ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 5ο

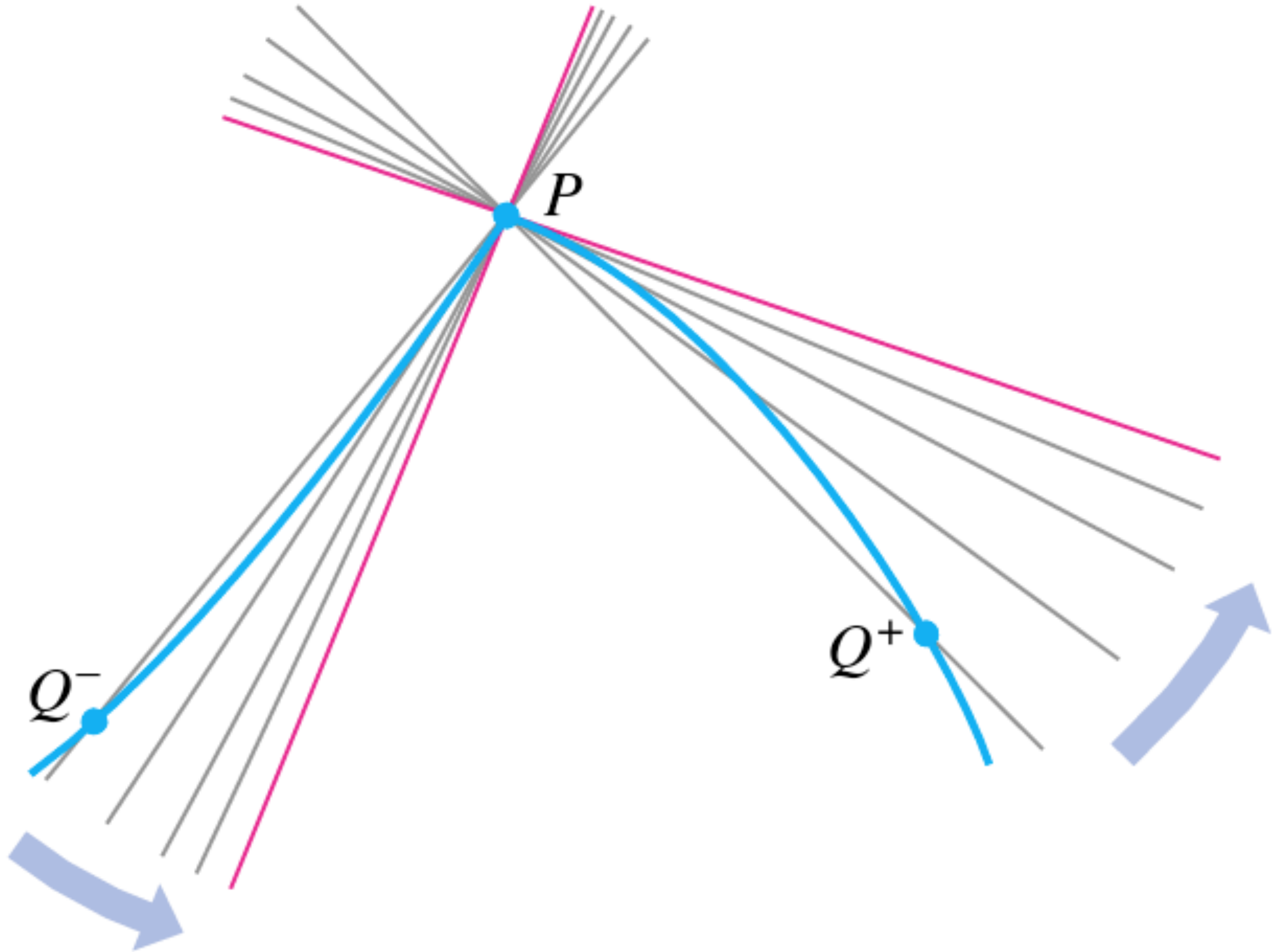
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Παραγωγισιμότητα και συνέχεια

Θεώρημα 1 **Η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται και συνέχεια**

