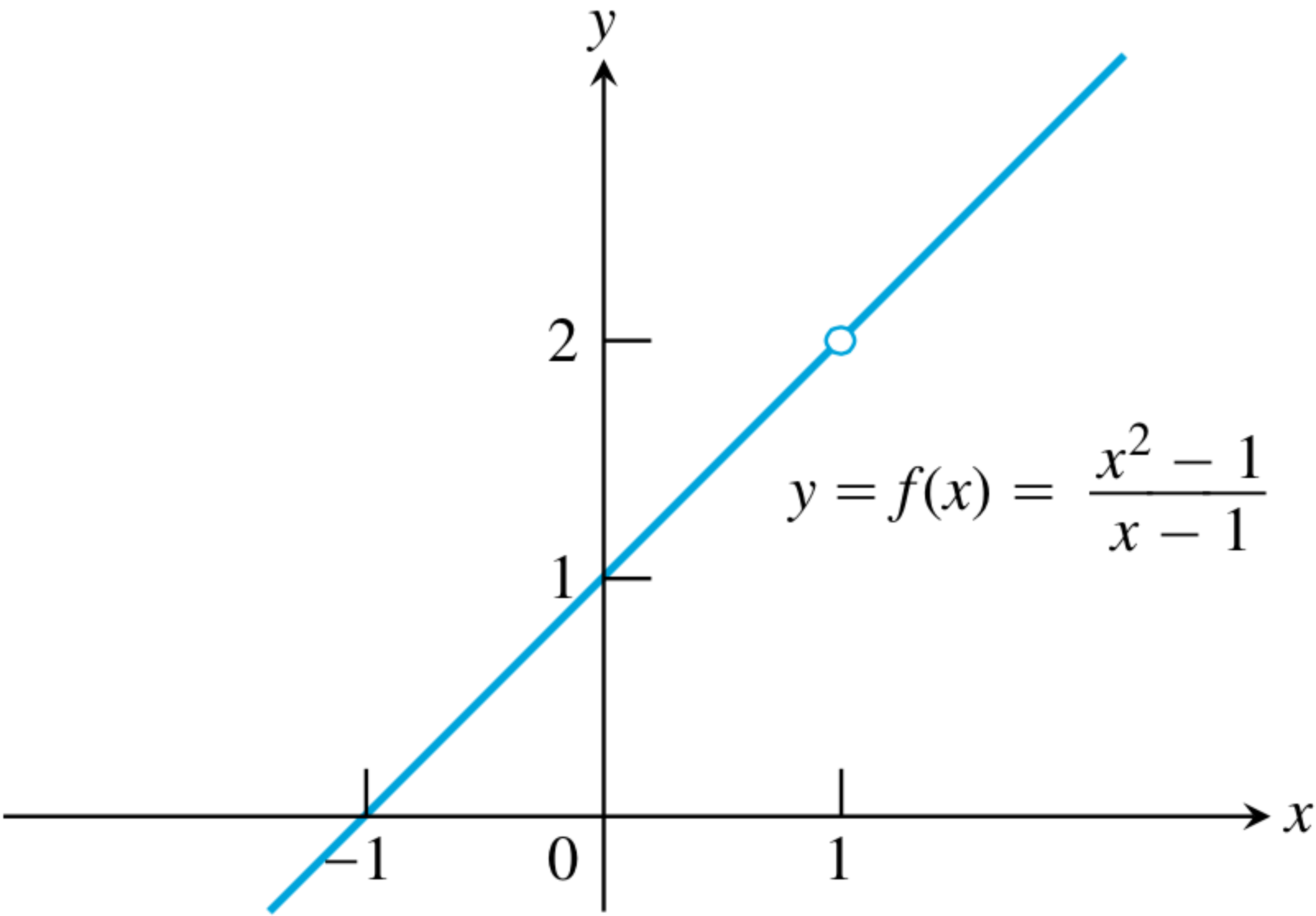
x_1	y_1
1	0.05
2	0.12
3	0.32
4	0.54
5	0.27
6	0.19
7	−0.06
8	−0.14
9	−.27
10	−0.48
11	−0.34
12	−0.13



