ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 6ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Παράγωγοι αντίστροφων τριγωνομετρικών συν.

$$\frac{d(\sin^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$$

$$\frac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = -\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$$

$$\frac{d(\tan^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{1+u^2}$$

$$\frac{d(\cot^{-1} u)}{dx} = -\frac{du/dx}{1+u^2}$$

$$\frac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$$

$$\frac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$$

Παράγωγοι αντίστροφων υπερβολικών συν.

$$\frac{d(\sinh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad u > 1$$

$$\frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

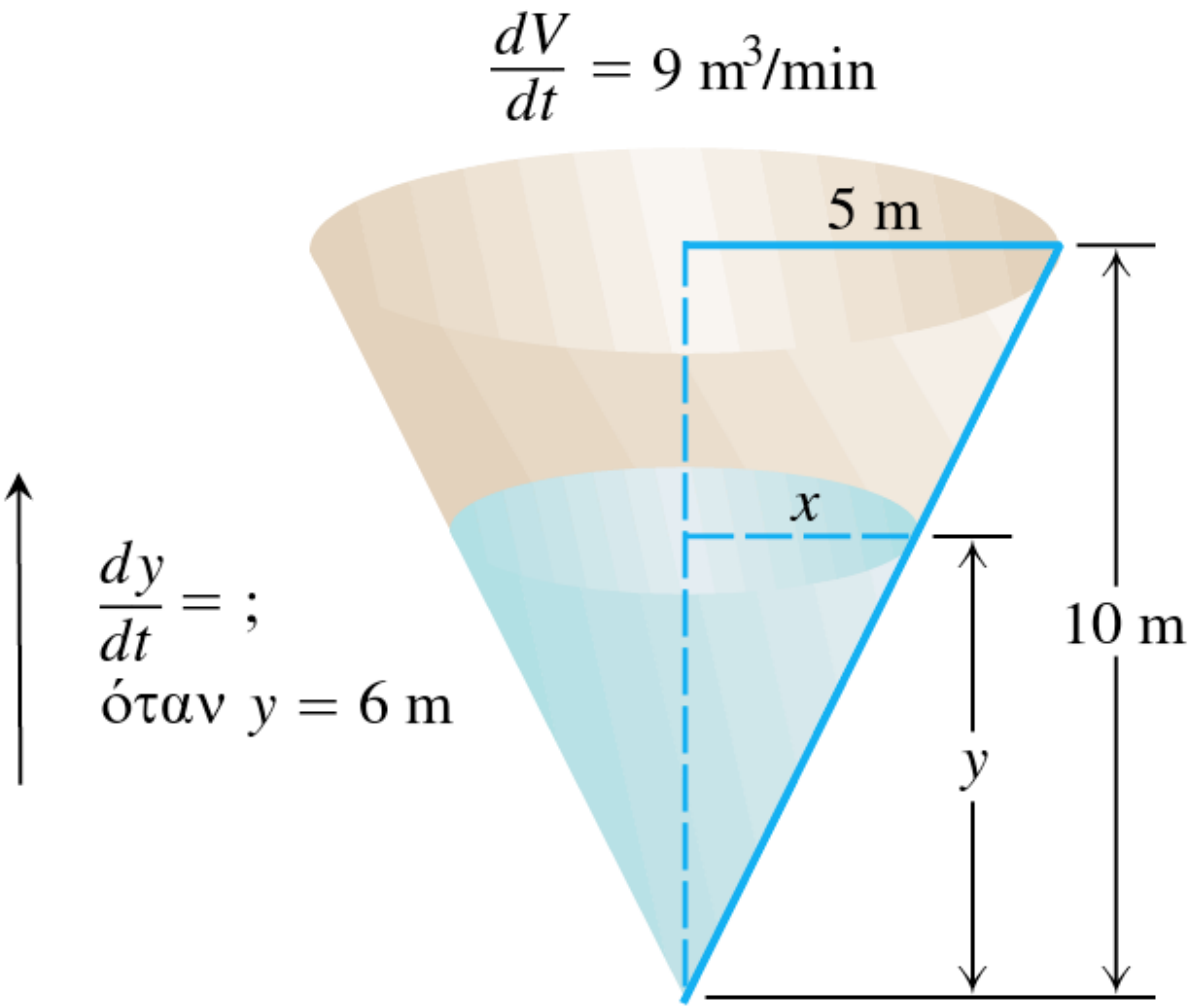
$$\frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{u\sqrt{1-u^2}}, \qquad 0 < u < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{1+u^2}}, \qquad u \neq 0$$

Συναφείς ρυθμοί

Νερό εισρέει σε μια κωνική δεξαμενή με ρυθμό 9 m^3/min . Η δεξαμενή είναι κατακόρυφη με το μυτερό της άκρο προς τα κάτω. Έχει ύψος 10 m και ακτίνα κυκλικής βάσης 5 m. Πόσο γρήγορα ανέρχεται η στάθμη όταν το νερό έχει βάθος 6 m;



