

# ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 40

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ  
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

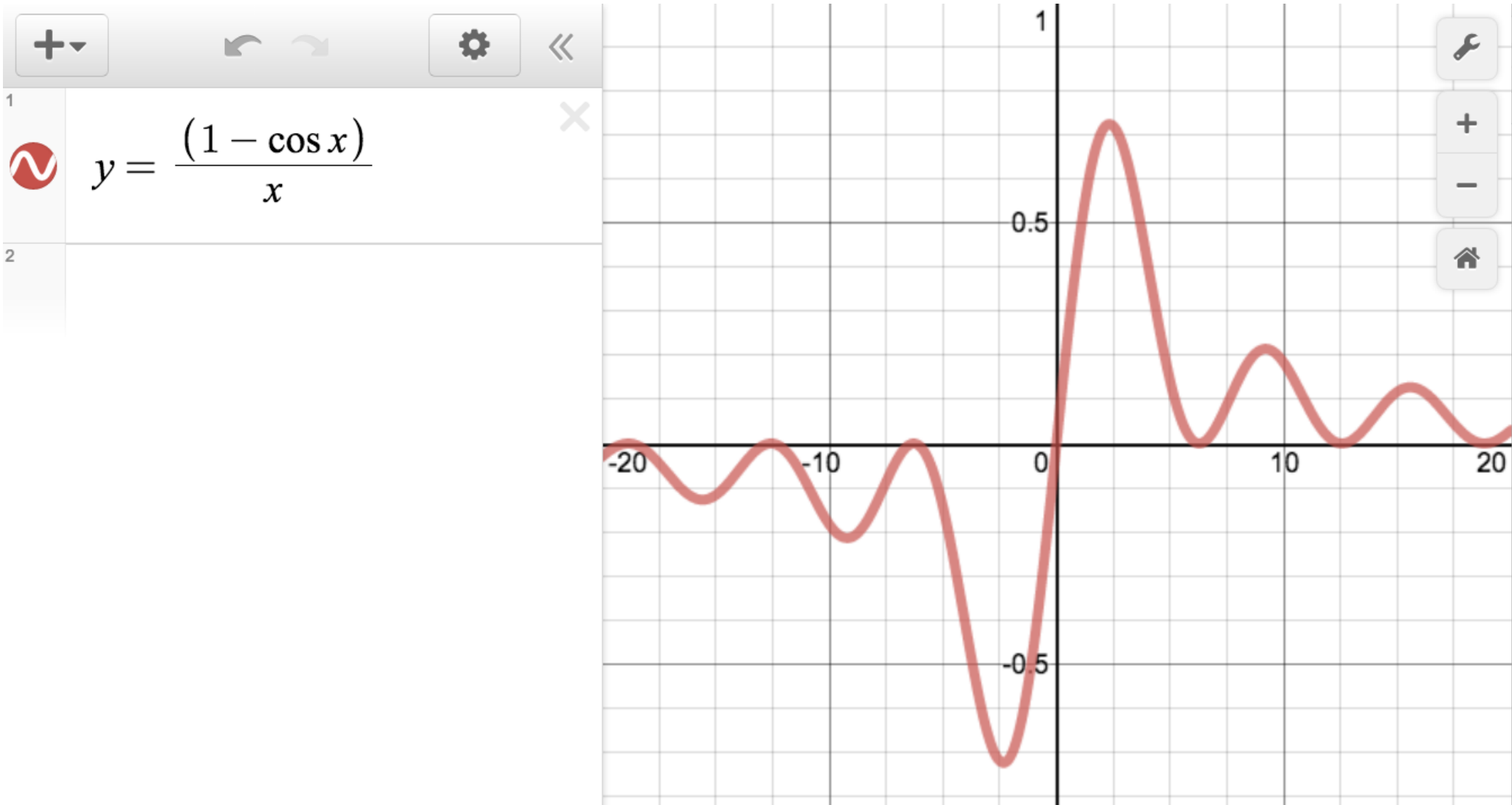


# Όρια Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

# Όρια Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

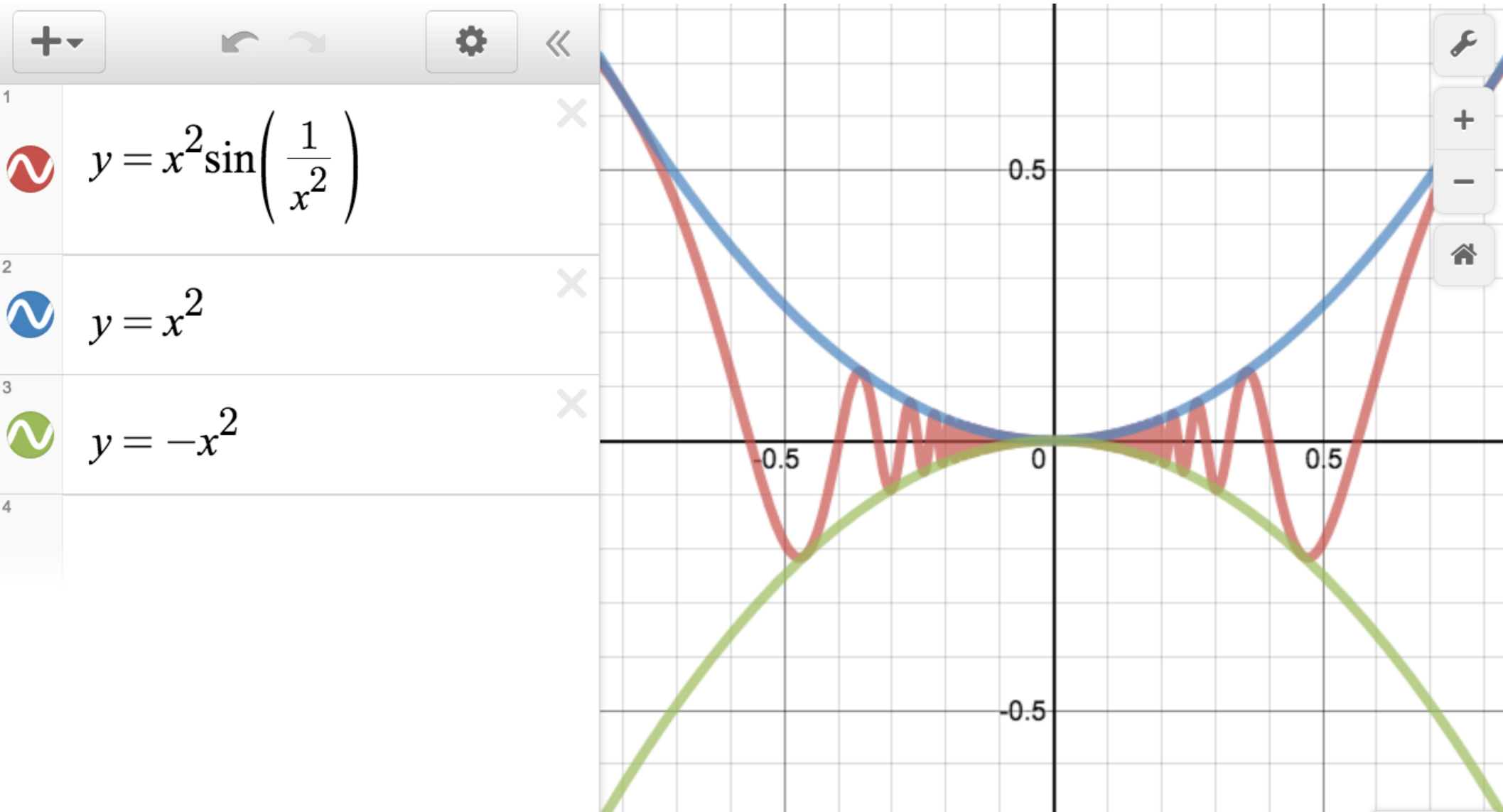


# Άσκηση 1

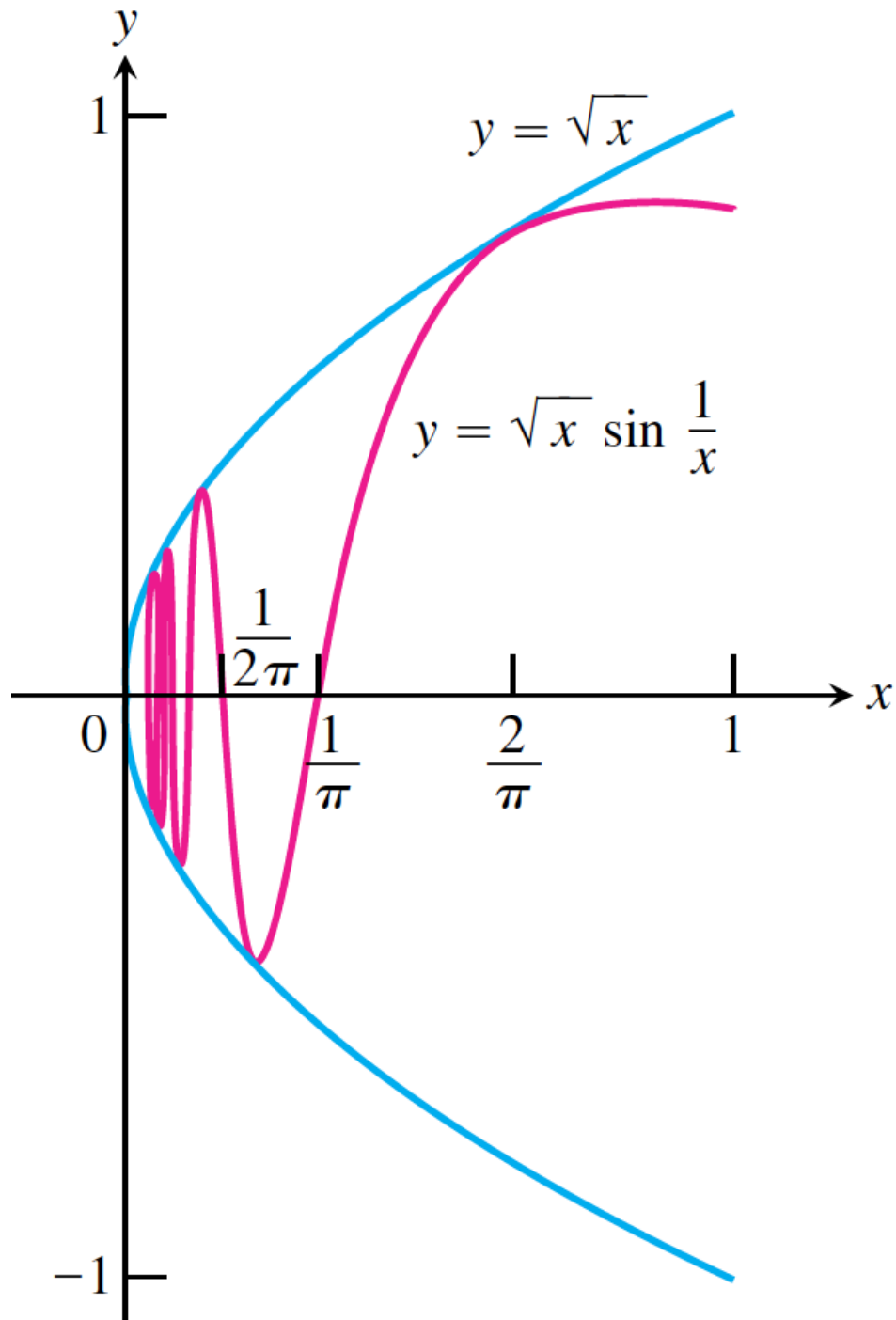
Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(1/x^2)$

# Άσκηση 1

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(1/x^2)$



## Άσκηση 2



Για τη συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

να βρεθούν τα όρια:

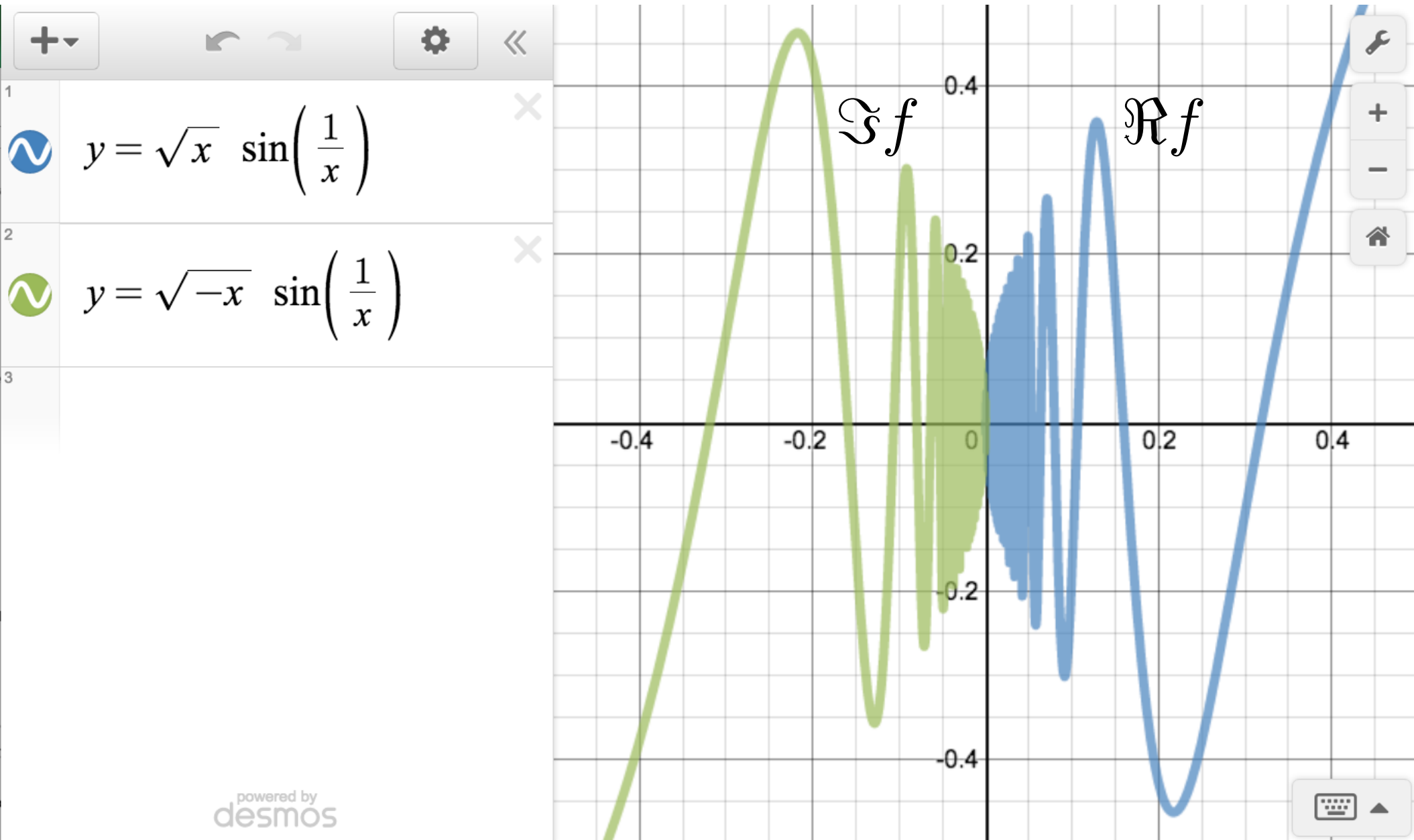
α)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

β)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

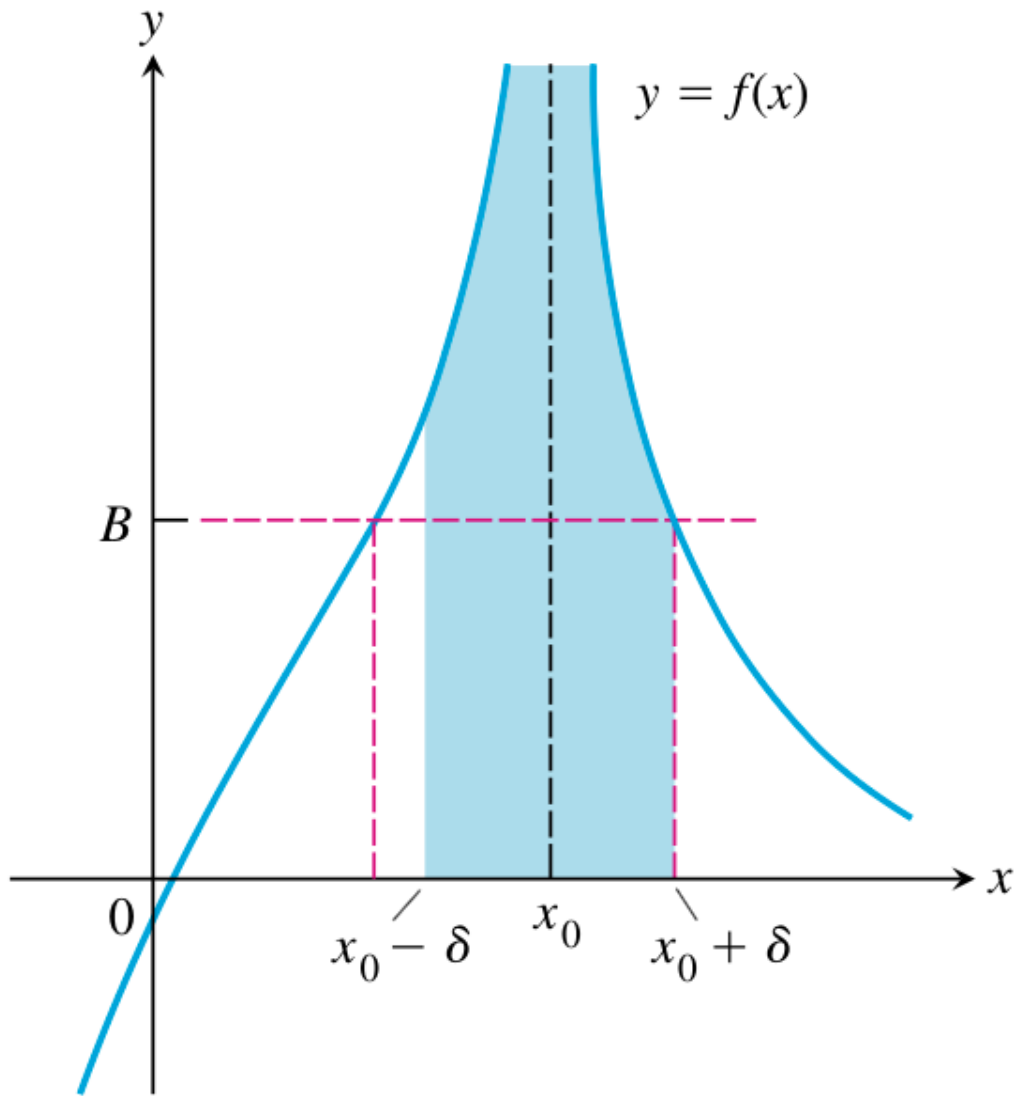
γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

# Άσκηση 3

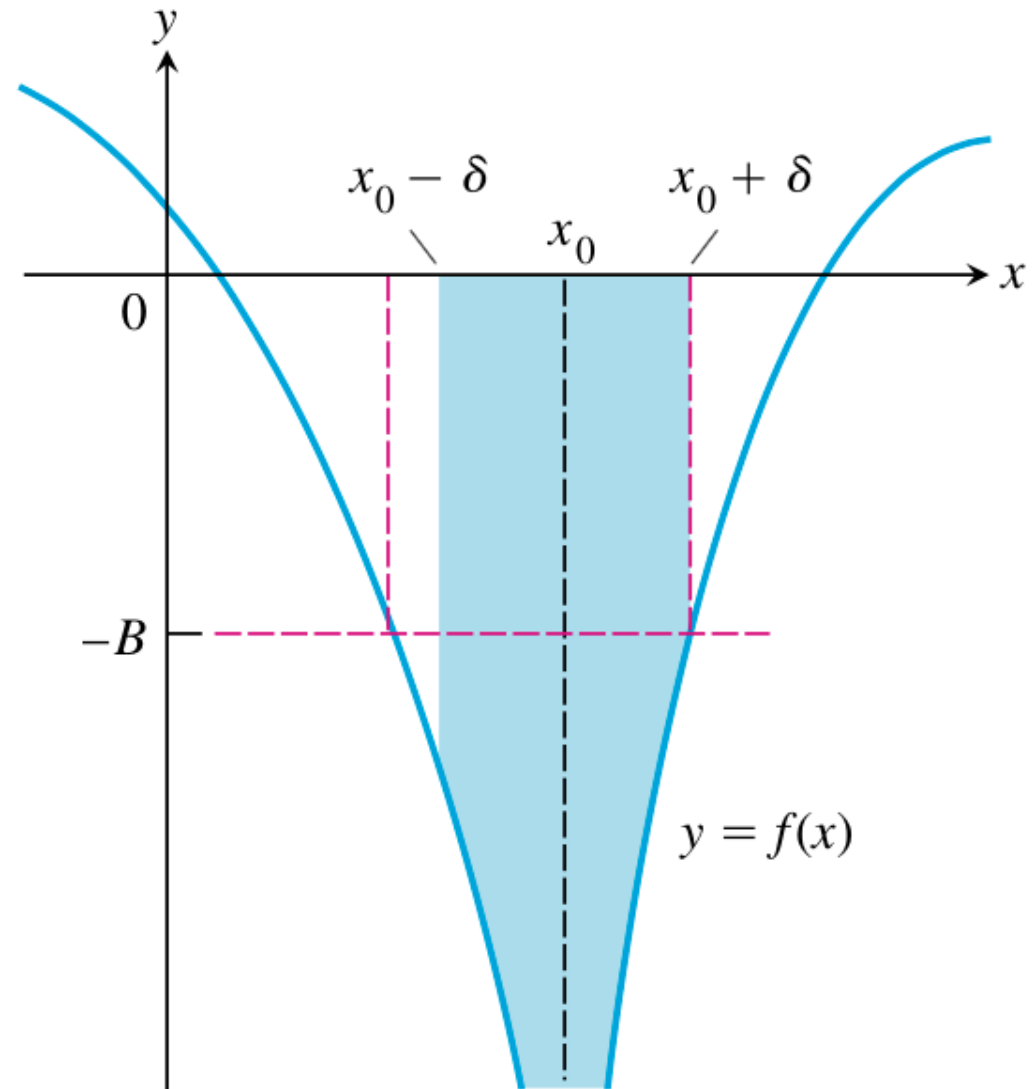
Αν όμως το  $x$  θεωρηθεί μιγαδικός αριθμός;



# Άπειρα Όρια



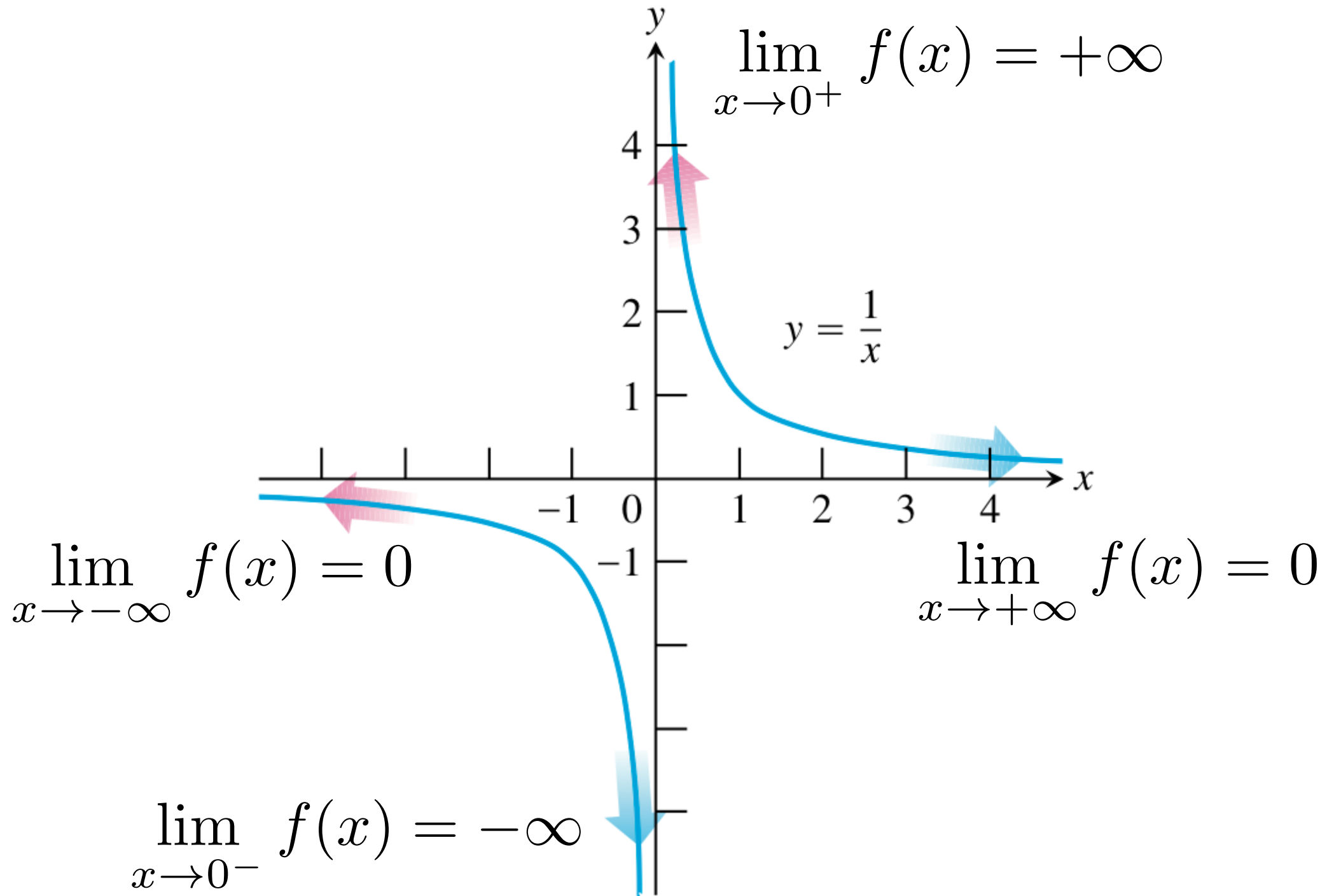
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty .$$