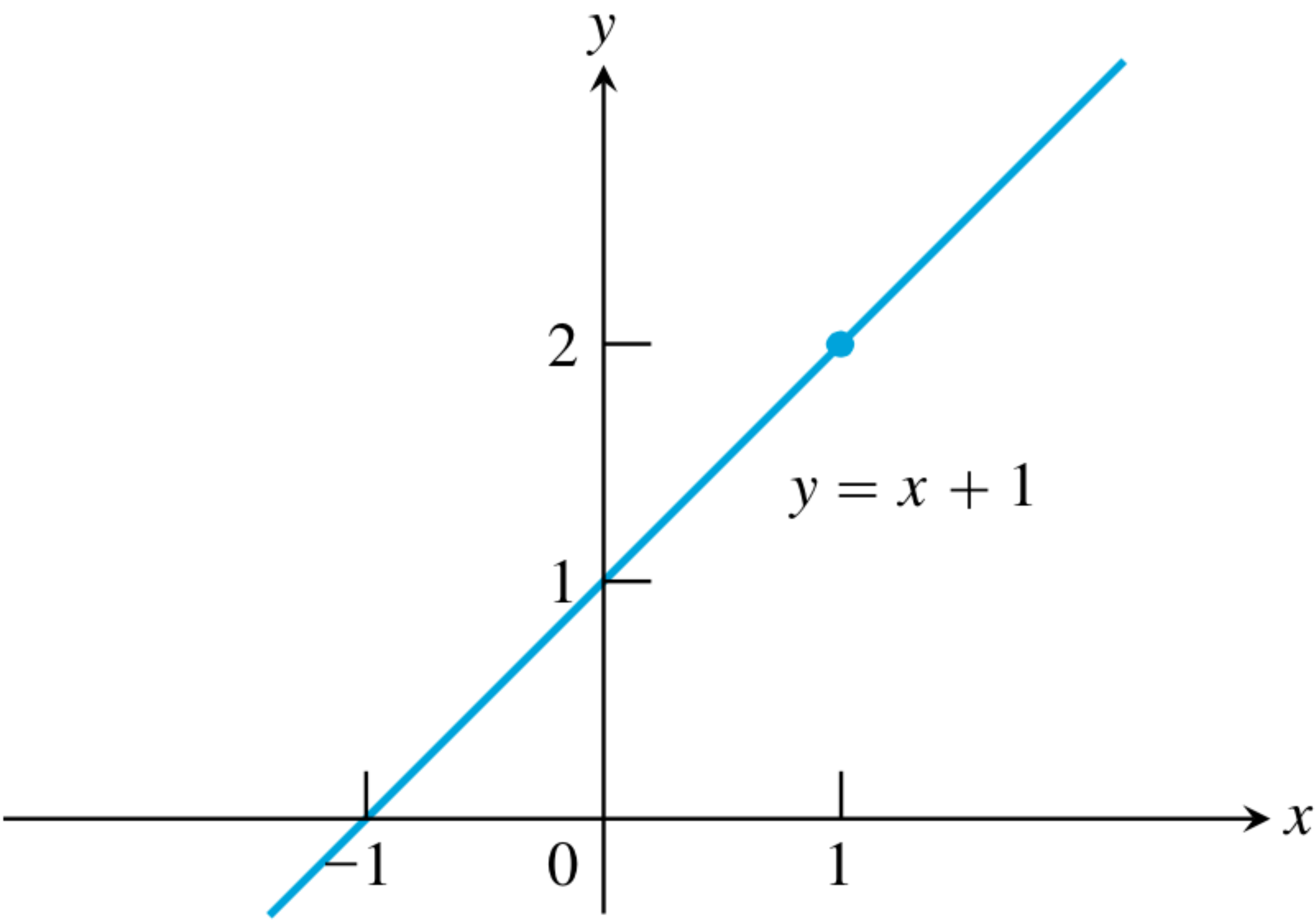
Παλινδρόμιση



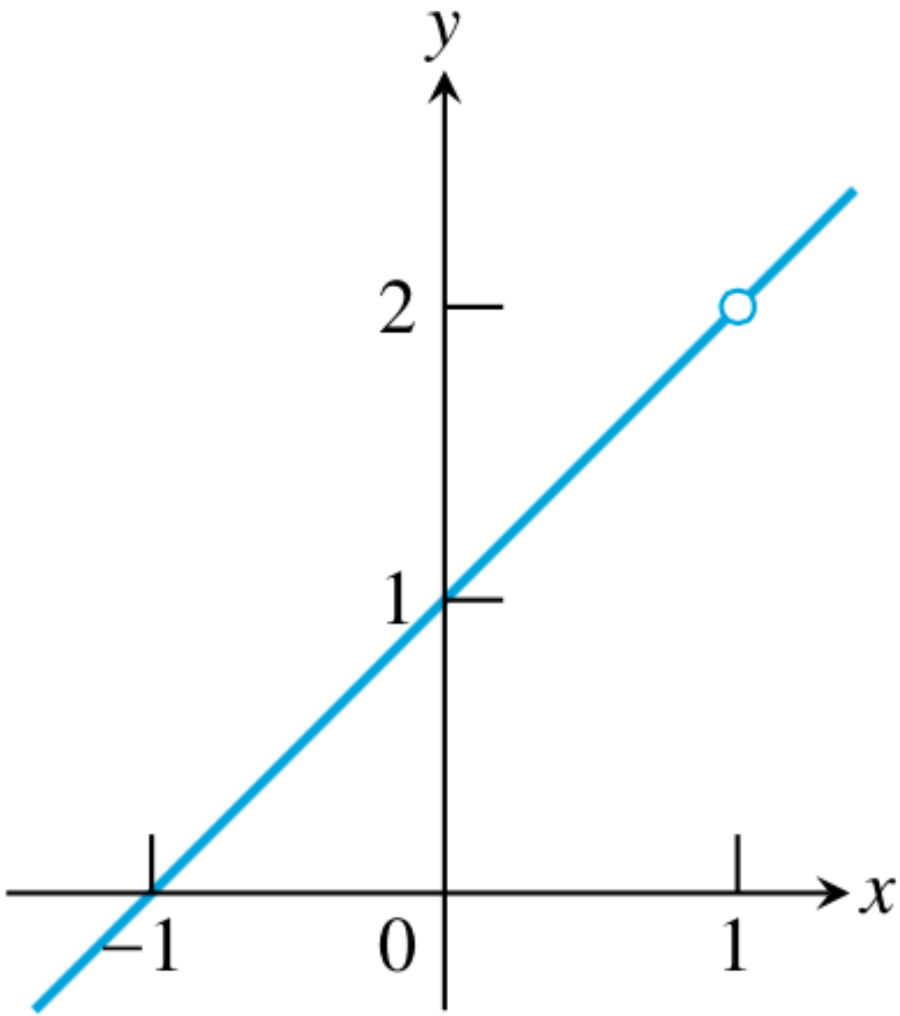
Συμπεριφορά συνάρτησης κοντά σε σημείο



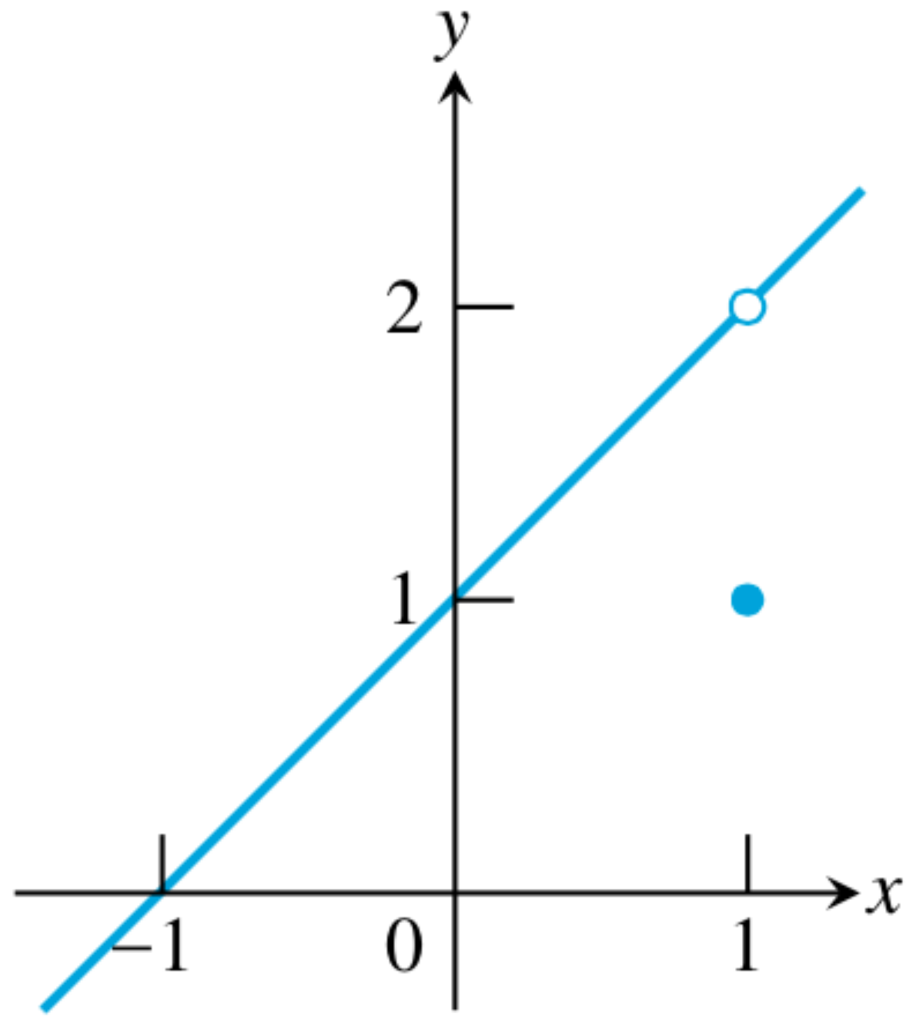
Συμπεριφορά συνάρτησης κοντά σε σημείο



Συμπεριφορά συνάρτησης κοντά σε σημείο

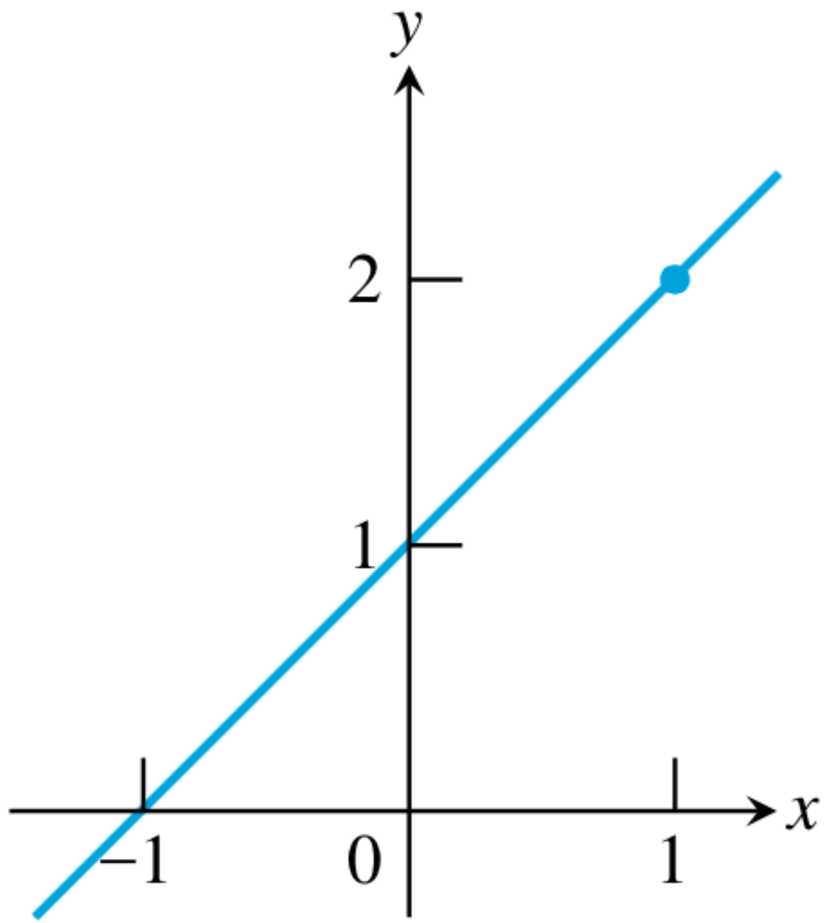


(α) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$



(β) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Συμπεριφορά συνάρτησης κοντά σε σημείο