Συναφείς ρυθμοί

Ο όγκος του κώνου είναι:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Από όμοια τρίγωνα βρίσκουμε:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \quad \text{δηλαδή} \quad x = \frac{y}{2}$$

Παραγωγίζουμε:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} y^2 \frac{dy}{dt}$$

και τελικά:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0{,}32 \text{ m/min}$$

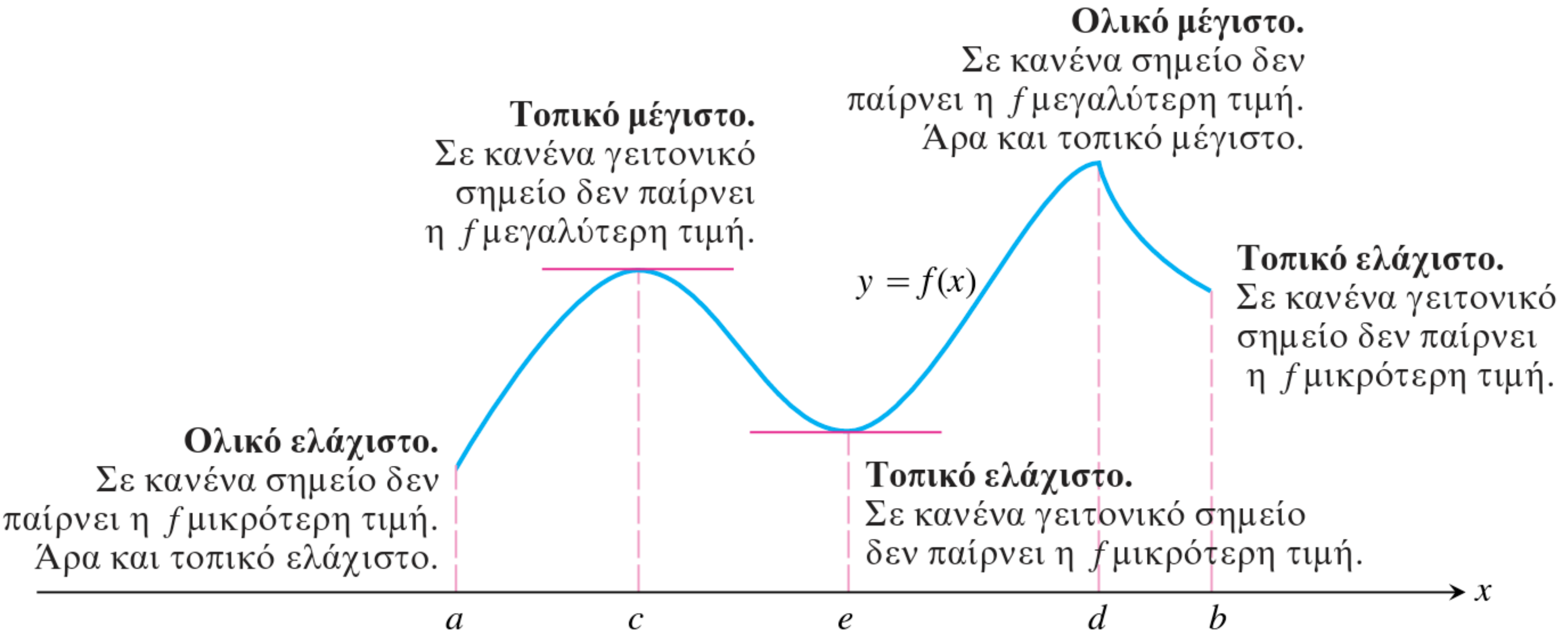
Ακρότατα

Ορισμός **Ολικά ακρότατα**

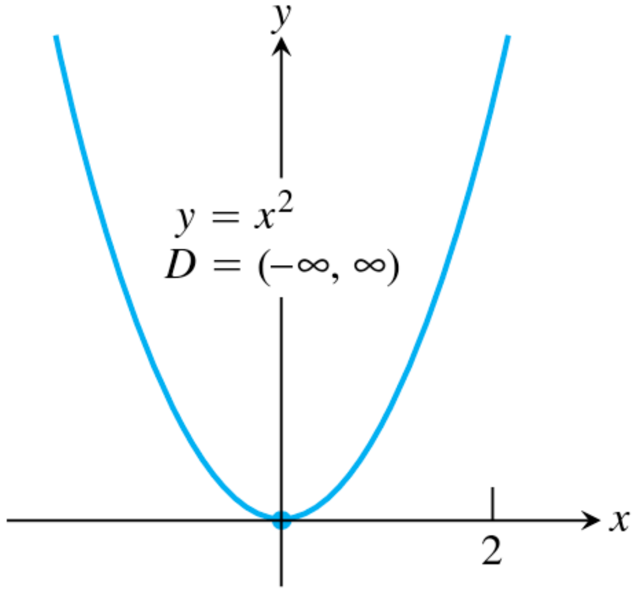
Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το D. Η τιμή $f(c)$ είναι

(α) ολικό (ή απόλυτο) μέγιστο στο D αν και μόνο αν $f(x) \leq f(c)$ για κάθε x στο D,