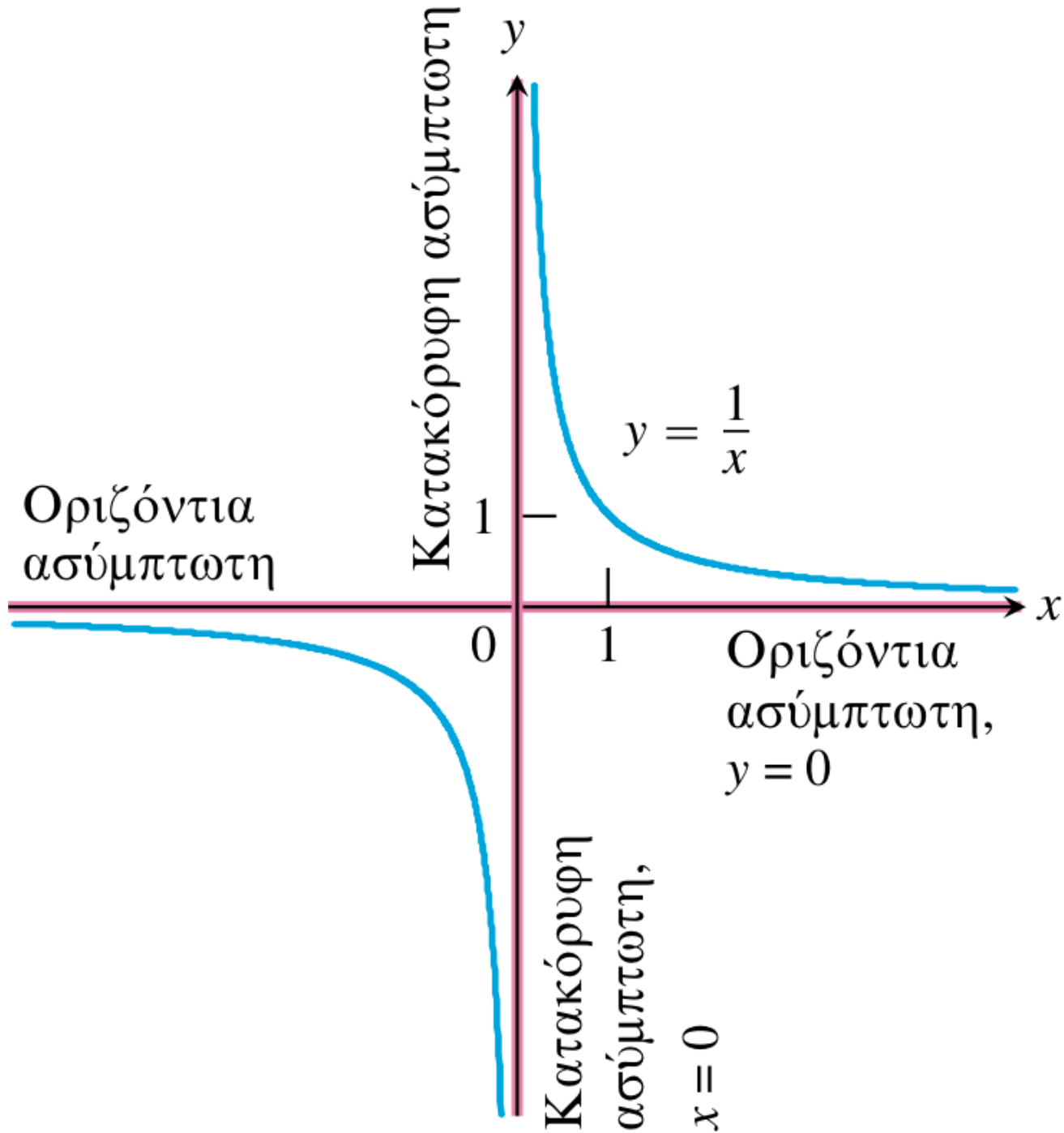
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty .$$



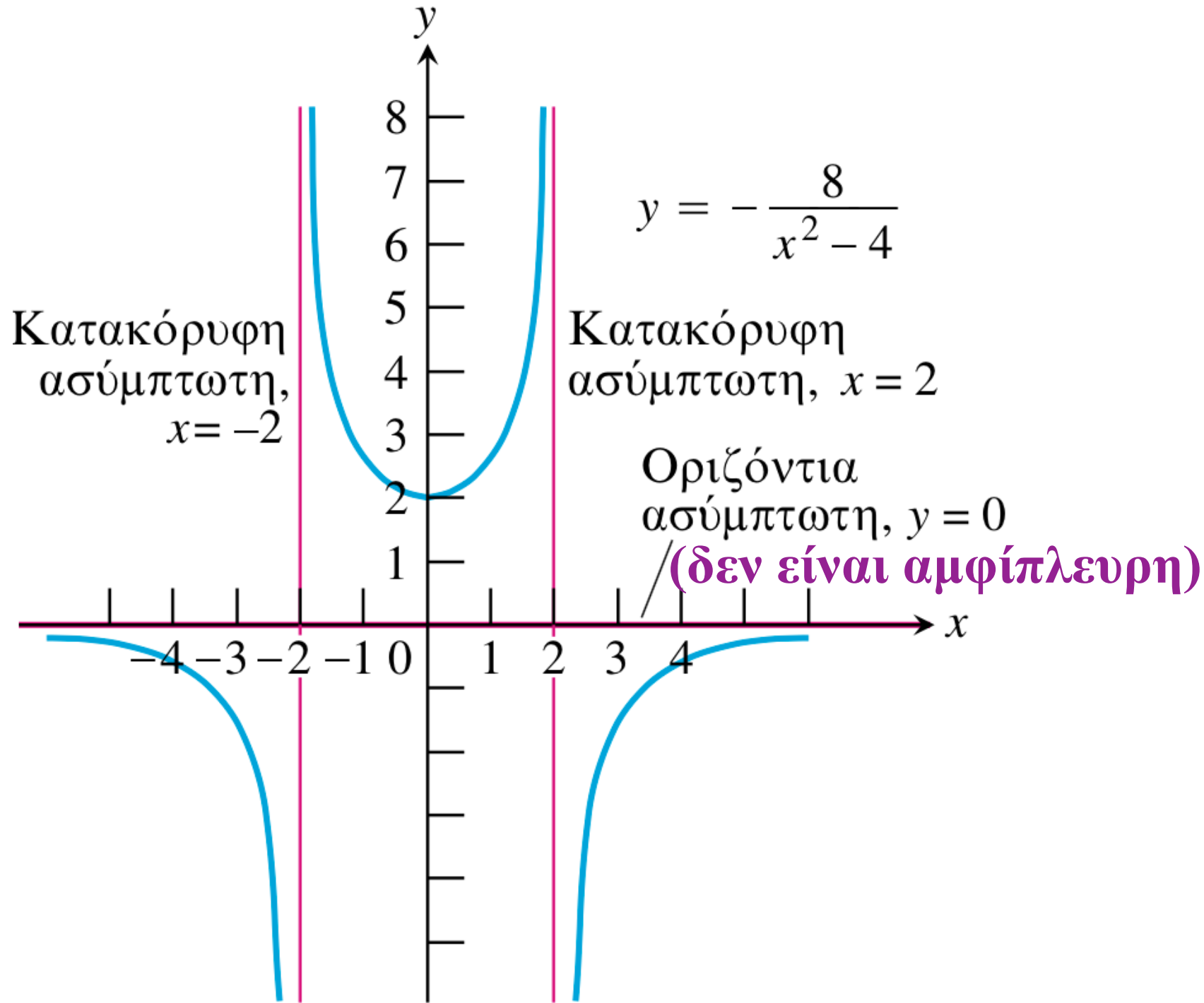
# Άπειρα Όρια και Όρια στο Άπειρο



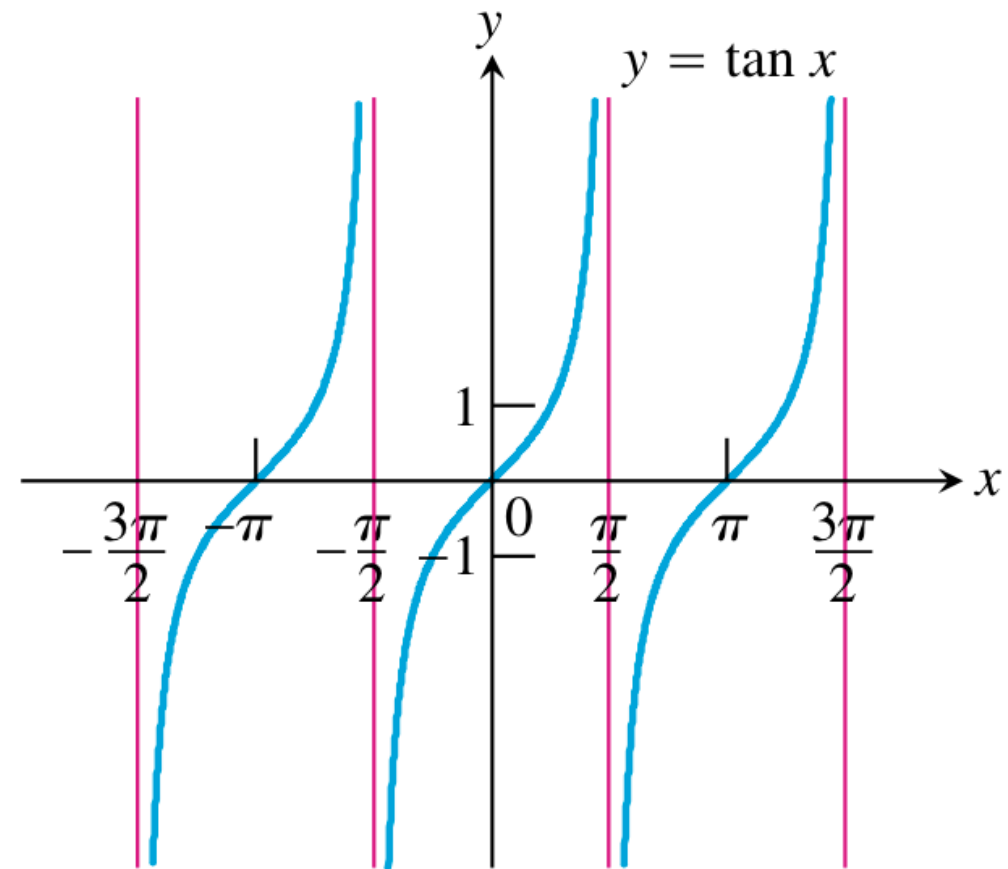
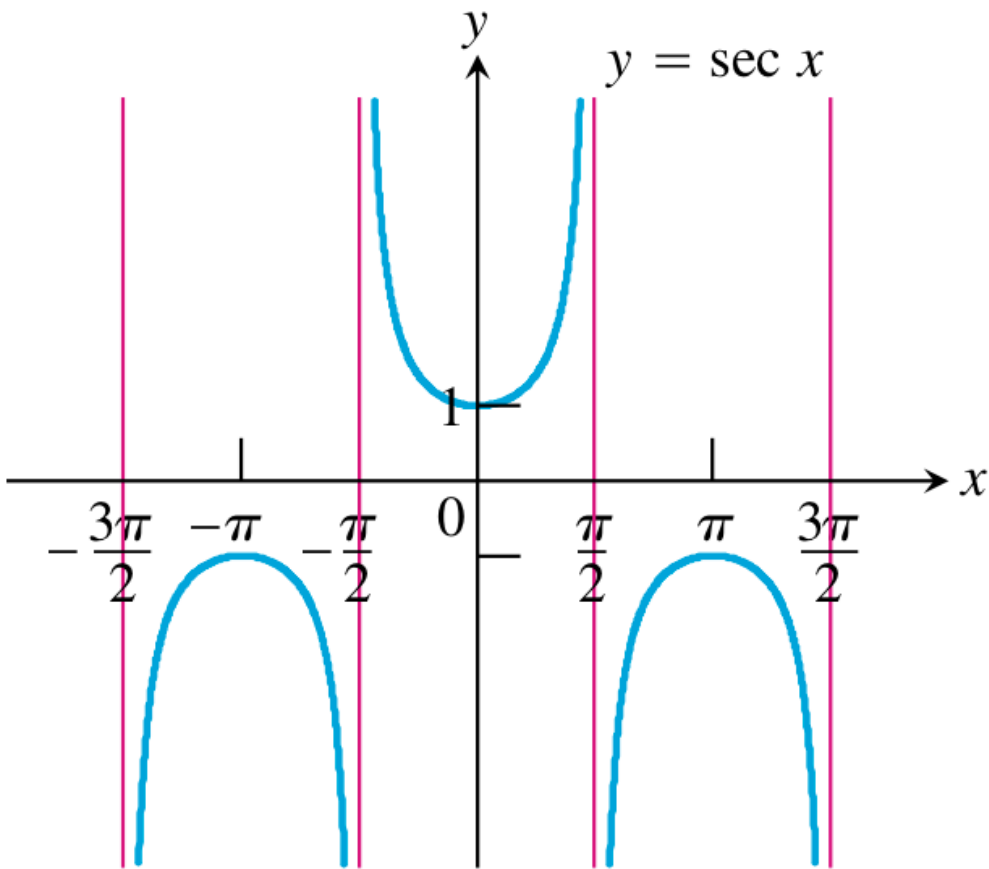
# Ασύμπτωτες