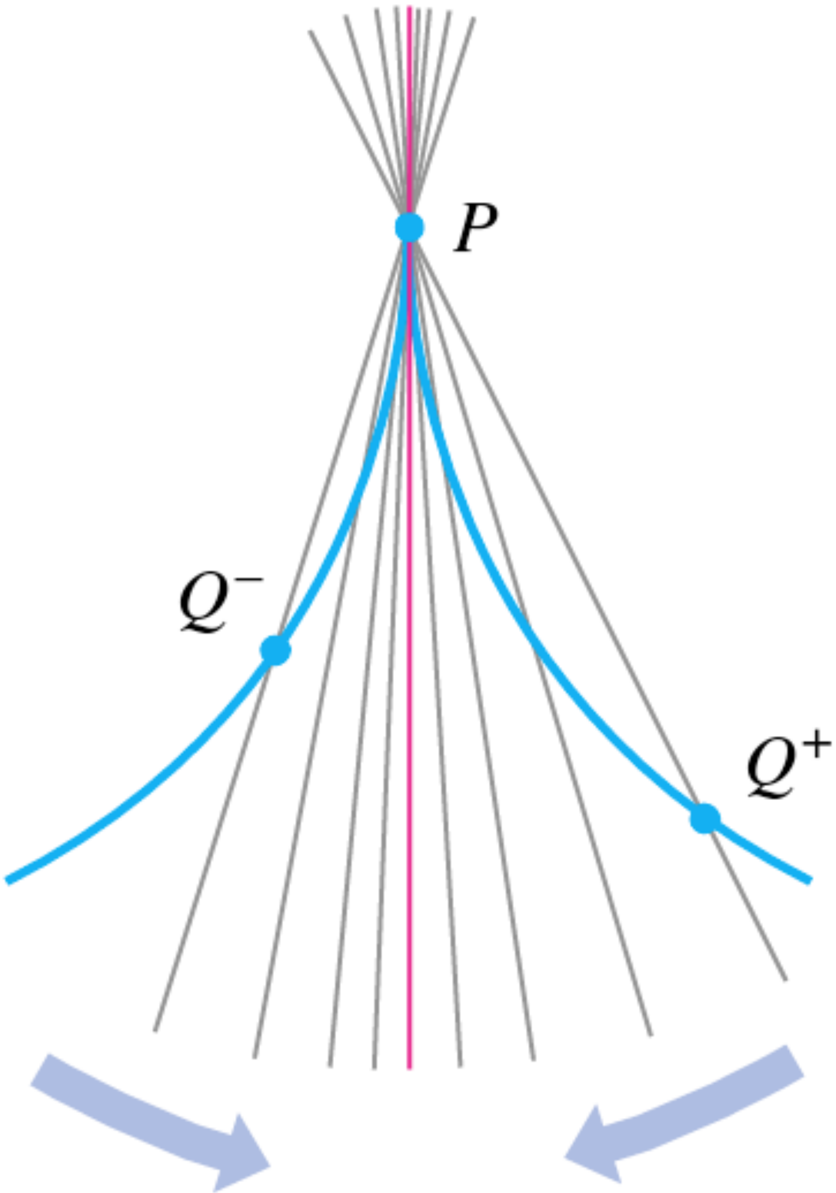
Αν η f έχει παράγωγο στο $x = c$, τότε η f είναι συνεχής στο $x = c$.