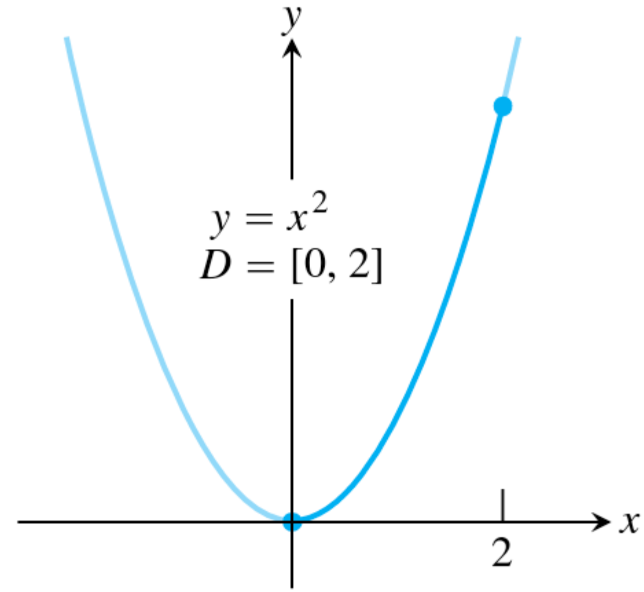
(β) ολικό (ή απόλυτο) ελάχιστο στο D αν και μόνο αν $f(x) \geq f(c)$ για κάθε x στο D.