(γ) $h(x) = x + 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 2$$

Όριο

Ορισμός **Αυστηρός ορισμός του ορίου**

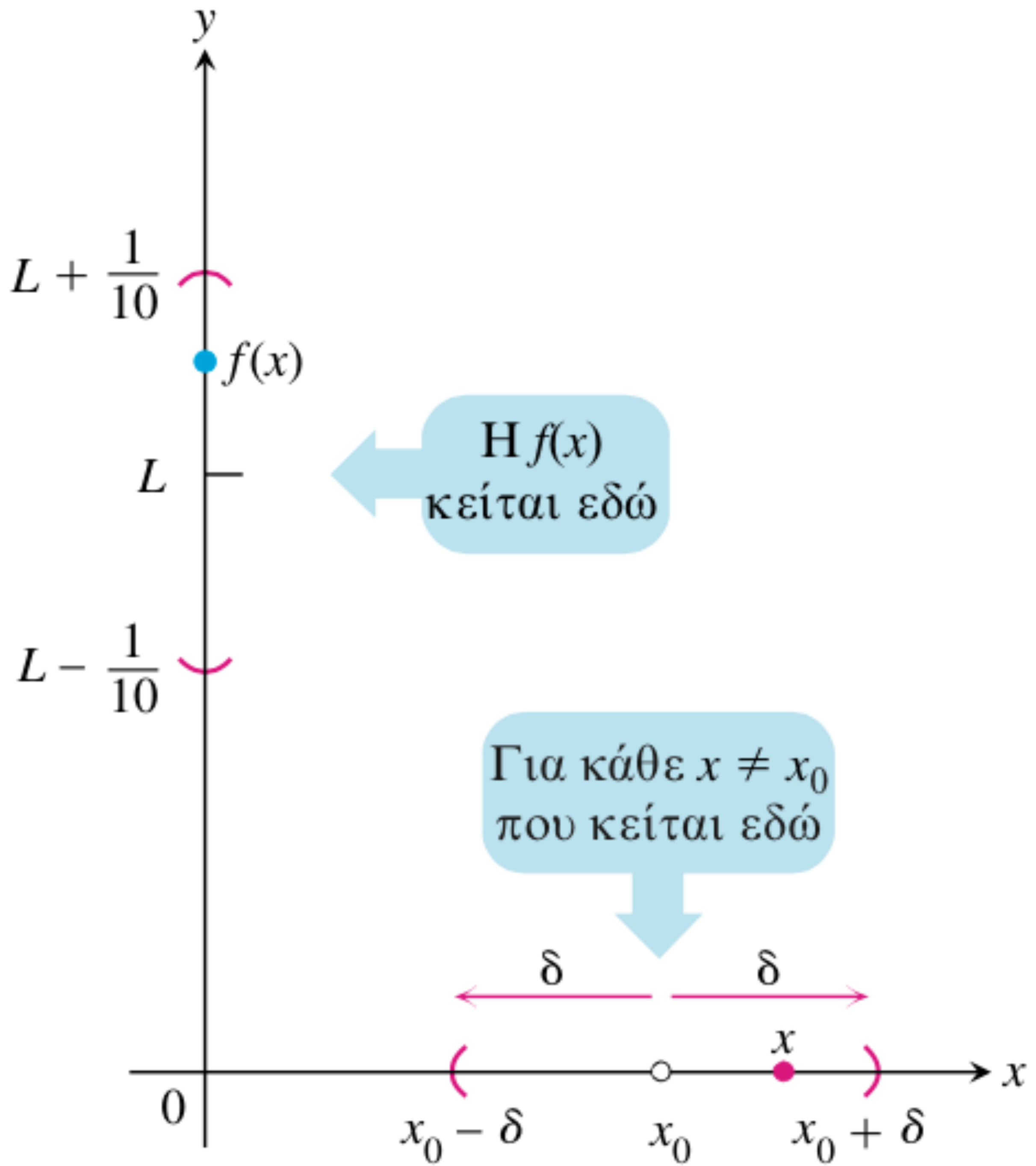
Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται σε κάθε σημείο ανοιχτού διαστήματος που περιέχει το x_0, εκτός ενδεχομένως στο ίδιο το x_0. Λέμε ότι η $f(x)$ τείνει στο **όριο** L καθώς το x τείνει στο x_0, και γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα αντίστοιχο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x,