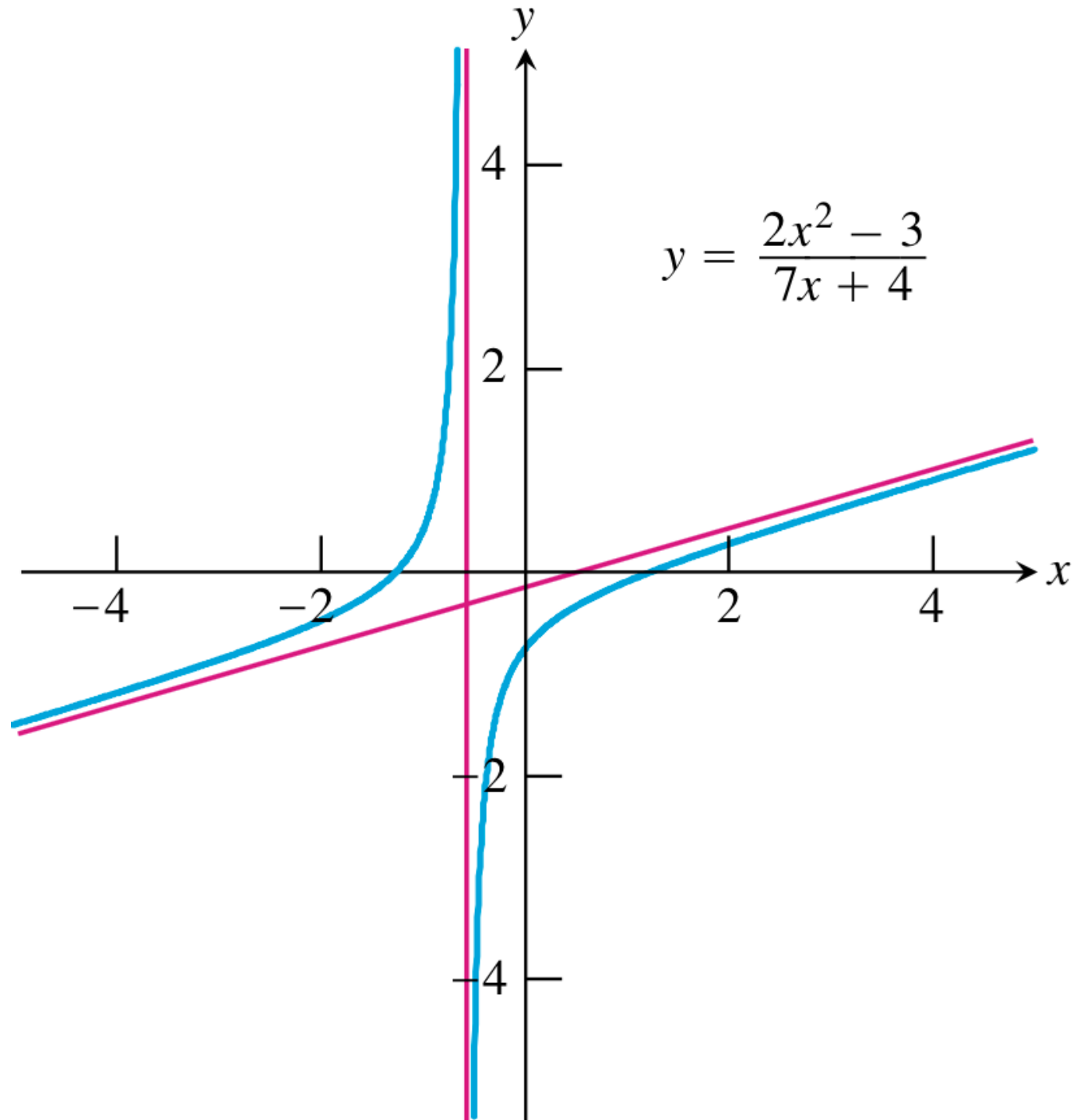
# Ασύμπτωτες: όχι κατ' ανάγκη αμφίπλευρες



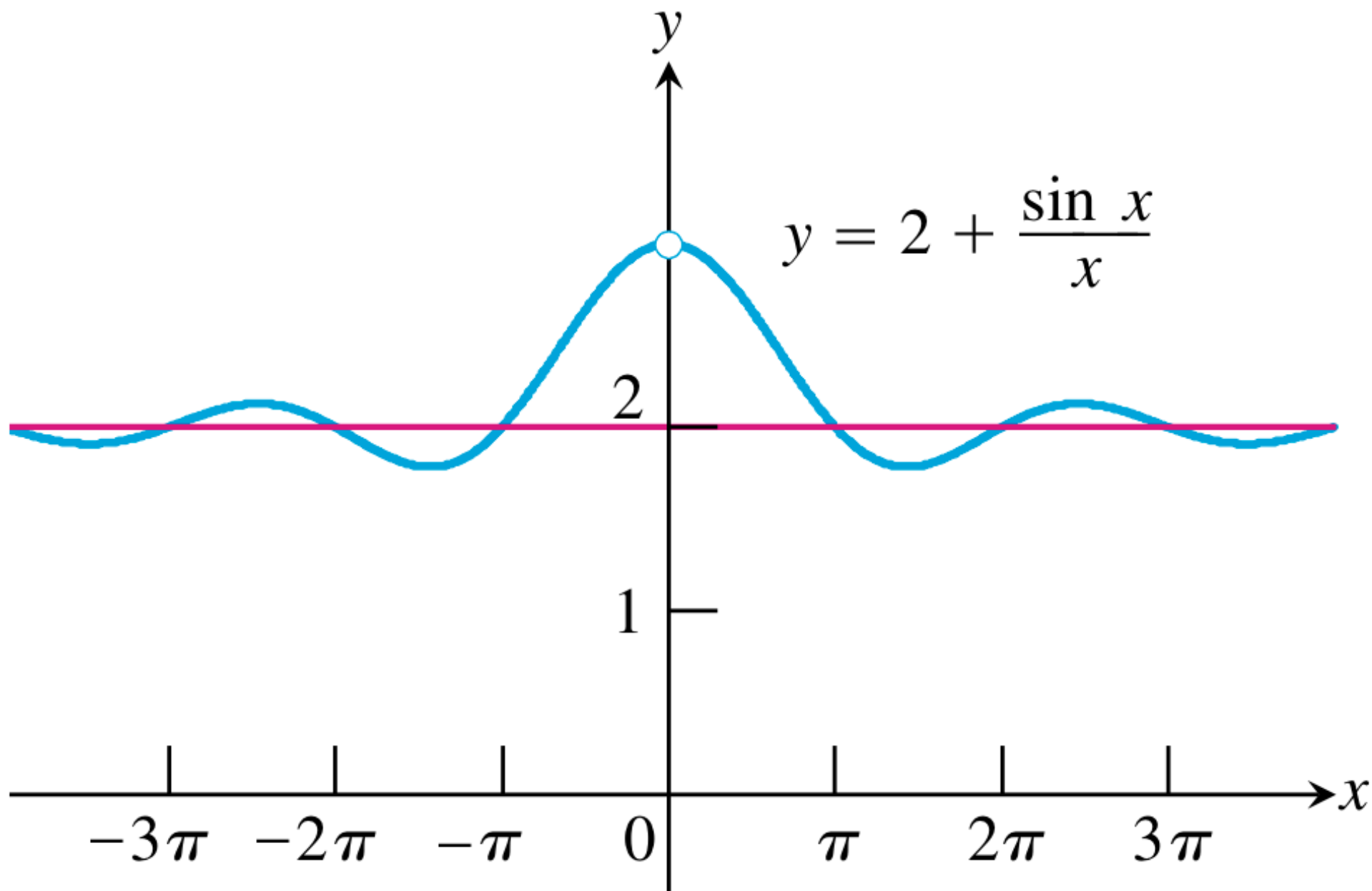
# Άπειρος αριθμός ασύμπτωτων



# Πλάγιες ασύμπτωτες

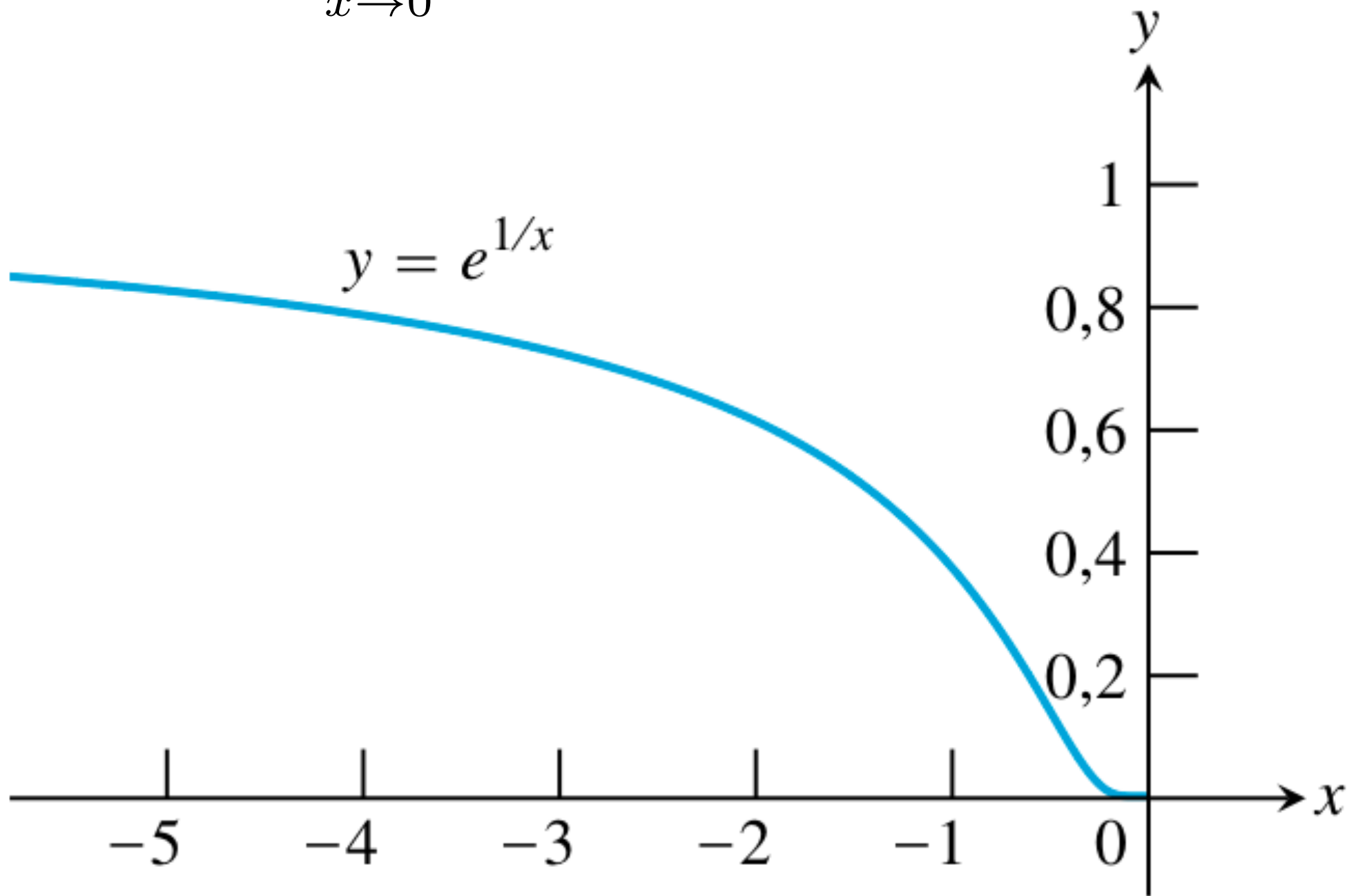


# Συνάρτηση που τέμνει μια ασύμπτωτη καμπύλη



# Παράδειγμα

Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}$ .



# Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 + 3x} - x \right]$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 + 3x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 1 \right] = \infty \cdot 0 \quad (!)$$



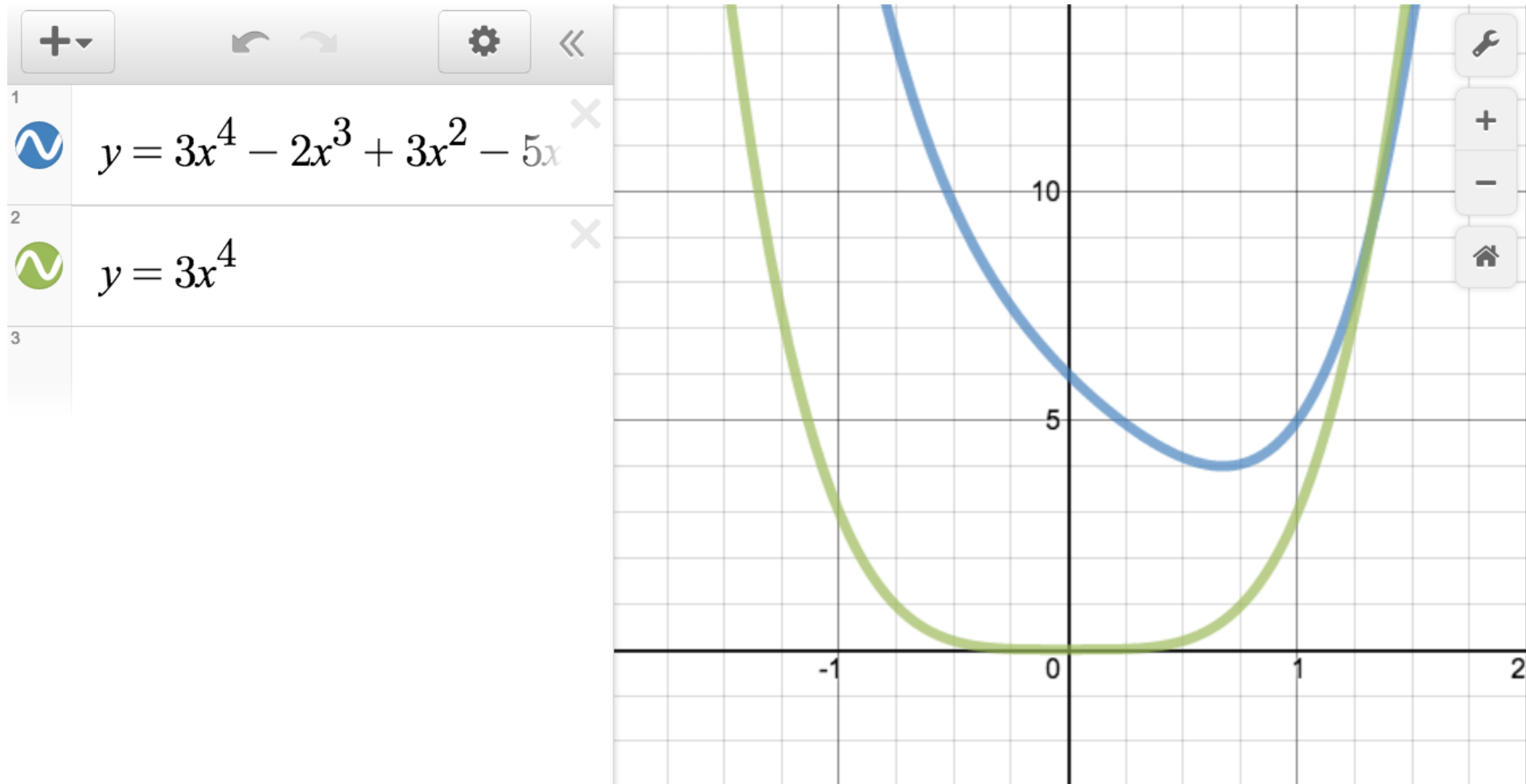
# Παράδειγμα

Άλλος τρόπος:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 + 3x} - x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \sqrt{x^2 + 3x} - x \right) \left( \sqrt{x^2 + 3x} + x \right)}{\left( \sqrt{x^2 + 3x} + x \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\left( \sqrt{x^2 + 3x} + x \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x \left( \sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\left( \sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1 \right)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

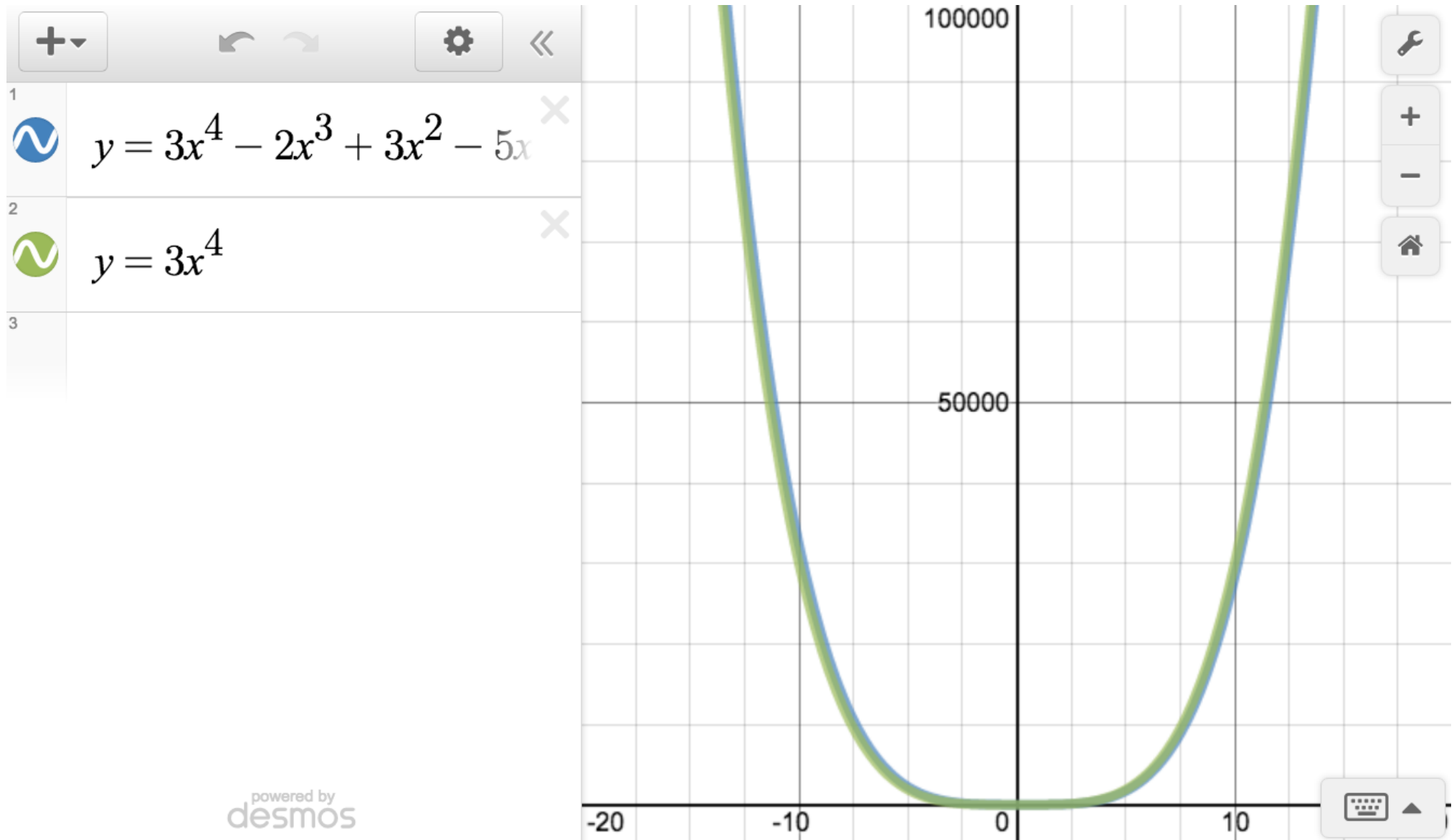
# Ασυμπτωτική συμπεριφορά συνάρτησης

Η συνάρτηση  $y = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x$  διαφέρει σημαντικά από την  $y = 3x^4$  για μικρές τιμές του  $x$ .



# Ασυμπτωτική συμπεριφορά συνάρτησης

Όμως, για  $x \rightarrow \pm\infty$ , η  $y = 3x^4$  αποτελεί ένα καλό μοντέλο για την  $y = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x$ .



# Κριτήριο

**Ορισμός** Μοντέλο με δεδομένη συμπεριφορά στα άκρα

Η συνάρτηση  $g$  είναι

(α) ένα μοντέλο της  $f$  στο άπειρο αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

(β) ένα μοντέλο της  $f$  στο μείον άπειρο αν και μόνο αν

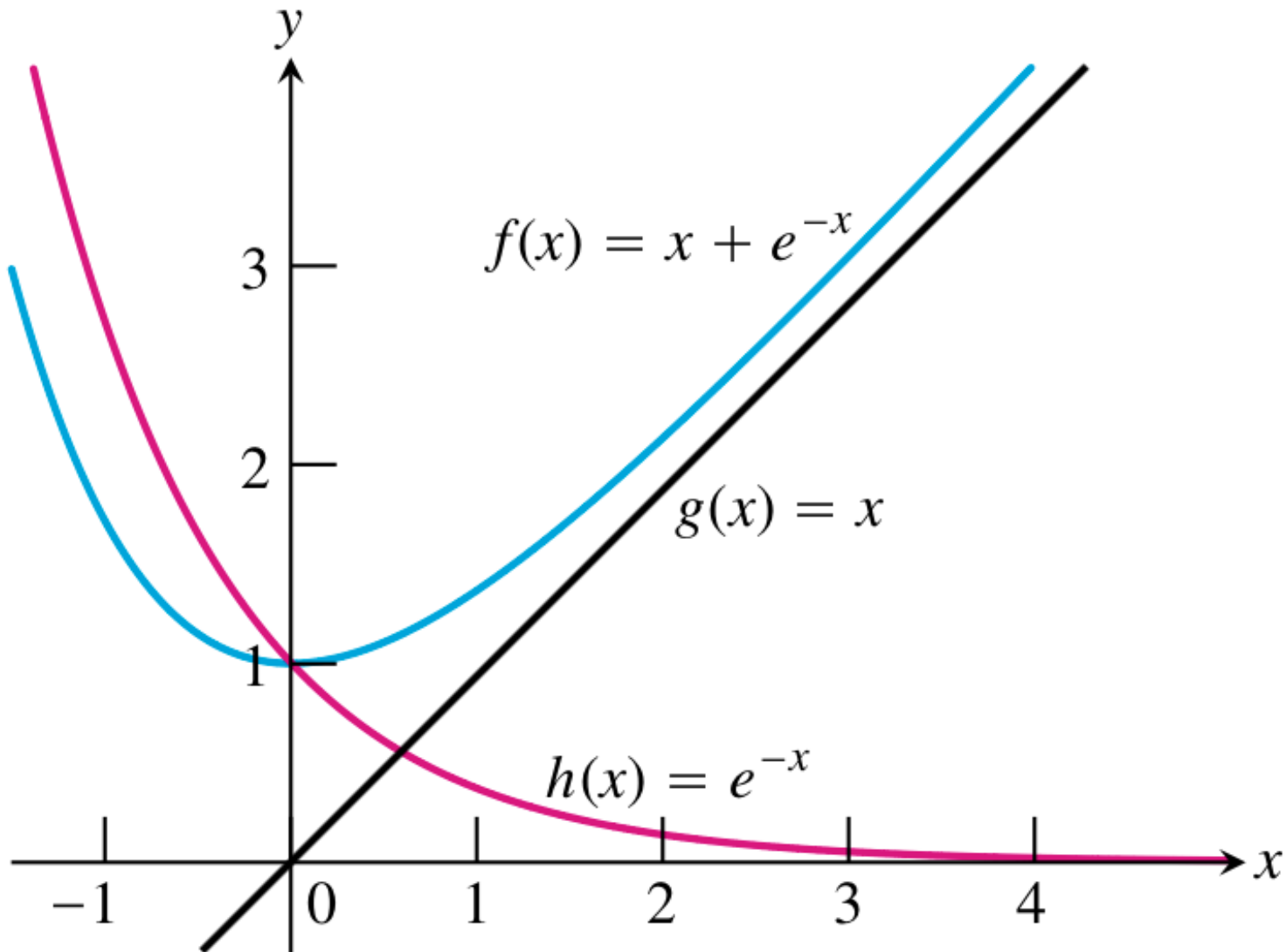
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

# Παράδειγμα

Η συνάρτηση  $f(x) = x + e^{-x}$  έχει ως μοντέλα τις

$$g(x) = x \quad \text{για} \quad x \rightarrow +\infty$$

και  $h(x) = e^{-x}$  για  $x \rightarrow -\infty$ .