Μη-παραγωγίσιμες συναρτήσεις



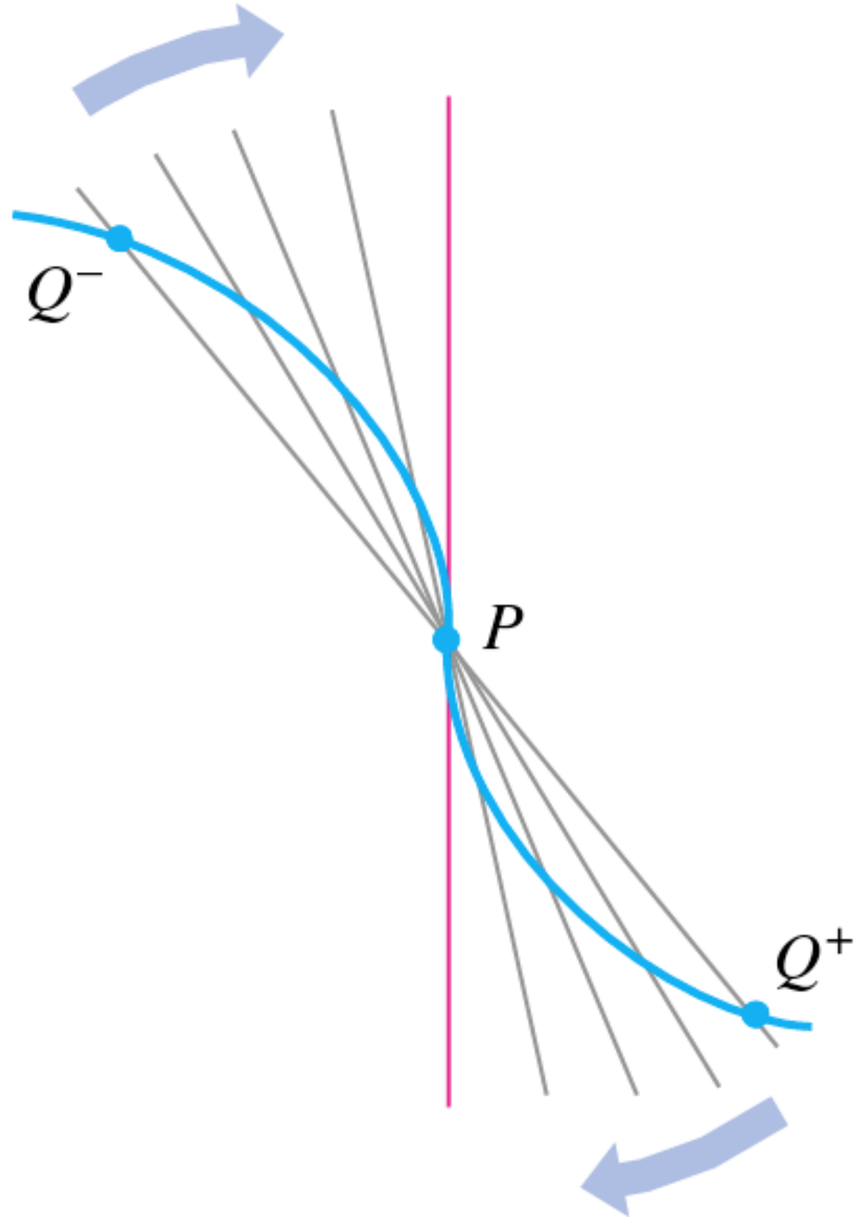
γωνιακό σημείο

Μη-παραγωγίσιμες συναρτήσεις



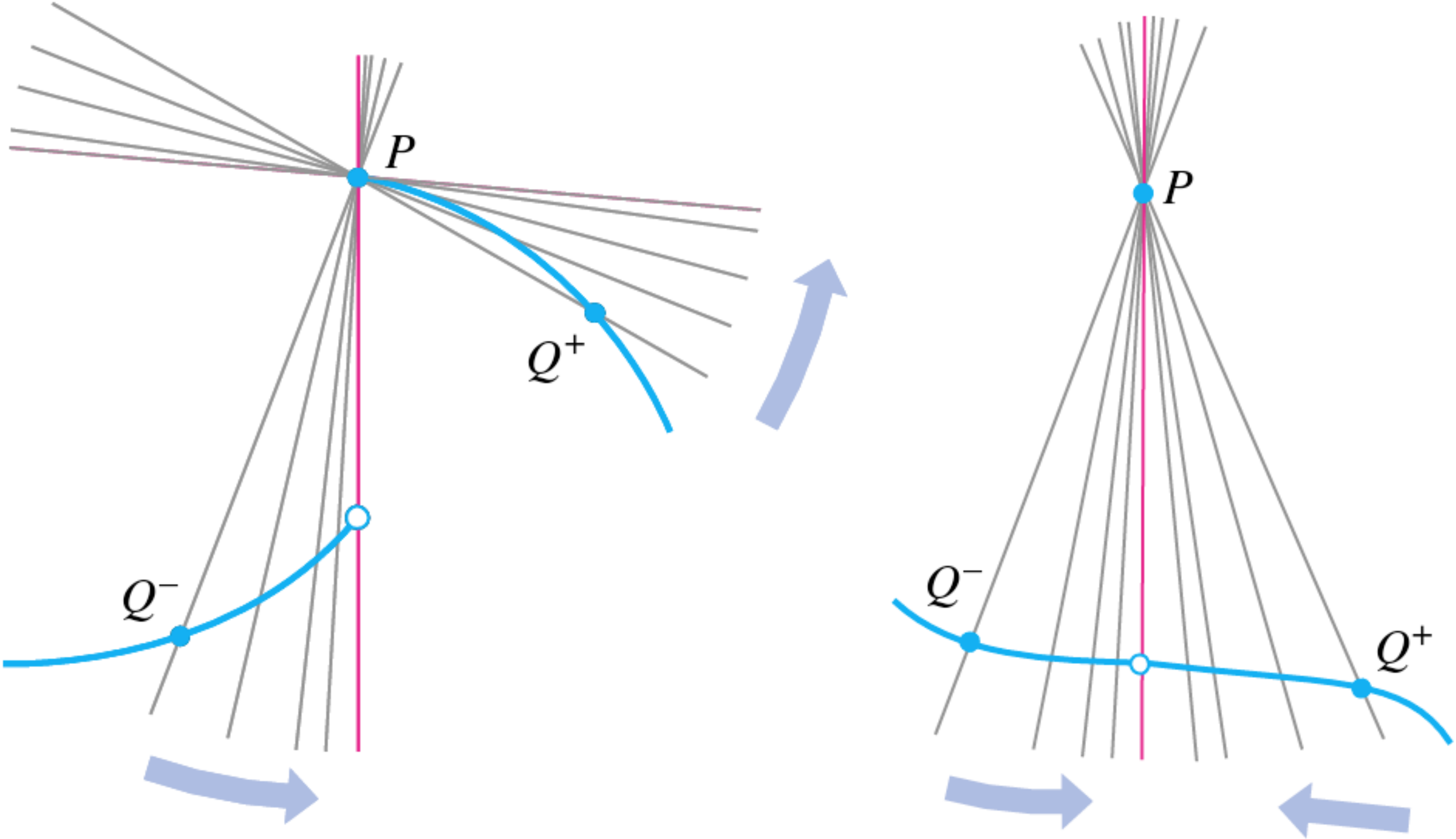
σημείο ανάκαμψης

Μη-παραγωγίσιμες συναρτήσεις



αμφίπλευρη άπειρη εφαπτομένη

Μη-παραγωγίσιμες συναρτήσεις



ασυνέχεια

Παραγώγιση παραμετροποιημένων καμπυλών

Έστω καμπύλη που ορίζεται παραμετρικά ως