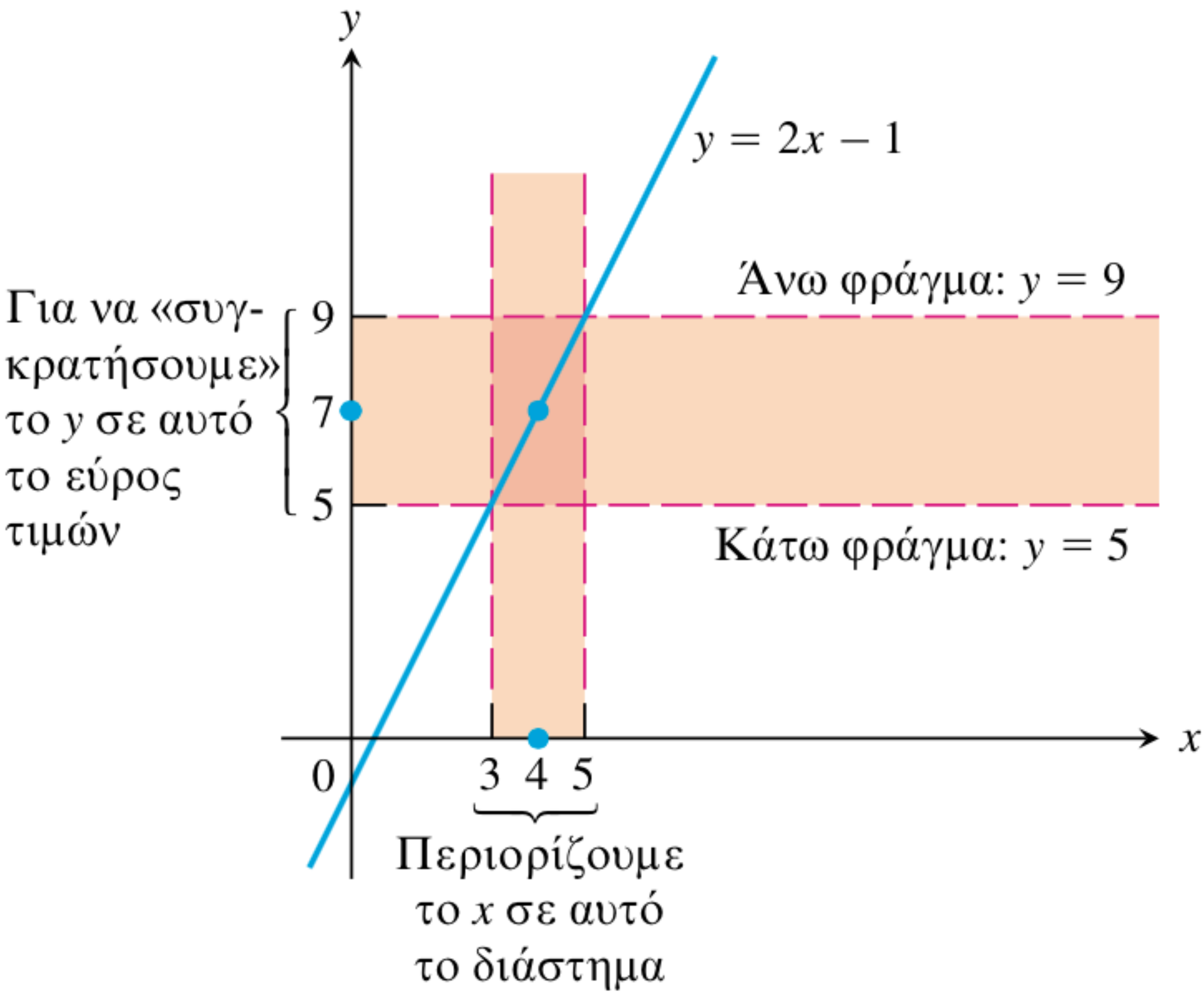
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Όριο



y
$L + \frac{1}{10}$
$f(x)$
L
Η $f(x)$ κείται εδώ
$L - \frac{1}{10}$
Για κάθε $x \neq x_0$ που κείται εδώ
δ
δ
x
x
0
$x_0 - \delta$
x_0
$x_0 + \delta$