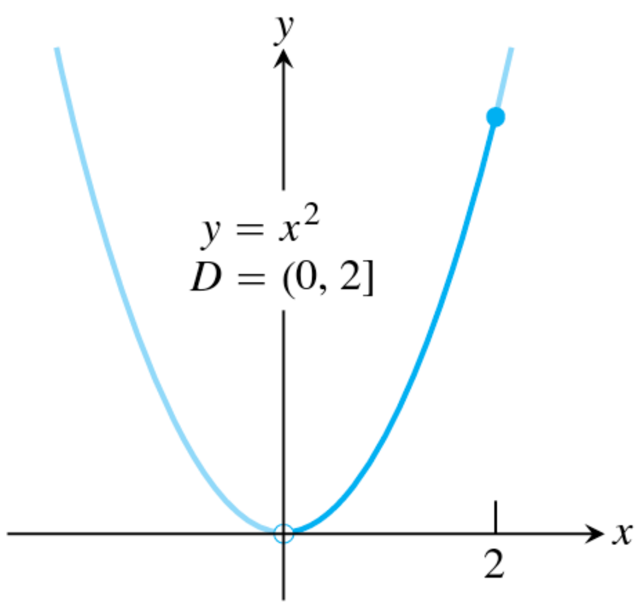
Ακρότατα



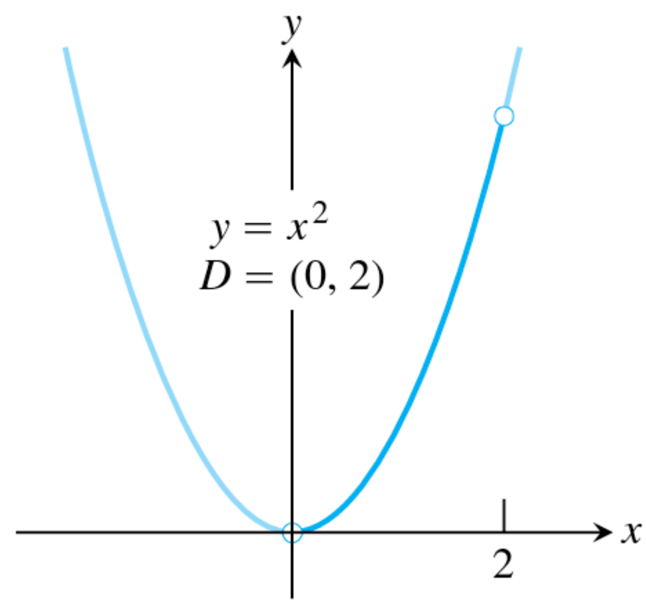
(α) ολικό ελάχιστο μόνο



(β) ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο



(γ) ολικό μέγιστο μόνο

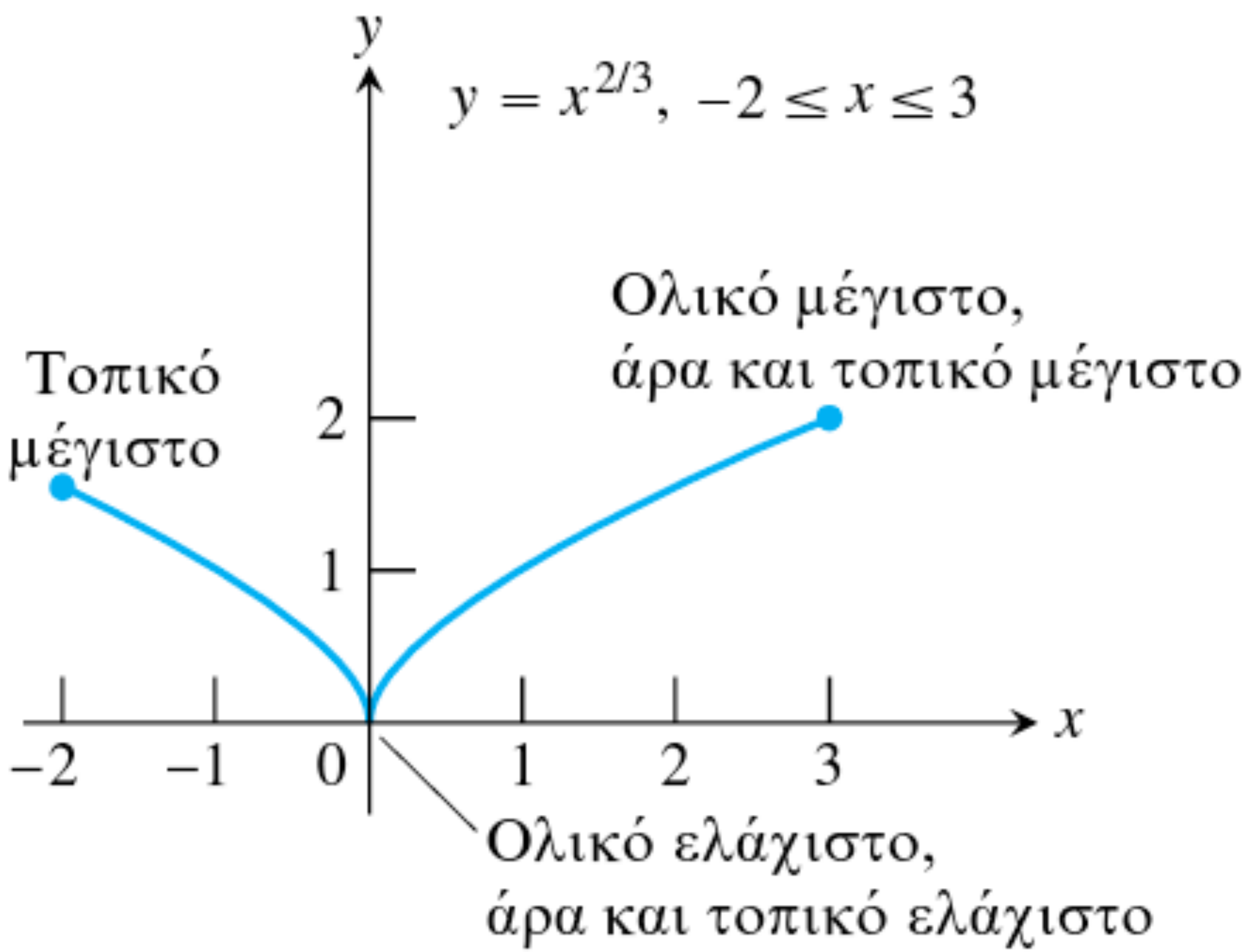


(δ) ούτε ολικό μέγιστο
ούτε ολικό ελάχιστο

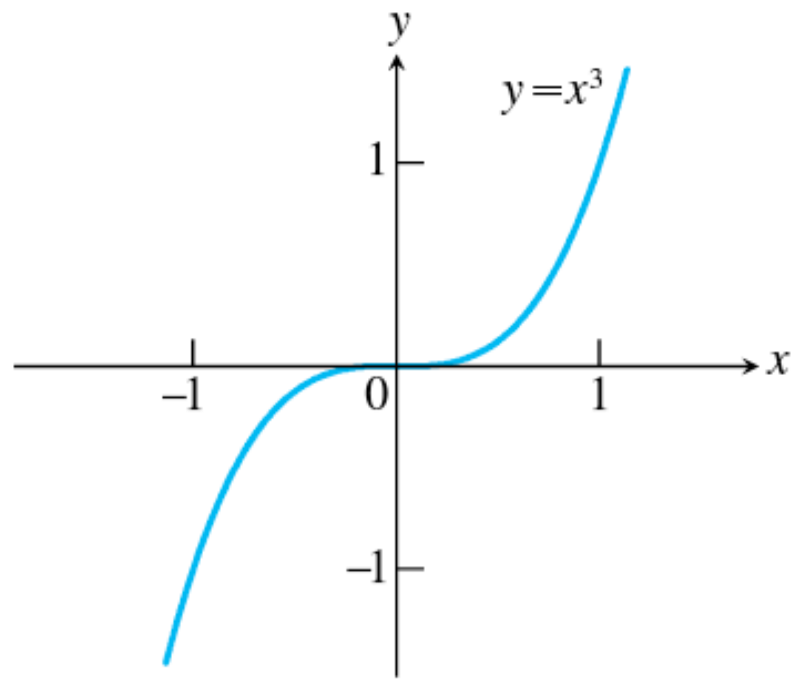
Κρίσιμα σημεία

Ορισμός **Κρίσιμο σημείο**

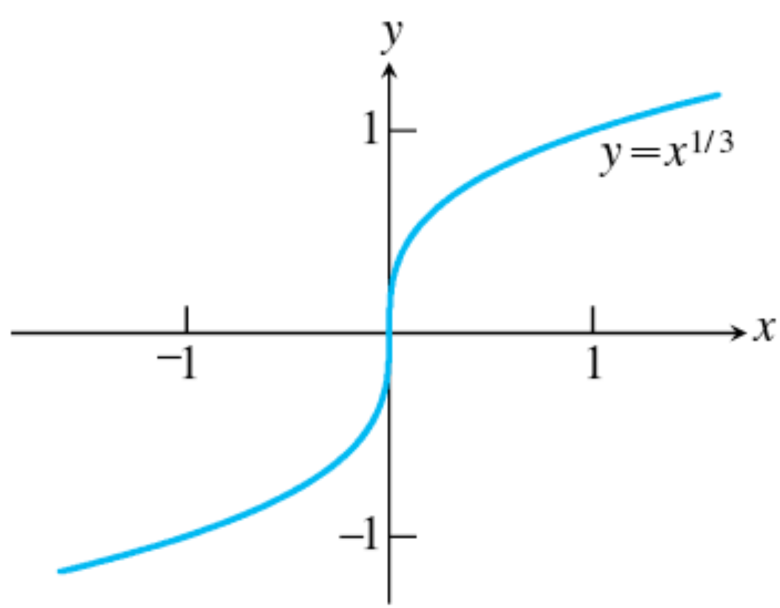
Ένα σημείο του πεδίου ορισμού μιας συναρτήσεως f όπου η f' είτε μηδενίζεται είτε δεν υπάρχει είναι **κρίσιμο σημείο** της f.



