ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

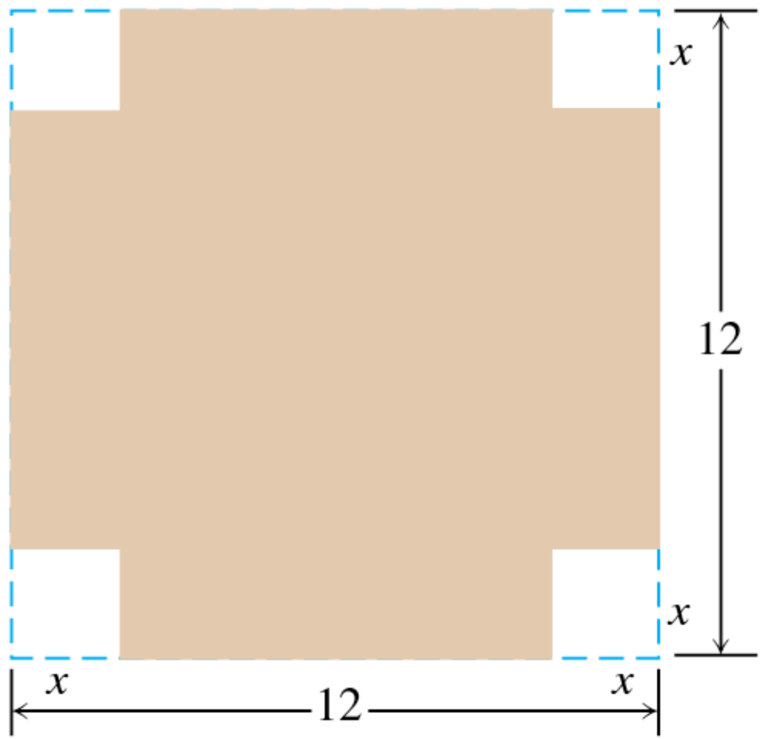
Μέρος 7ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

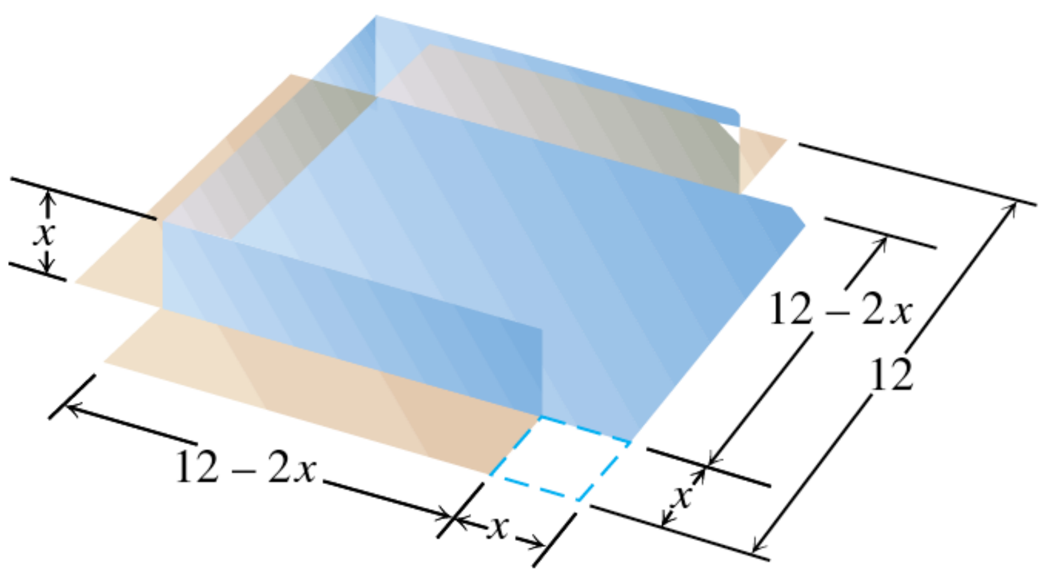
Βελτιστοποίηση: Άσκηση 1

Ένα κουτί ανοιχτό από πάνω πρόκειται να κατασκευαστεί από ένα τετράγωνο φύλλο κασσίτερου, διαστάσεων 12×12 cm, αποκόπτοντας τέσσερα ίσα τετράγωνα από τις κορυφές του φύλλου και κατόπιν διπλώνοντας τις προεξέχουσες πλευρές. Πόσο μεγάλα πρέπει να κάνουμε τα τετράγωνα που αποκόβουμε για να έχει μέγιστη χωρητικότητα το κουτί;