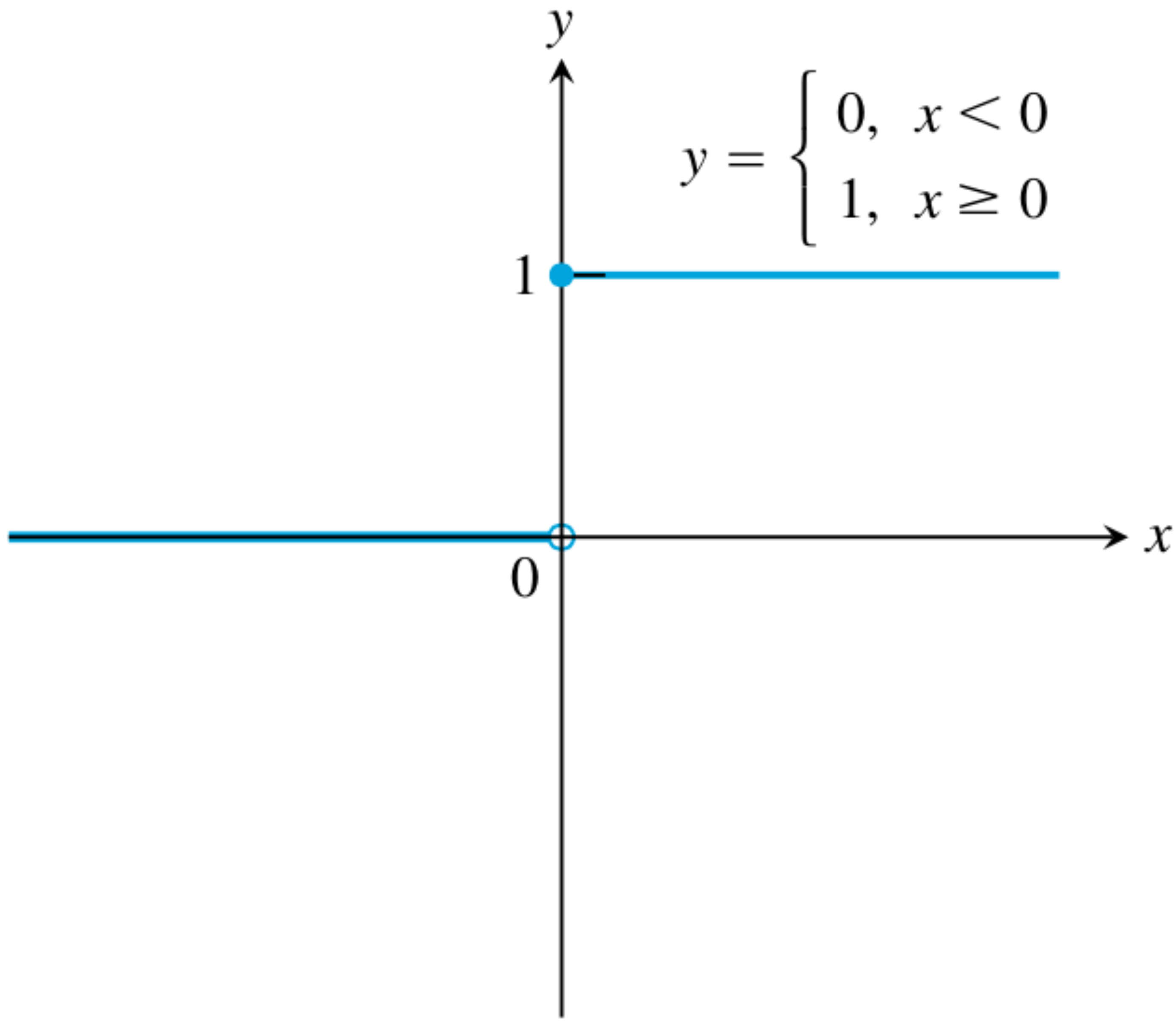
Όριο



y
y = 2x − 1
Άνω φράγμα: y = 9
Για να «συγκρατήσουμε» το y σε αυτό το εύρος τιμών
9
7
5
Κάτω φράγμα: y = 5
x
0
3 4 5
Περιορίζουμε το x σε αυτό το διάστημα