$$x = x(t) \quad \text{και} \quad y = y(t)$$

Παραμετρικός τύπος της dy/dx

Αν και οι τρεις παράγωγοι υπάρχουν και είναι $dx/dt \neq 0$, τότε

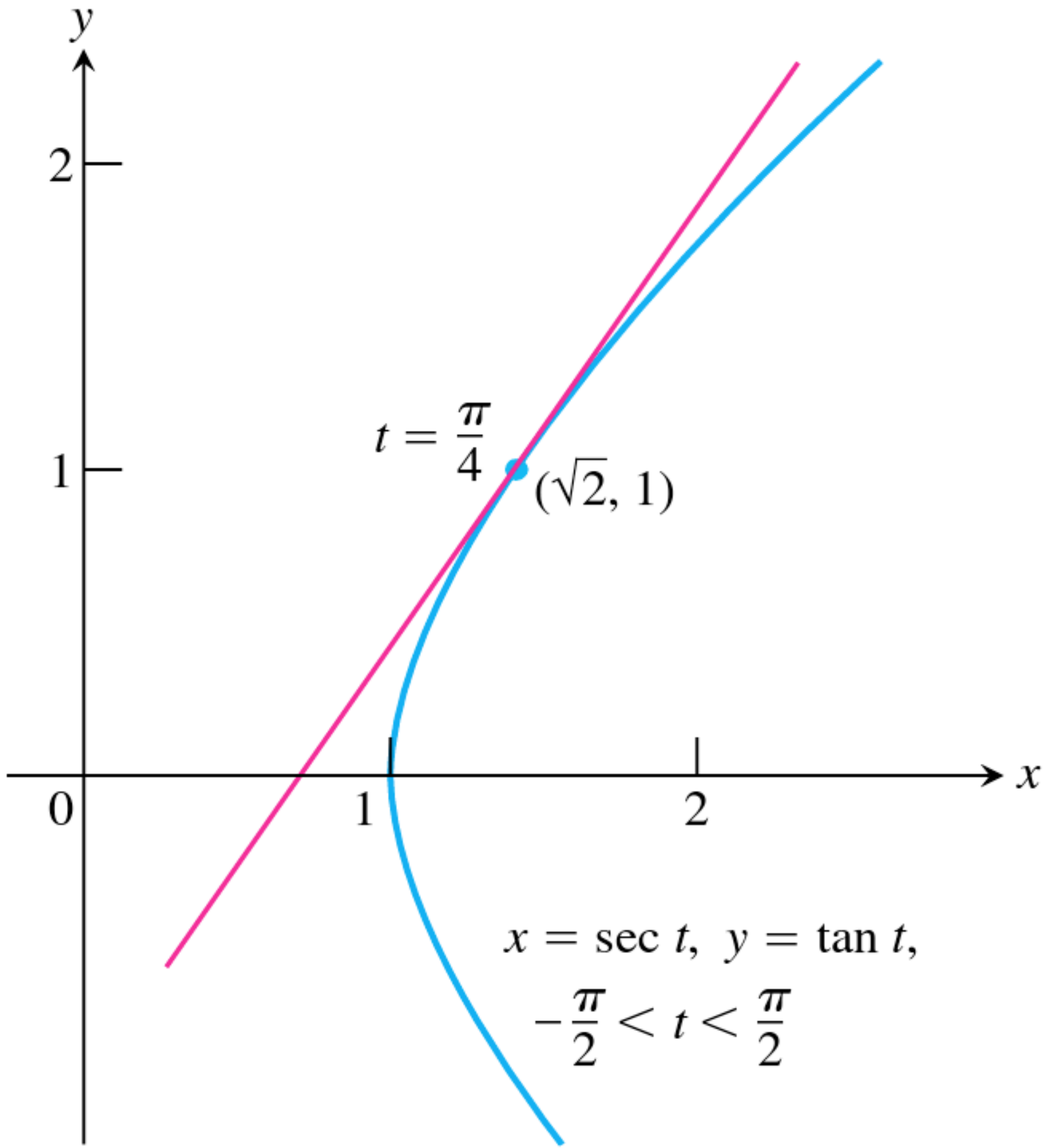
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

Παραμετρικός τύπος της d^2y/dx^2

Αν οι εξισώσεις $x = f(t)$, $y = g(t)$ ορίζουν την y ως διαφορίσιμη συνάρτηση του x, τότε σε κάθε σημείο όπου $dx/dt \neq 0$, θα είναι

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}.$$

Παράδειγμα



Παράδειγμα

Βρείτε το d^2y/dx^2 συναρτήσει του t αν $x = t - t^2$, $y = t - t^3$.

Λύση

Βήμα 1: Εκφράζουμε το $y' = dy/dx$ συναρτήσει του t.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

Βήμα 2: Παραγωγίζουμε το y' ως προς t.