## Παράδειγμα

Η συνάρτηση  $f(x) = x + e^{-x}$  έχει ως μοντέλα τις

$$g(x) = x \quad \text{για} \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\text{και} \quad h(x) = e^{-x} \quad \text{για} \quad x \rightarrow -\infty .$$

Πράγματι:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{e^{-x}}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + e^{-x}}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{e^{-x}} + 1 \right) = 1$$

## Ασκήσεις για εξάσκηση:

1) Να βρεθούν τα όρια για  $x \rightarrow \pm\infty$  της συνάρτησης

$$h(x) = \frac{-5 + (7/x)}{3 - (1/x^2)}$$

2) Να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2 - t + \sin t}{t + \cos t}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$$

## Ασκήσεις για εξάσκηση:

3) Να μελετηθούν με γραφικό τρόπο οι ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

$$y = -\frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

$$y = \frac{x^3 - x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

$$y = x^3 + \frac{3}{x}$$

$$y = 2 \sin x + \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{3}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right)^{2/3}$$

$$y = \frac{3}{2} \left( \frac{x}{x - 1} \right)^{2/3}$$



# Συνέχεια

## Ορισμός **Σημειακή συνέχεια**

*Εσωτερικό σημείο:* Μια συνάρτηση  $y = f(x)$  είναι **συνεχής σε ένα εσωτερικό σημείο  $c$**  του πεδίου ορισμού της αν

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

*Ακραίο σημείο:* Μια συνάρτηση  $y = f(x)$  είναι **συνεχής στο αριστερό άκρο  $a$  ή συνεχής στο δεξιό άκρο  $b$**  του πεδίου ορισμού της αν

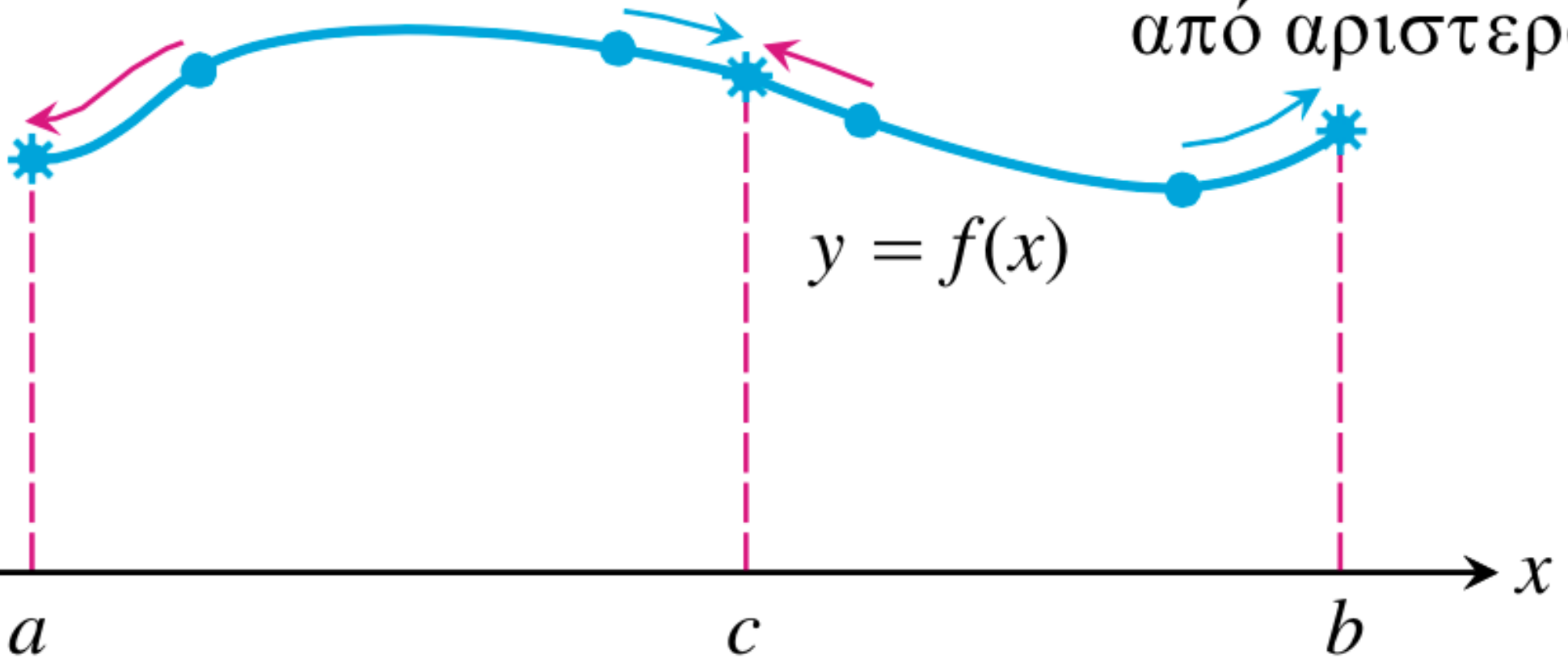
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b), \quad \text{αντίστοιχα.}$$