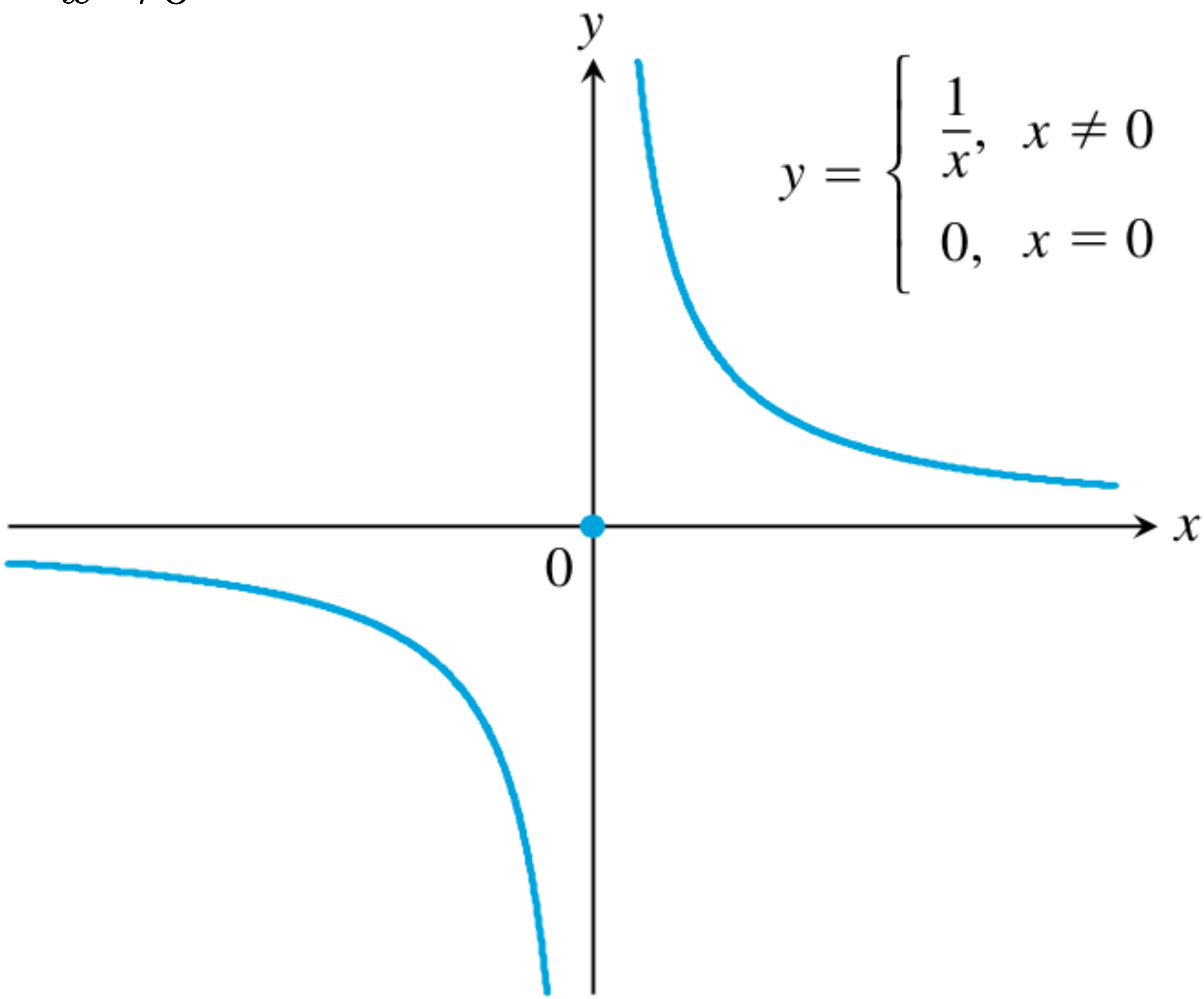
Αντι-παραδείγματα

$\nexists \lim_{x \to 0}$ διότι η συνάρτηση παρουσιάζει **άλμα**



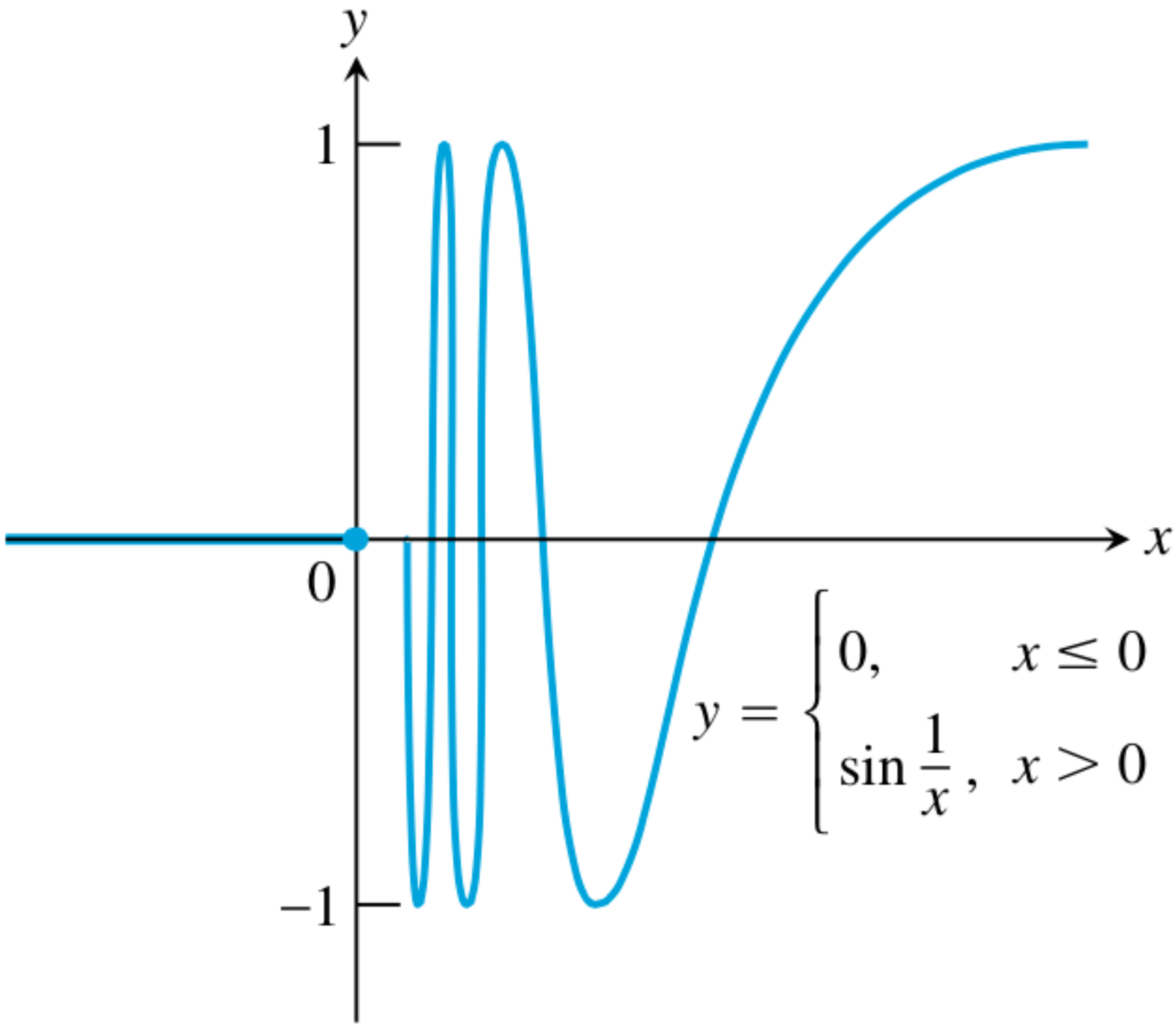
Αντι-παραδείγματα

$\nexists \lim\limits_{x\to 0}$ διότι η συνάρτηση **απειρίζεται**



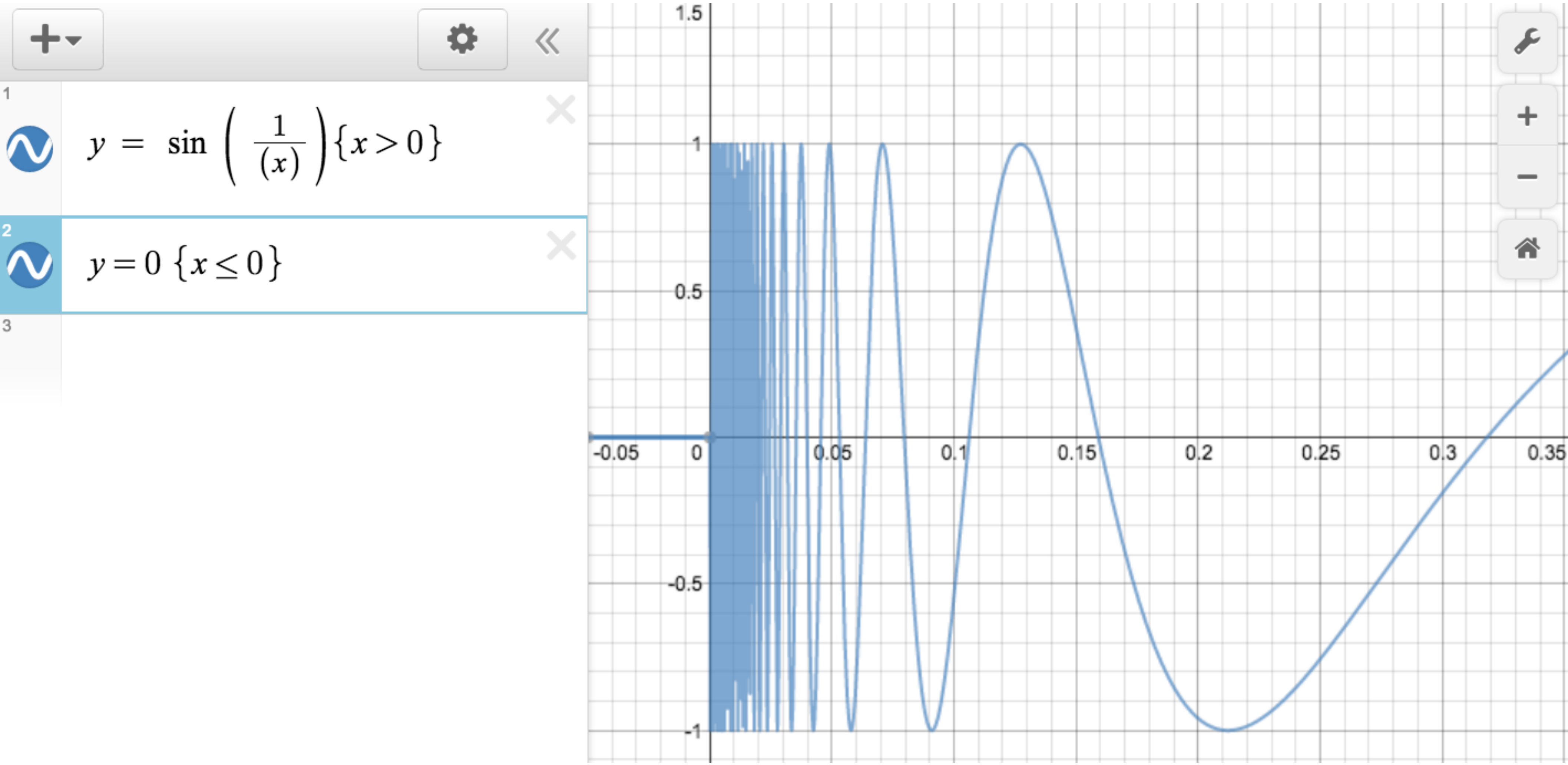
Αντι-παραδείγματα

$\nexists \lim_{x \to 0}$ διότι η συνάρτηση **ταλαντώνεται**

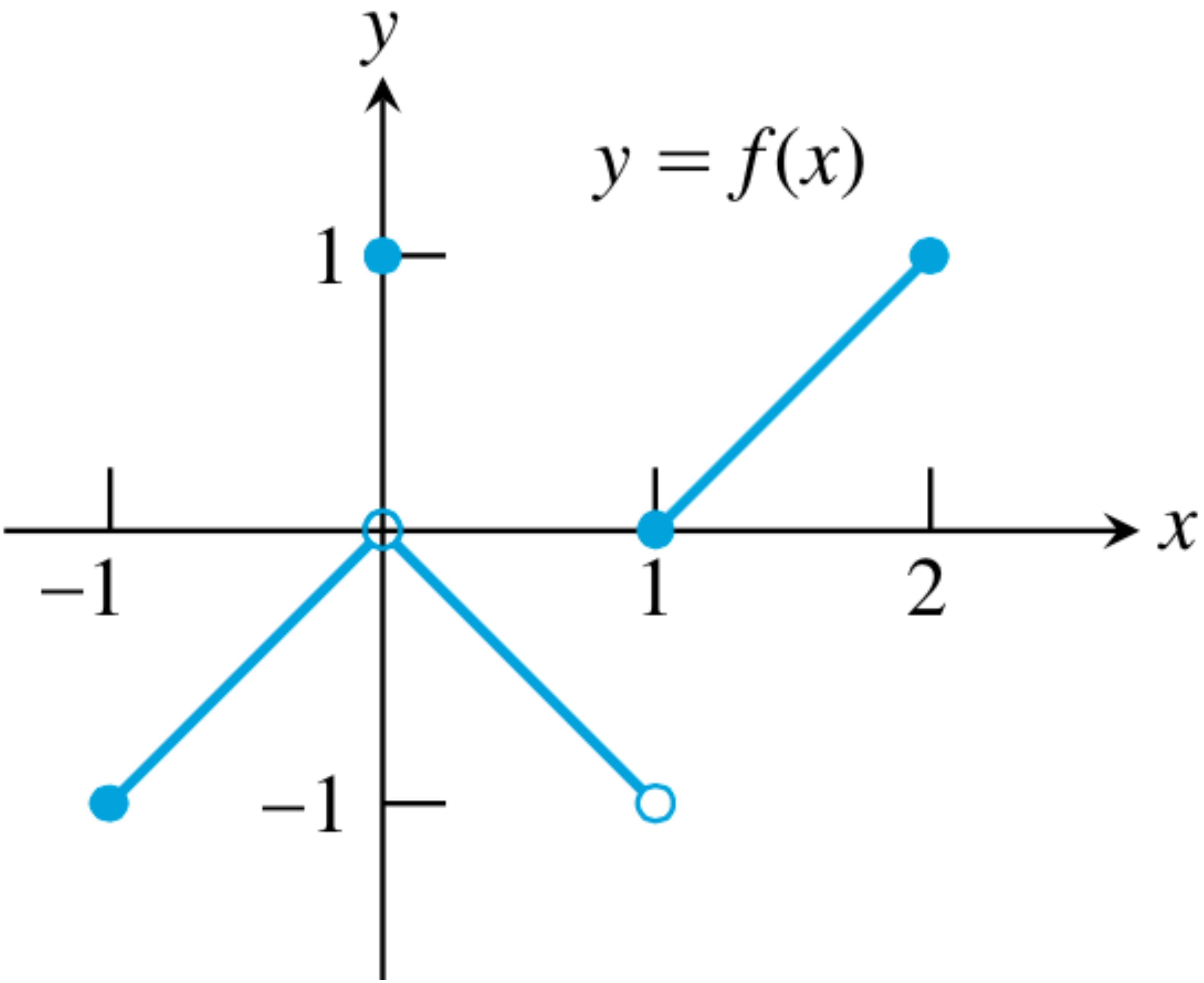


Αντι-παραδείγματα

$\nexists \lim\limits_{x \to 0}$ διότι η συνάρτηση **ταλαντώνεται**



Άσκηση



Ιδιότητες ορίων

Θεώρημα 1 **Ιδιότητες ορίων**

Αν L, M, c, και k είναι πραγματικοί αριθμοί και

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{και} \quad \lim_{x \to c} g(x) = M, \text{ τότε}$$

1. *Όριο αθροίσματος:* $$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

Το όριο του αθροίσματος δύο συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα των ορίων τους.

2. *Όριο διαφοράς:* $$\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$$

Το όριο της διαφοράς δύο συναρτήσεων ισούται με τη διαφορά των ορίων τους.

3. *Όριο γινομένου:* $$\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

Το όριο του γινομένου δύο συναρτήσεων ισούται με το γινόμενο των ορίων τους.

Ιδιότητες ορίων

4. *Όριο σταθερού πολλαπλασίου:* $\lim_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

Το όριο του γινομένου σταθεράς επί συνάρτηση ισούται με το γινόμενο της σταθεράς επί το όριο της συναρτήσεως.