Κρίσιμο σημείο χωρίς ακρότατα



(α)

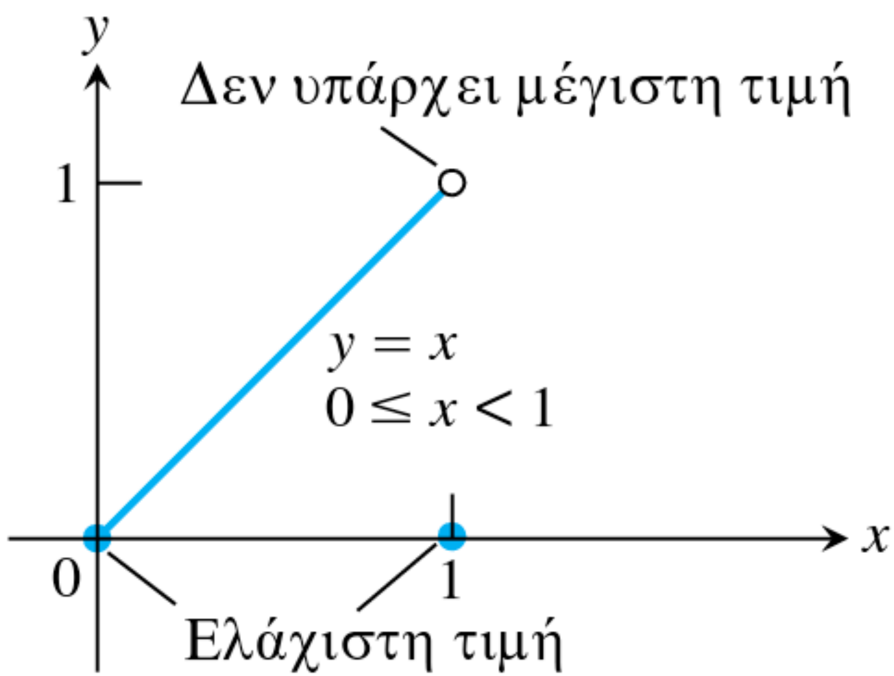


Θεώρημα ακροτάτων για συνεχείς συναρτήσεις

Θεώρημα 1 **Θεώρημα ακροτάτων για συνεχείς συναρτήσεις**

Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του κλειστού διαστήματος I, τότε θα διαθέτει ολικό μέγιστο M και ολικό ελάχιστο m στο I. Δηλαδή, θα υπάρχουν αριθμοί x_1 και x_2 στο I τέτοιοι ώστε $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, και $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε άλλο x στο I (Σχήμα 3.4).