# Συνέχεια

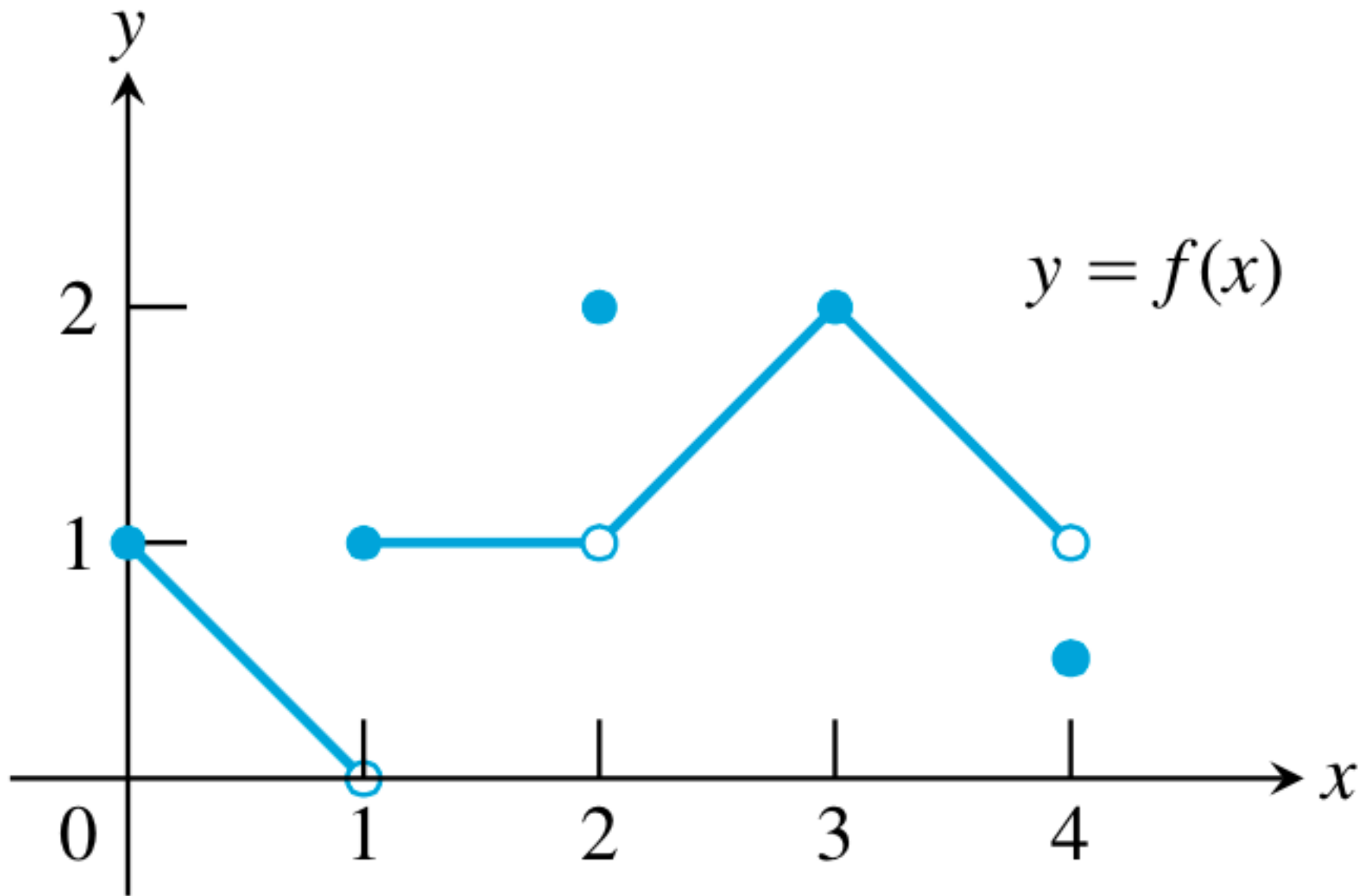
Συνέχεια  
από δεξιά

Αμφίπλευρη  
συνέχεια

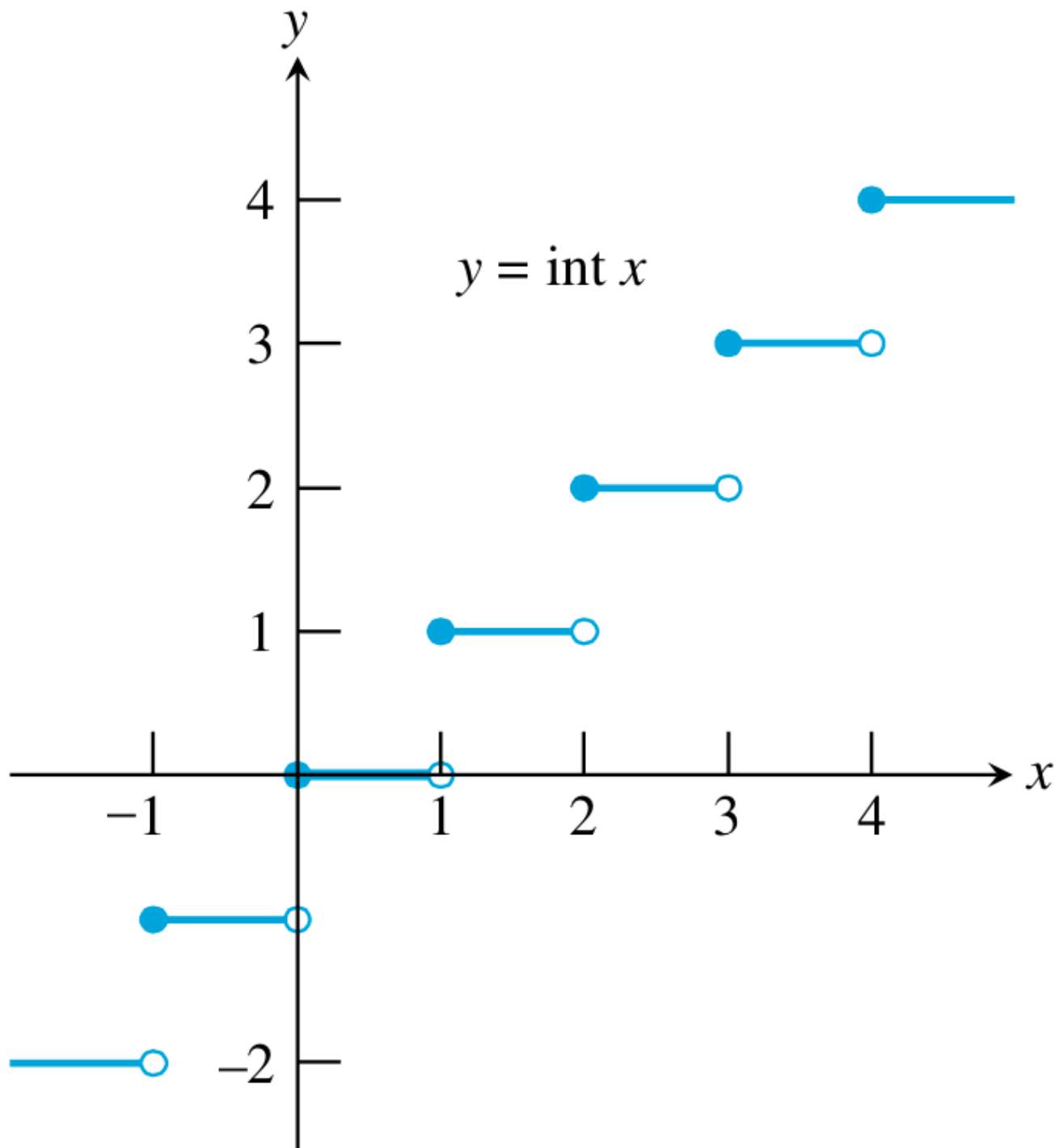
Συνέχεια  
από αριστερά



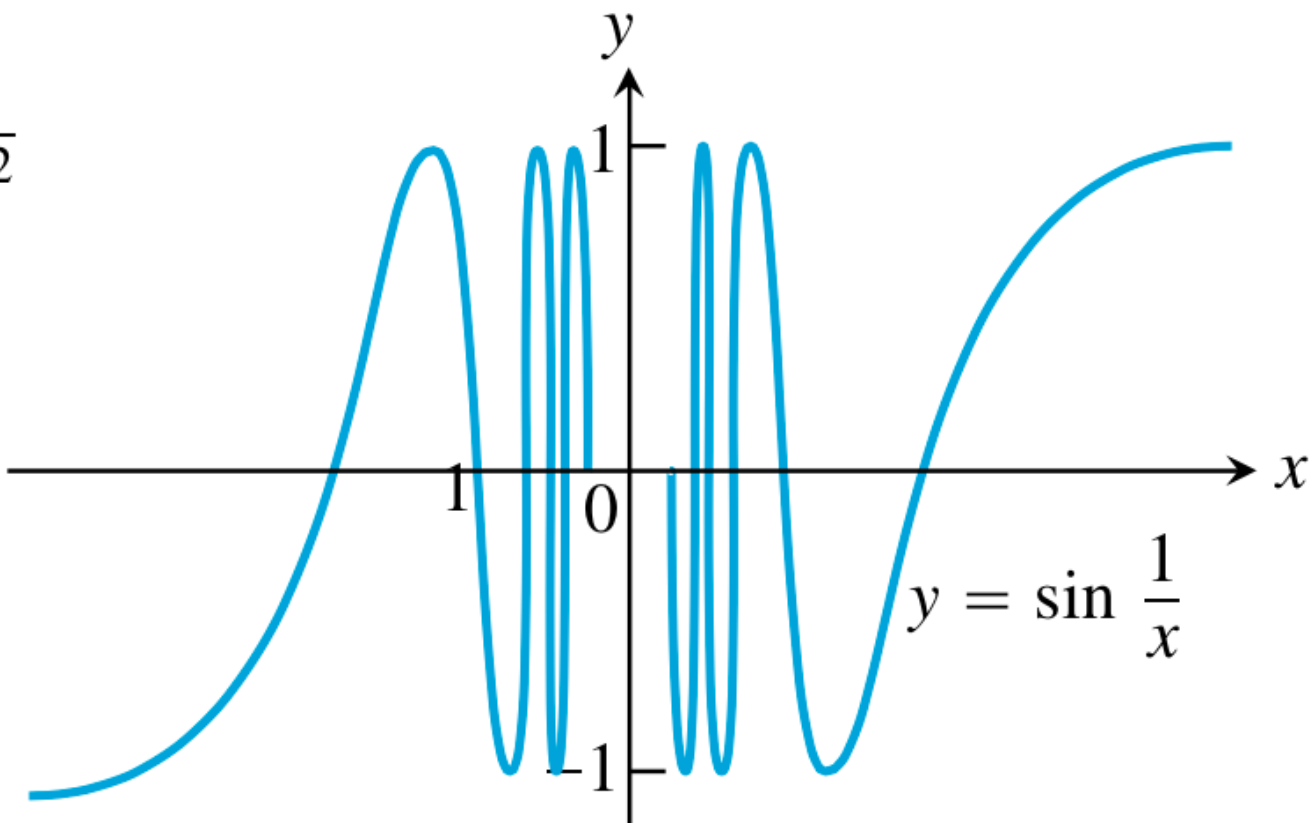
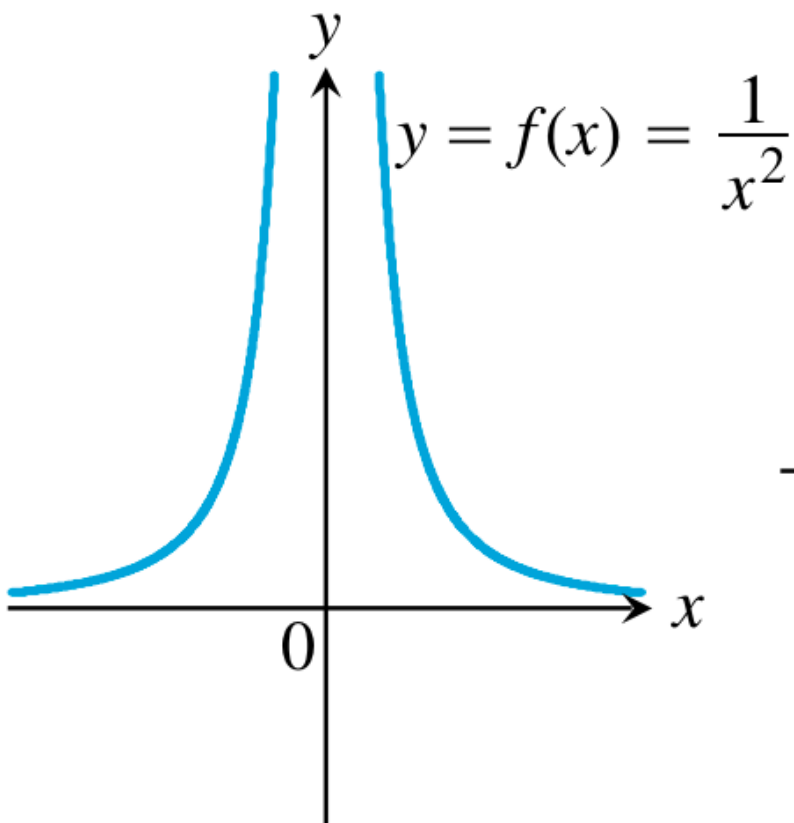
# Παράδειγμα



# Παράδειγμα



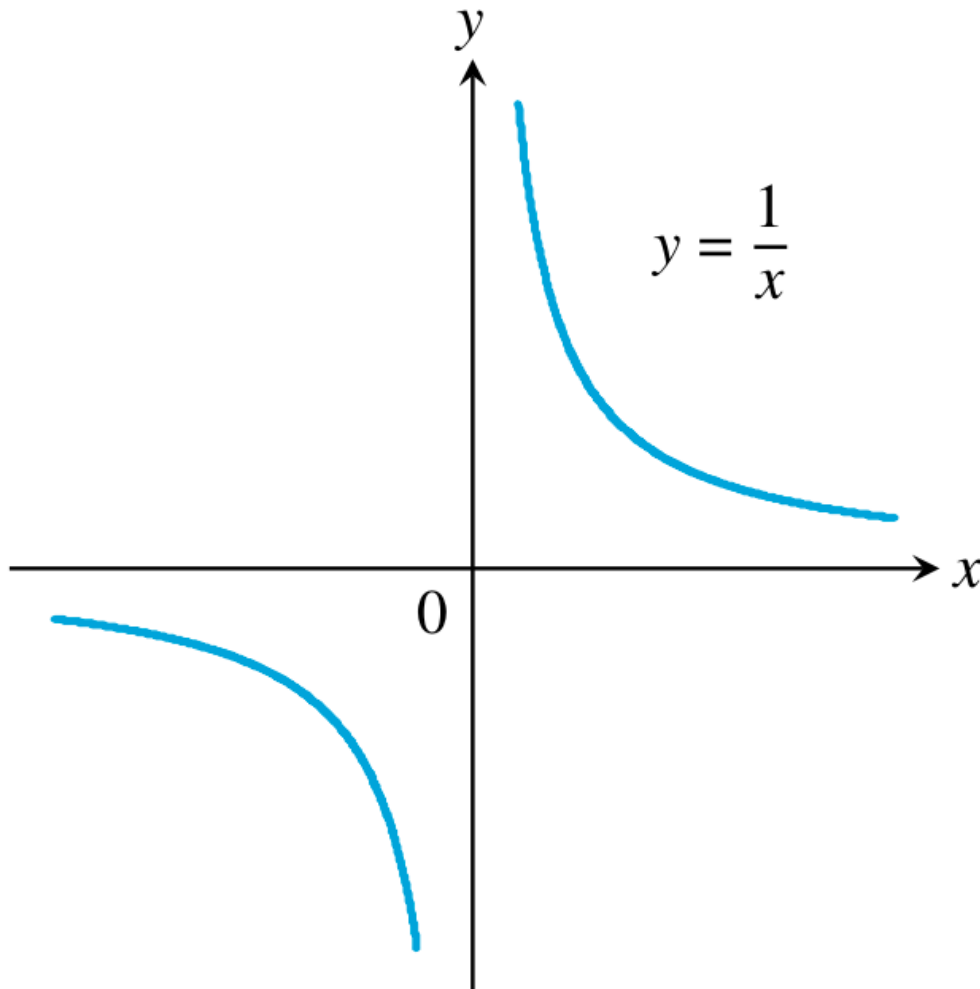
# Παράδειγμα



# Συνεχής συνάρτηση

Μια συνάρτηση είναι **συνεχής**, εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Όμως, μια συνεχής συνάρτηση δεν οφείλει να είναι συνεχής σε οποιοδήποτε διάστημα.



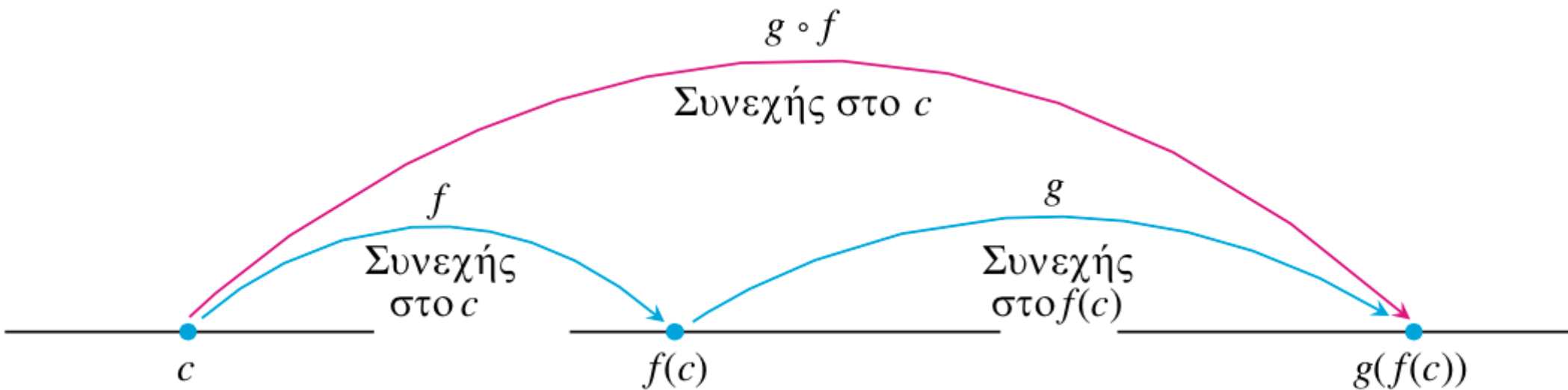
Η συνάρτηση  $1/x$  έχει πεδίο ορισμού το  $x \neq 0$  και είναι συνεχής, διότι είναι συνεχής σε κάθε σημείο στο πεδίο ορισμού της.

Παρόλα αυτά, στο διάστημα π.χ.  $[-1, 1]$  δεν είναι συνεχής καθώς στο  $x=0$  δεν έχει όριο.

# Συνέχεια σύνθετων συναρτήσεων

## Θεώρημα 9 Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $c$  και η  $g$  είναι συνεχής στο  $f(c)$ , τότε η σύνθετη συνάρτηση  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $c$ .

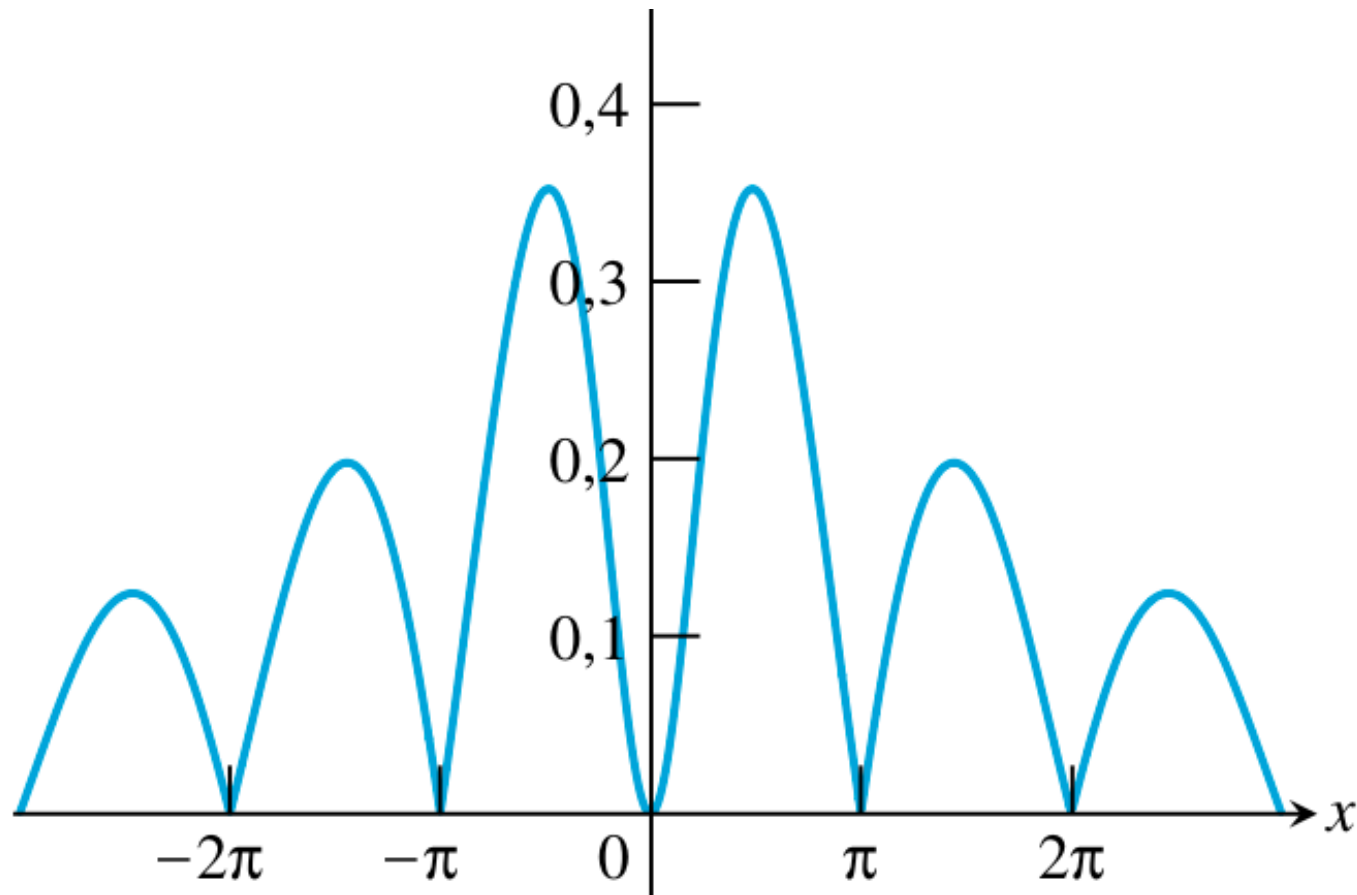


# Άσκηση 4

Δείξτε ότι η

$$y = \left| \frac{x \sin x}{x^2 + 2} \right|$$

είναι συνεχής.