5. *Όριο πηλίκου:* $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$

Το όριο του πηλίκου δύο συναρτήσεων ισούται με το πηλίκο των ορίων τους, δεδομένου ότι το όριο του παρονομαστή δεν μηδενίζεται.

6. *Όριο δύναμης:* Αν r και s είναι ακέραιοι, και $s \neq 0$, τότε

$$\lim_{x \to c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

εφόσον ο $L^{r/s}$ είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο ρητής δύναμης συναρτήσεως ισούται με το όριο της συνάρτησης υψωμένο στη δύναμη αυτή, εφόσον το όριο της συνάρτησης είναι πραγματικός αριθμός.

Παράδειγμα

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

Ασκήσεις εξάσκησης

47. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

48. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

49. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x + 1)^2}$

50. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

Παράδειγμα

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} &= \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}\cdot\frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} \\
&= \frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} && \text{Κοινός παράγοντας } h \\
&= \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}. && \text{Απαλοιφή του } h \text{ για } h \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}}$$

Παρονομαστής διάφορος του 0 για $h = 0$· αντικατάσταση

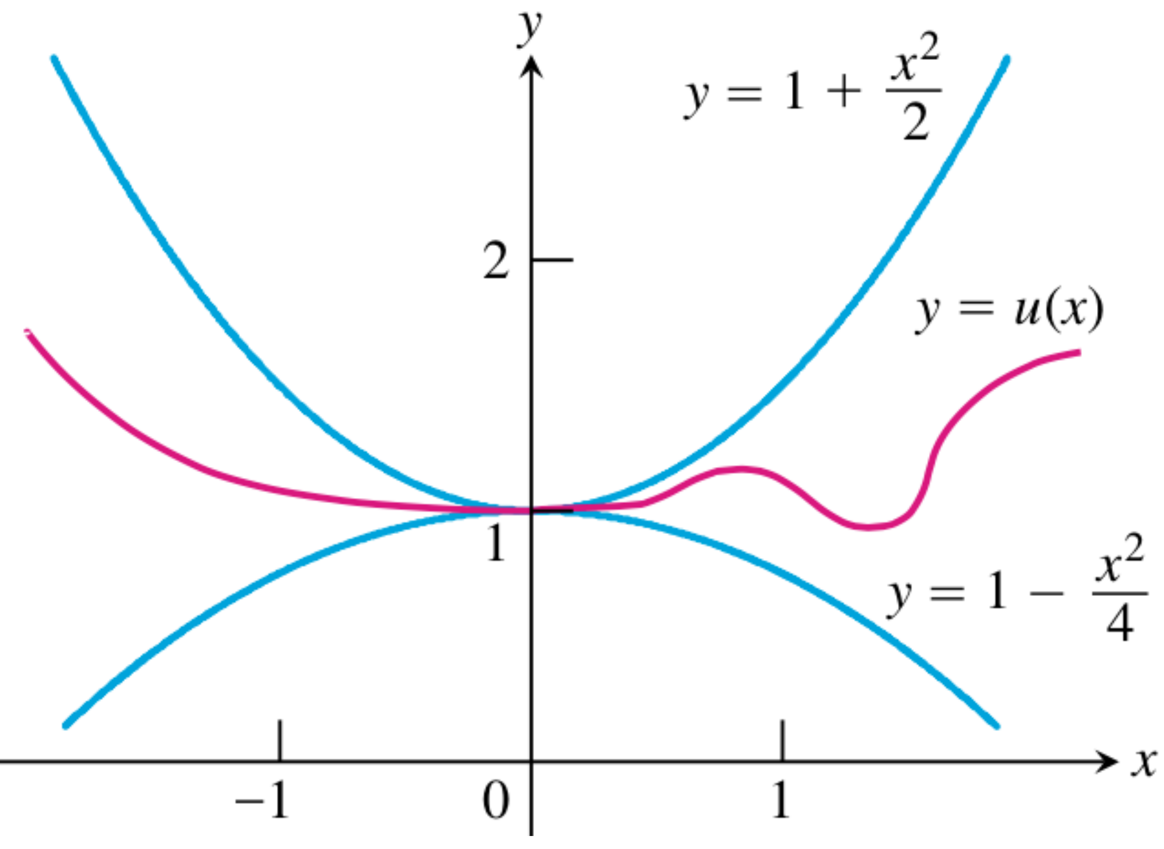
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Θεώρημα «σάντουιτς»