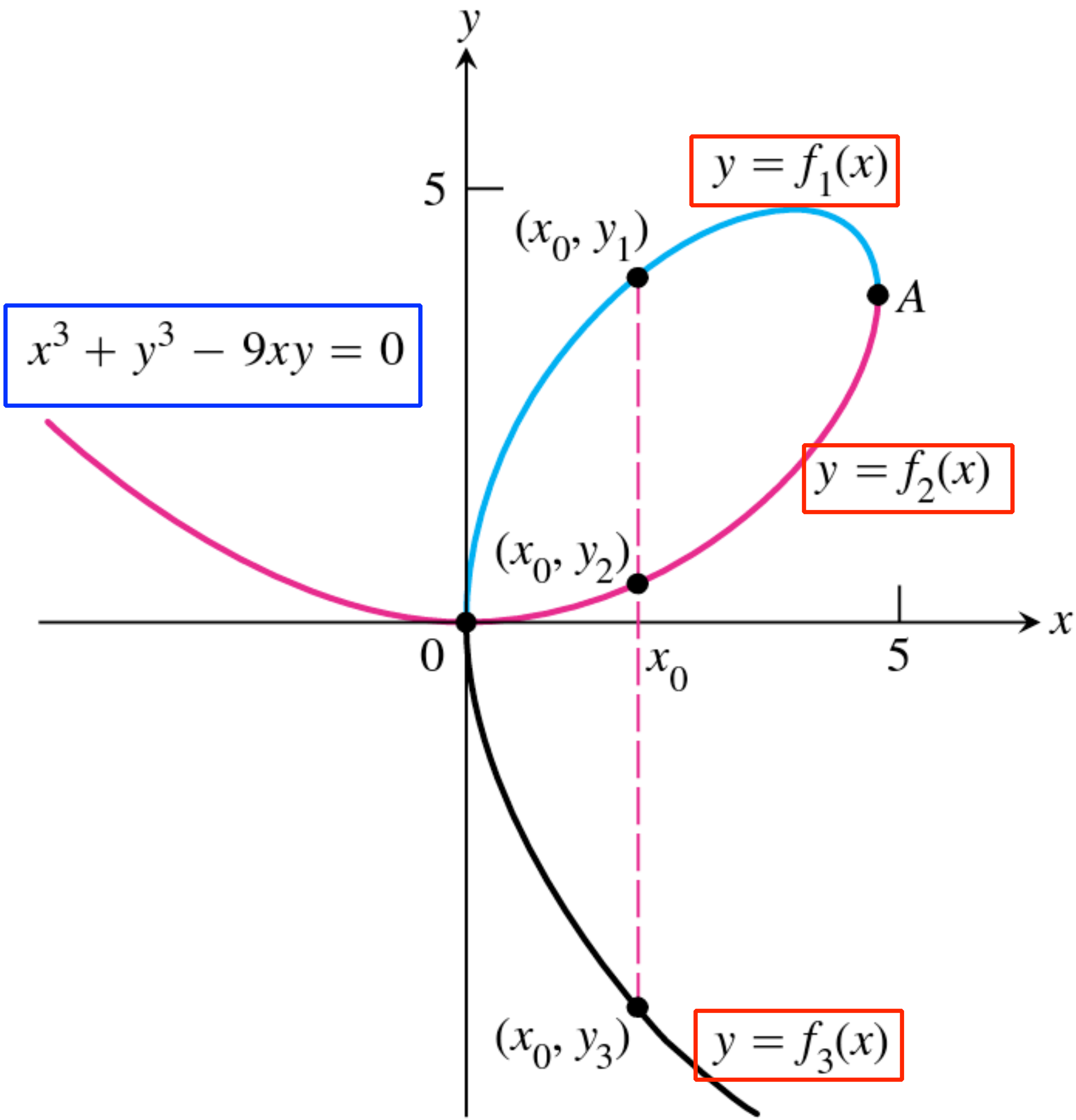
$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}\right) = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^2}.$$