Αντιθέτως αν υπάρχει **ασυνέχεια**, δεν υπάρχει ακρότατο:

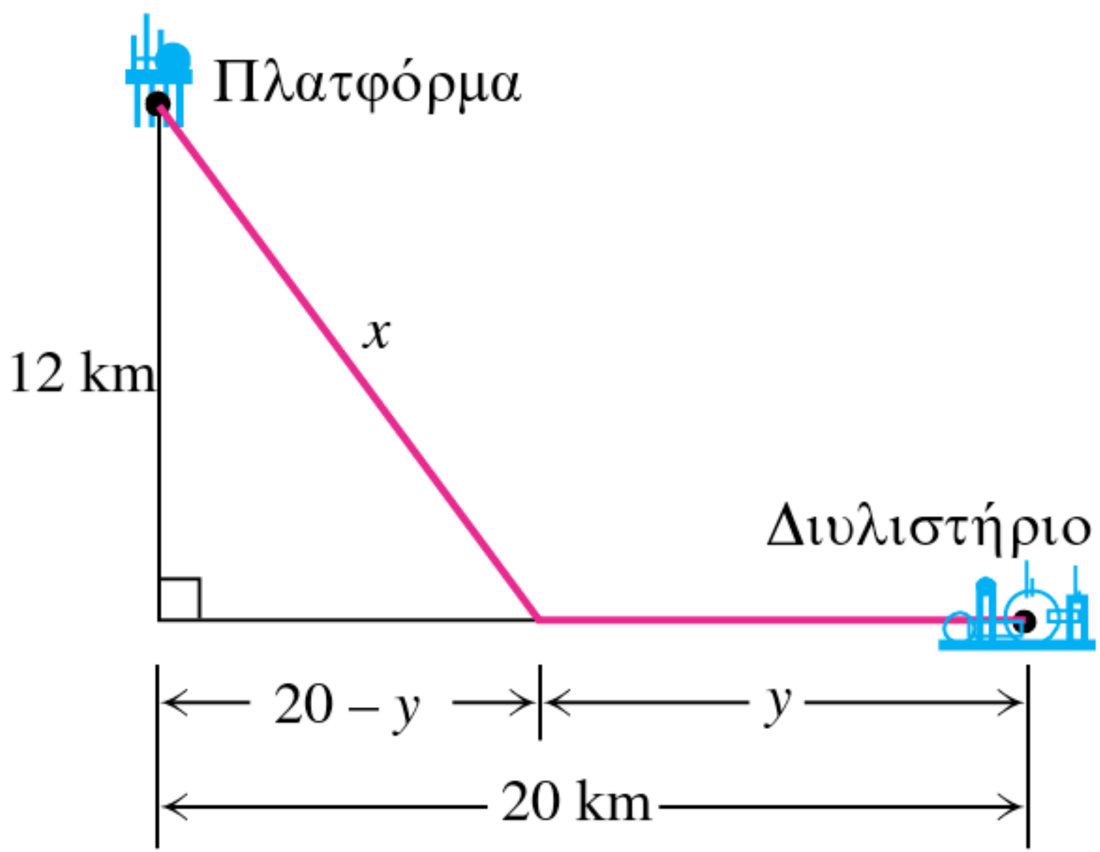


Άσκηση 1

Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει την κορυφή του στην αρχή των αξόνων και τις δύο κορυφές του στην καμπύλη $y = 27 - x^2$. Να βρεθεί το μέγιστο εμβαδό του τριγώνου.

Άσκηση 2

Μια πλατφόρμα γεωτρήσεως που απέχει από την ακτή 12 km πρόκειται να συνδεθεί μέσω αγωγού με παράκτιο διυλιστήριο, το οποίο βρίσκεται 20 km μακρύτερα από το εγγύτερο στην πλατφόρμα σημείο της ακτής. Αν το κόστος του υποθαλάσσιου αγωγού είναι 50.000 € ανά km και το κόστος του επίγειου αγωγού είναι 30.000 € ανά km, τότε ποιος συνδυασμός των δύο τύπων αγωγών θα δώσει τη λιγότερο δαπανηρή σύνδεση;