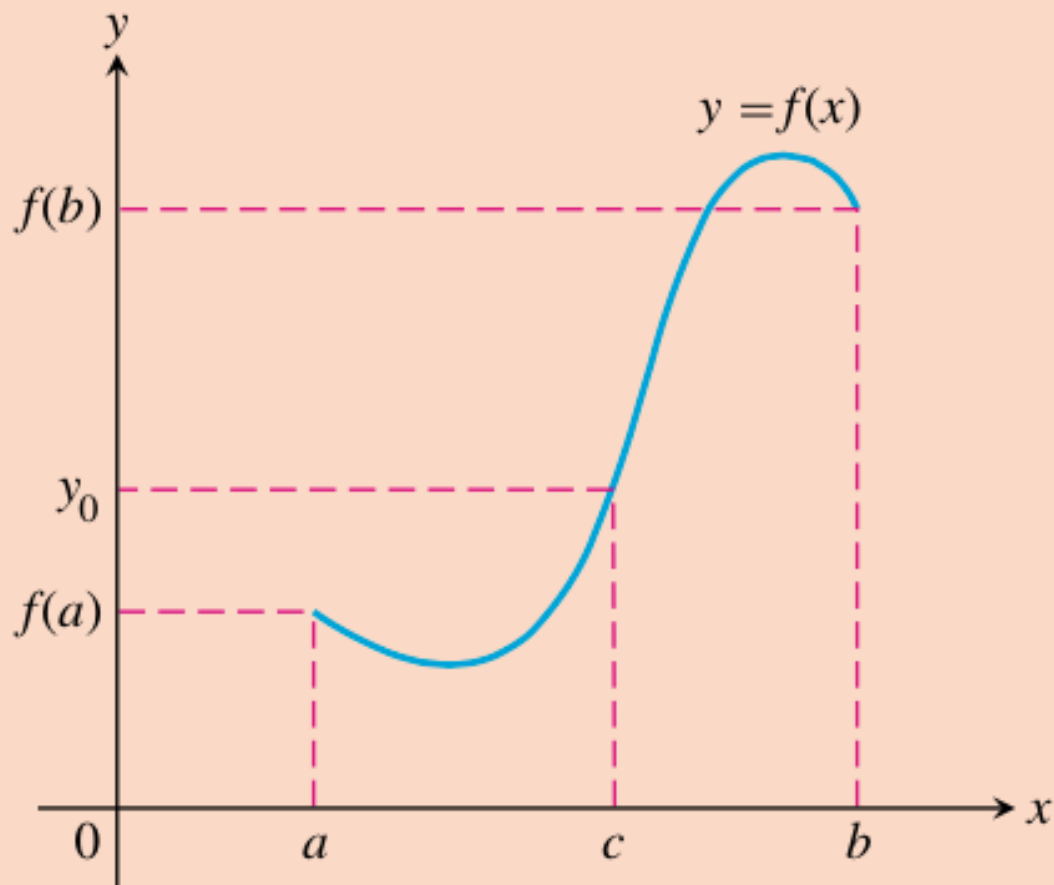




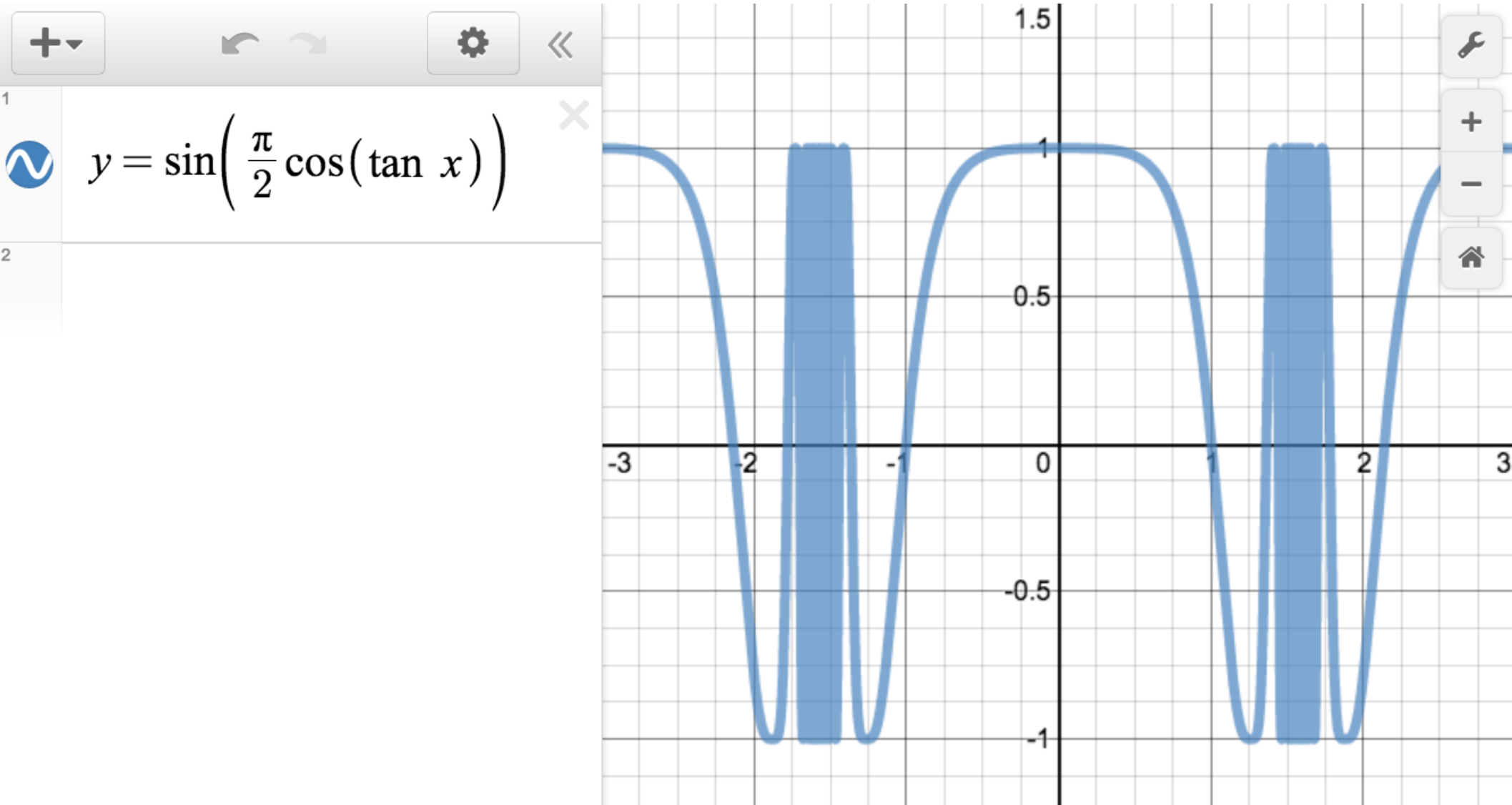
# Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

**Θεώρημα 10** Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις


Μια συνάρτηση  $y = f(x)$  που είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα  $[a, b]$  παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των  $f(a)$  και  $f(b)$ . Με άλλα λόγια, αν  $y_0$  είναι τυχούσα ενδιάμεση τιμή μεταξύ των  $f(a)$  και  $f(b)$ , τότε  $y_0 = f(c)$  για κάποιο  $c$  στο  $[a, b]$ .



# Άσκηση



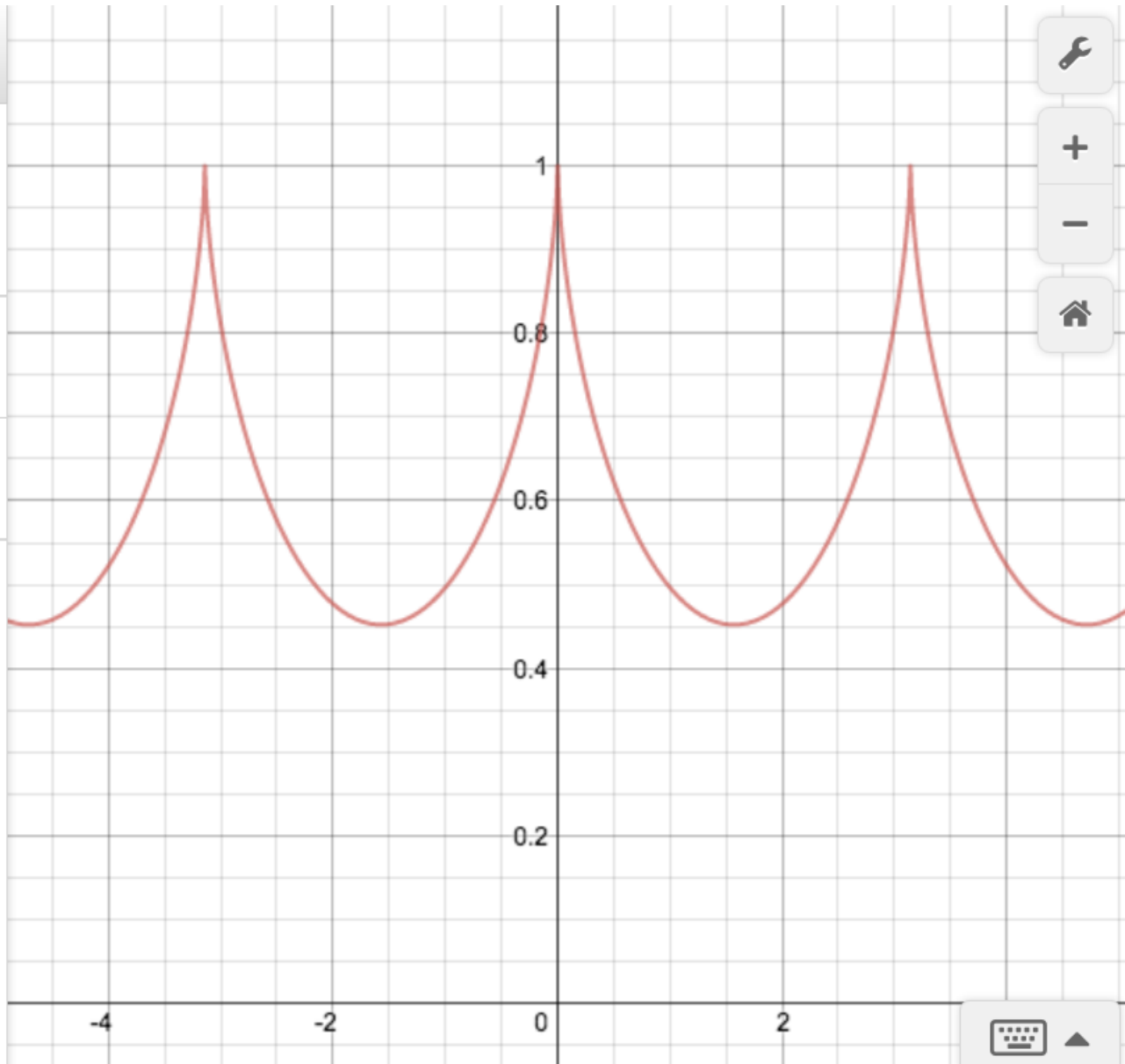
# Άσκηση

1   $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} \cos\left((\sin x)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)\right)$  ✕

2 ✕

3 ✕

4



# Επανάληψη βασικών ιδιοτήτων των παραγώγων

Ορισμός της παραγώγου:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

# Παράγωγος

Να βρεθεί η παράγωγος, με χρήση του ορισμού, της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

# Παράγωγος

Άθροισμα/Διαφορά:

$$F(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Γινόμενο:

$$F(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Λόγος:

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

# Παράγωγοι ανώτερης τάξης

$$\text{Έστω } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 1$$

$$1^{\text{η}} \text{ Παράγωγος: } \frac{df}{dx} = x^3 - 6x$$

$$2^{\text{η}} \text{ Παράγωγος: } \frac{d^2 f}{dx^2} = 3x^2 - 6$$

$$3^{\text{η}} \text{ Παράγωγος: } \frac{d^3 f}{dx^3} = 6x$$

# Παράγωγοι σύνθετης συνάρτησης

$$f(u(x)) = e^{x^2 - 2x - 3} = e^{u(x)} \quad u(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$\frac{df}{dx} = \left( \frac{df}{du} \right) \left( \frac{du}{dx} \right) = \left[ e^{x^2 - 2x - 3} \right] \cdot [2x - 2]$$



# 2η Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Γενικός Κανόνας:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{du} \frac{du}{dx} \right) \\ &= \frac{d^2 f}{du^2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{df}{du} \right) \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)\end{aligned}$$

# Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin(g(x))$	$\cos(g(x)) \cdot g'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos(g(x))$	$-\sin(g(x)) \cdot g'(x)$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

# Παράγωγοι εκθετικών συναρτήσεων

$f(x)$	$f'(x)$
$e^x$	$e^x$
$e^{g(x)}$	$e^{g(x)} g'(x)$
$a^x$	$a^x \ln a$

# Παράγωγοι λογαριθμικών συναρτήσεων

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\ln(g(x))$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$