Παράγωγος πηλίκου

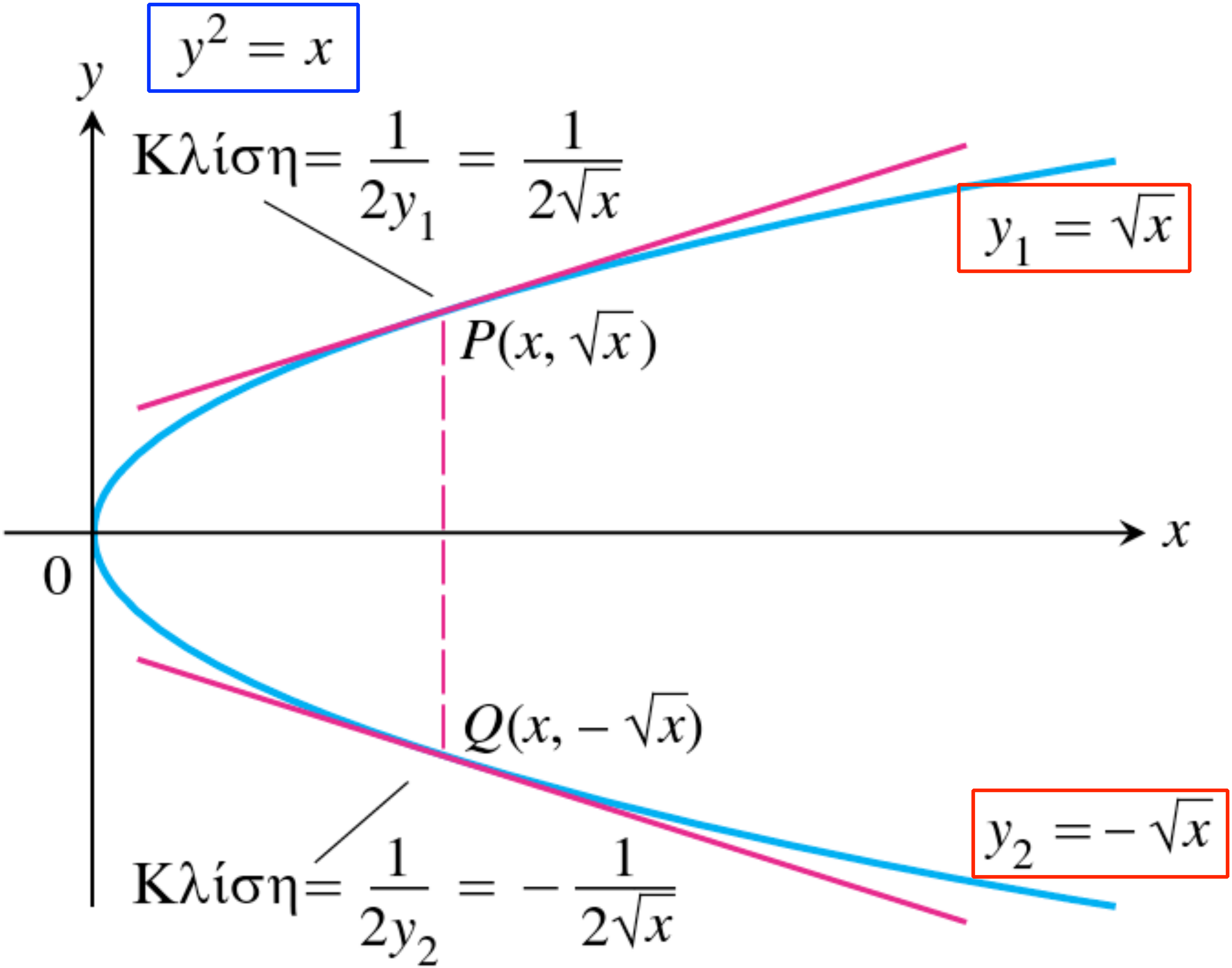
Βήμα 3: Διαιρούμε το dy'/dt με το dx/dt.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2 - 6t + 6t^2)/(1 - 2t)^2}{1 - 2t} = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^3}$$

Πεπλεγμένες συναρτήσεις



Παράδειγμα



$y^2 = x$
y
Κλίση= $\frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y_1 = \sqrt{x}$
$P(x, \sqrt{x})$
x
0
$Q(x, -\sqrt{x})$
$y_2 = -\sqrt{x}$
Κλίση= $\frac{1}{2y_2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Παράδειγμα

Βρείτε την dy/dx αν $y^2 = x$.

$$y^2 = x$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

Άρα

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

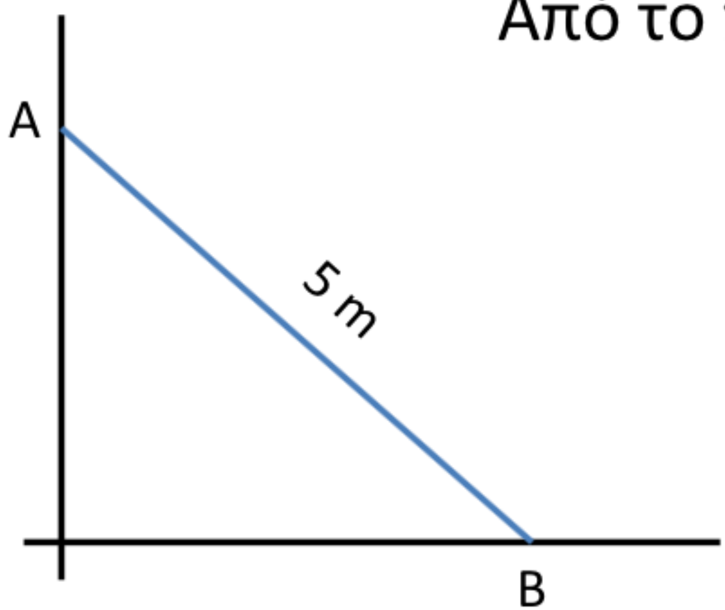
$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Παράδειγμα

Μια σκάλα μήκους 5 μέτρων ακουμπάει στον τοίχο (σημείο *A*) και στο δάπεδο (σημείο *B*). Αν το *B* ολισθαίνει με ταχύτητα 1 m/s, με τί ταχύτητα ολισθαίνει το *A* τη στιγμή που το *B* περνά από τη θέση x = 2m.