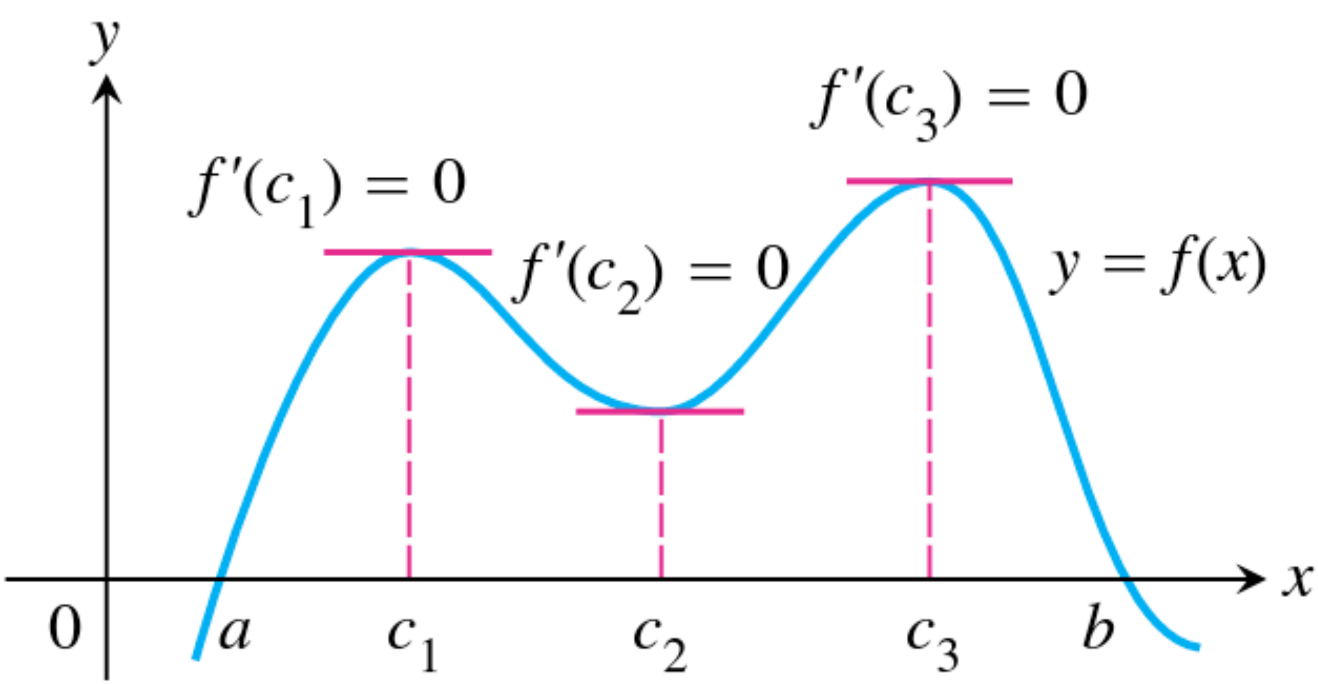
Θεώρημα Rolle

Θεώρημα 3 **Θεώρημα του Rolle**

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε όλο το $[a, b]$ και διαφορίσιμη σε όλο το (a, b). Αν

$$f(a) = f(b) = 0,$$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός c στο (a, b) όπου $f'(c) = 0$ (Σχήμα 3.11).