Έστω ότι $g(x) \le f(x) \le h(x)$ για κάθε x το οποίο ανήκει σε ανοιχτό διάστημα που περιέχει το c, εκτός, ενδεχομένως, για το ίδιο το σημείο $x = c$. Αν επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L,$$

τότε $\lim_{x \to c} f(x) = L$.



ΣΧΗΜΑ 1.18 Κάθε συνάρτηση $u(x)$ με γραφική παράσταση που κείται μεταξύ των $y = 1 + (x^2/2)$ και $y = 1 - (x^2/4)$, έχει όριο 1 καθώς $x \to 0$.

Πλευρικά όρια

Ορισμοί **Δεξιά και αριστερά όρια**

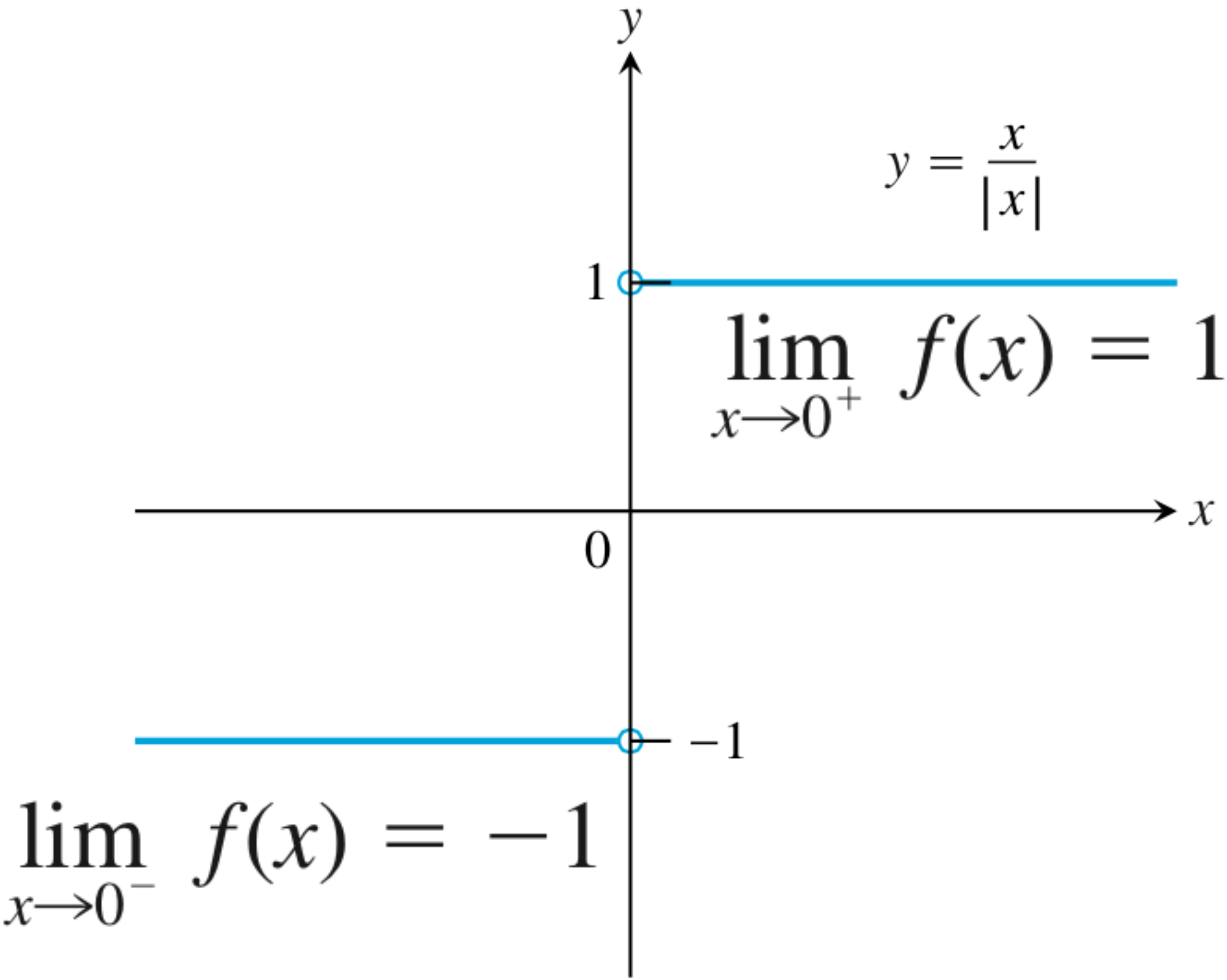
Έστω $f(x)$ ορισμένη σε διάστημα (a, b), όπου $a < b$. Αν η $f(x)$ τείνει στο L καθώς το x τείνει στο a, θα λέμε ότι η f έχει **δεξιό όριο** L στο a, και θα γράφουμε

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Έστω $f(x)$ ορισμένη σε διάστημα (c, a), όπου $c < a$. Αν η $f(x)$ τείνει στο M καθώς το x τείνει στο a, θα λέμε ότι η f έχει **αριστερό όριο** M στο a, και θα γράφουμε

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M.$$

Πλευρικά όρια



Αμφίπλευρα όρια

Θεώρημα 5 **Σχέση μεταξύ πλευρικών και αμφίπλευρων ορίων**

Μια συνάρτηση $f(x)$ έχει (αμφίπλευρο) όριο καθώς το x τείνει στο c αν και μόνο αν έχει αριστερό και δεξιό όριο στο c και τα πλευρικά αυτά όρια ταυτίζονται:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \text{και} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

Παράδειγμα