Παράδειγμα

Μια σκάλα μήκους 5 μέτρων ακουμπάει στον τοίχο (σημείο *A*) και στο δάπεδο (σημείο *B*). Αν το *B* ολισθαίνει με ταχύτητα 1 m/s, με τί ταχύτητα ολισθαίνει το *A* τη στιγμή που το *B* περνά από τη θέση x = 2m.



Από το πυθαγόρειο θεώρημα: $x^2 + y^2 = 25$

Παραγωγίζουμε ως προς t:

$$\Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Κανόνας L' Hopital

Κανόνας του L'Hôpital (ισχυρότερη μορφή)

Έστω ότι

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

και ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ταυτόχρονα διαφορίσιμες σε ένα ανοιχτό διάστημα (a, b) που περιέχει το σημείο x_0. Έστω ακόμη ότι $g'(x) \neq 0$ σε κάθε σημείο του (a, b) εκτός, ενδεχομένως, στο x_0. Τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{1}$$

εφόσον το όριο του δεξιού μέλους υπάρχει.

Εξάσκηση σε παλαιότερα θέματα

1) Είναι αληθές ότι εάν: $x\cos(y) + y\cos(x) = \pi$, τότε

$$\frac{d^2y}{dx^2}(0) = \pi$$

2) Σε ένα παιδικό πάρκο υπάρχει τσουλίθρα σε σχήμα παραβολής $y = (x-1)^2$ για $0 \leq x \leq 1$. Αν η κάθετη ταχύτητα ενός μικρού παιδιού που χρησιμοποιεί την τσουλίθρα είναι $dy/dt = -y(1-y)$, υπολογίστε την οριζόντια ταχύτητά της στο σημείο $y = 1/2$.

3) Να βρεθεί το απόλυτο μέγιστο και το απόλυτο ελάχιστο της συνάρτησης $x^{1/x}$.

Εξάσκηση σε παλαιότερα θέματα

Άσκηση 4 : Βρείτε τα όρια δύο (2) εκ των τριών κάτωθι συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τον κανόνα l'Hopital (Προσοχή : των πρώτων δύο όταν $x \to 0$ και του τρίτου όταν $x \to 3$).

1.
$$f(x) = \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$$

2.
$$f(x) = \left(e^{2x} + x\right)^{\frac{1}{2x}}$$

3.
$$f(x) = \frac{x^x - 3^3}{3^x - x^3}$$

Εξάσκηση σε παλαιότερα θέματα

Άσκηση 5: Να υπολογιστούν δύο από τα τρία όρια:

1. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + \sin x}{e^x + x}$

2. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$

3. $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} (\sin x)^x$

Εξάσκηση σε παλαιότερα θέματα

1. Παρατηρούμε ότι $x^2+x-1 \le x^2+x+\sin x \le x^2+x+1$, οπότε ο αριθμητής φράσσεται από πάνω και κάτω από δύο συναρτήσεις που απειρίζονται οπότε το όριό του είναι το άπειρο. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+\sin x}{e^x+x} \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^2+x+\sin x)'}{(e^x+x)'} =$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1+\cos x}{e^x+1} \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2-\sin x}{e^x} = 0.$

2. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^x-x}{\ln x - x+1} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to1} \frac{(x^x-x)'}{(\ln x-x+1)'} = \lim\limits_{x\to1} \frac{x^x(\ln x+1)-1}{\frac{1}{x}-1} \left(\frac{0}{0}\right) =$ $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^x(\ln x+1)^2+x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2.$

3. $\lim\limits_{x\to0^+} (\sin x)^x = \lim\limits_{x\to0^+} e^{x\ln(\sin x)} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}[x\ln(\sin x)]} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\ln(\sin x)}{1/x}\right]} =$ $e^{\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{(\ln(\sin x))'}{(1/x)'}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{-x^2\cos x}{\sin x}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{-2x\cos x+x^2\sin x}{\cos x}\right]} = e^0 = 1.$