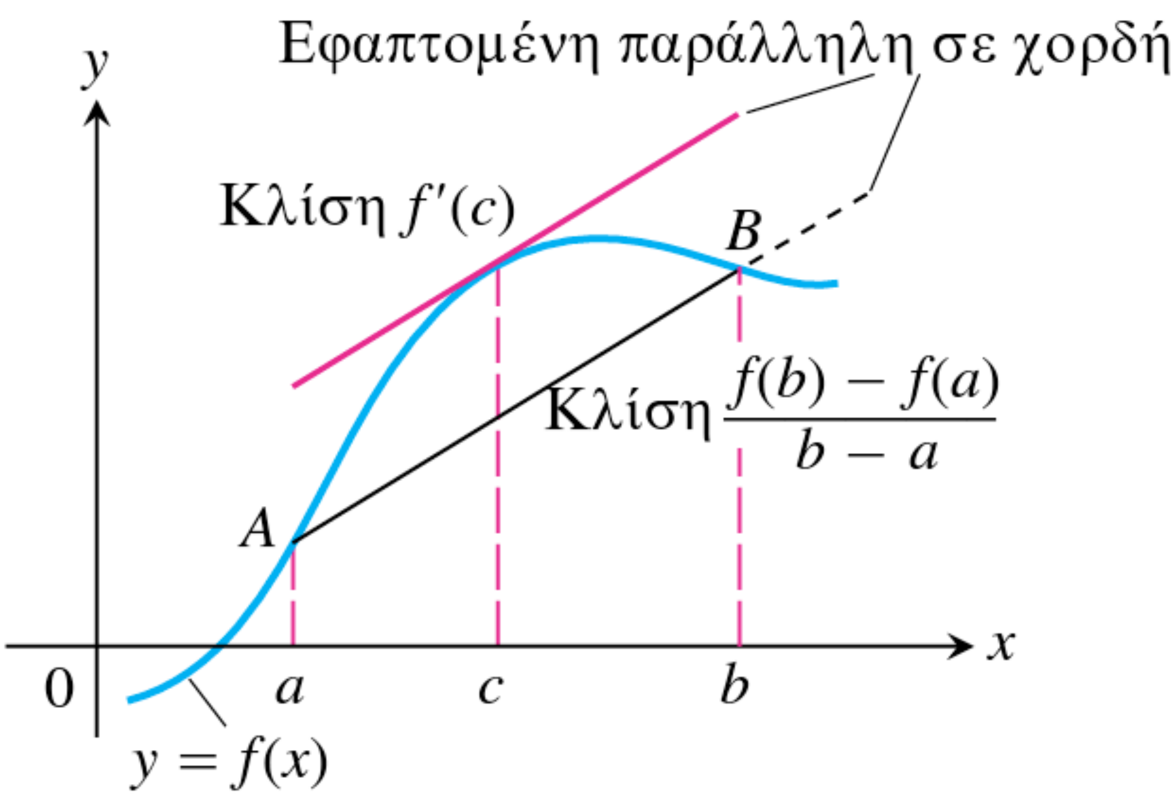


Θεώρημα μέσης τιμής

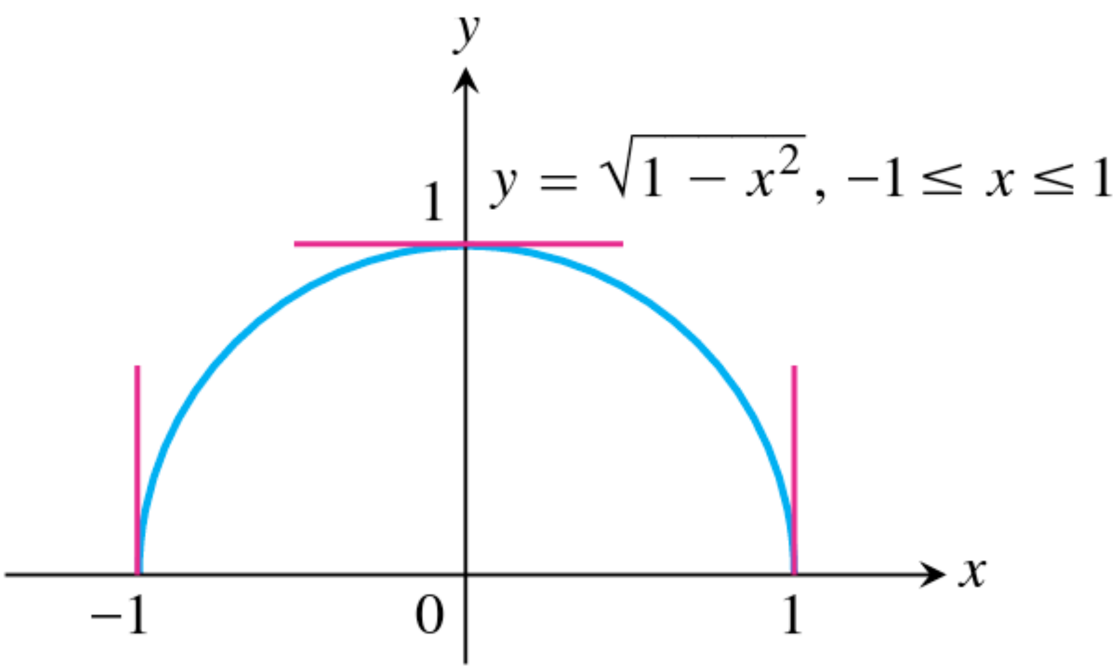
Θεώρημα 4 **Θεώρημα μέσης τιμής**

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, b). Θα υπάρχει τότε τουλάχιστον ένα σημείο c στο (a, b) όπου

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Παράδειγμα

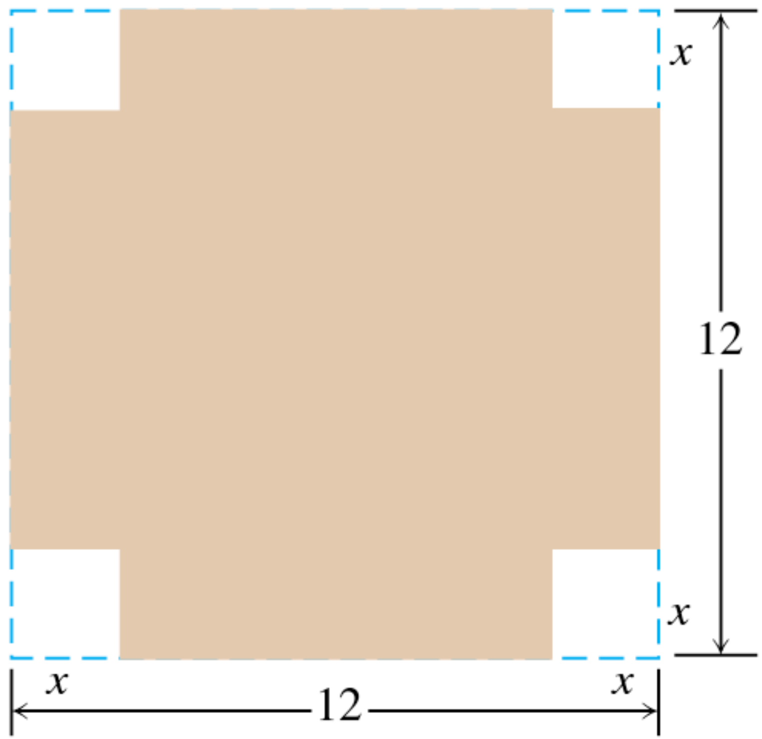


ΣΧΗΜΑ 3.15 Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[-1, 1]$ χωρίς να είναι διαφορίσιμη στα -1 και 1.

Άσκηση 3

Ένα κουτί ανοιχτό από πάνω πρόκειται να κατασκευαστεί από ένα τετράγωνο φύλλο κασσίτερου, διαστάσεων 12×12 cm, αποκόπτοντας τέσσερα ίσα τετράγωνα από τις κορυφές του φύλλου και κατόπιν διπλώνοντας τις προεξέχουσες πλευρές. Πόσο μεγάλα πρέπει να κάνουμε τα τετράγωνα που αποκόβουμε για να έχει μέγιστη χωρητικότητα το κουτί;

Άσκηση 3



(α)