Άσκηση 1



(α)



Άσκηση 1

Ο όγκος του κουτιού είναι:

$$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

με πεδίο ορισμού:

$$0 \leq x \leq 6$$

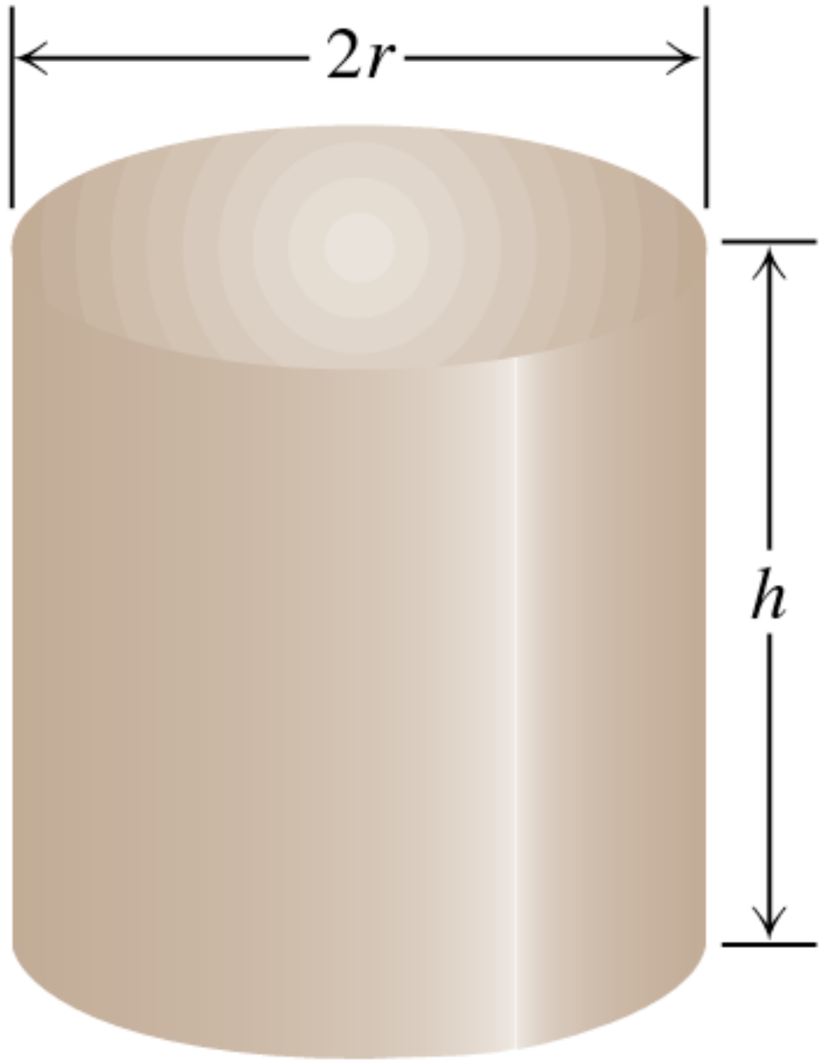
Παραγωγίζουμε:

$$\frac{dV}{dx} = 144 - 96x + 12x^2$$
$$= 12(2 - x)(6 - x)$$

και τελικά: $x = 2$cm.

Βελτιστοποίηση: Άσκηση 2

Πρόκειται να σχεδιάσετε ένα δοχείο λαδιού χωρητικότητας 1 L και κυλινδρικού σχήματος (Σχήμα 3.45). Τι διαστάσεις πρέπει να έχει ώστε να καταναλωθεί το ελάχιστο υλικό για την κατασκευή του;



Άσκηση 2

Ο όγκος του δοχείου είναι:

$$\pi r^2 h = 1000$$

ενώ το συνολικό εμβαδό του υλικού είναι:

$$A = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{κυκλικές βάσεις}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{πλευρικό τοίχωμα}}$$

Αντικαθιστούμε:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}. \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Βρίσκουμε το ακρότατο:

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$0 = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$4\pi r^3 = 2000$$

$$\mathrm{r} = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42$$

Ελέγχουμε τη 2ης τάξης παράγωγο:

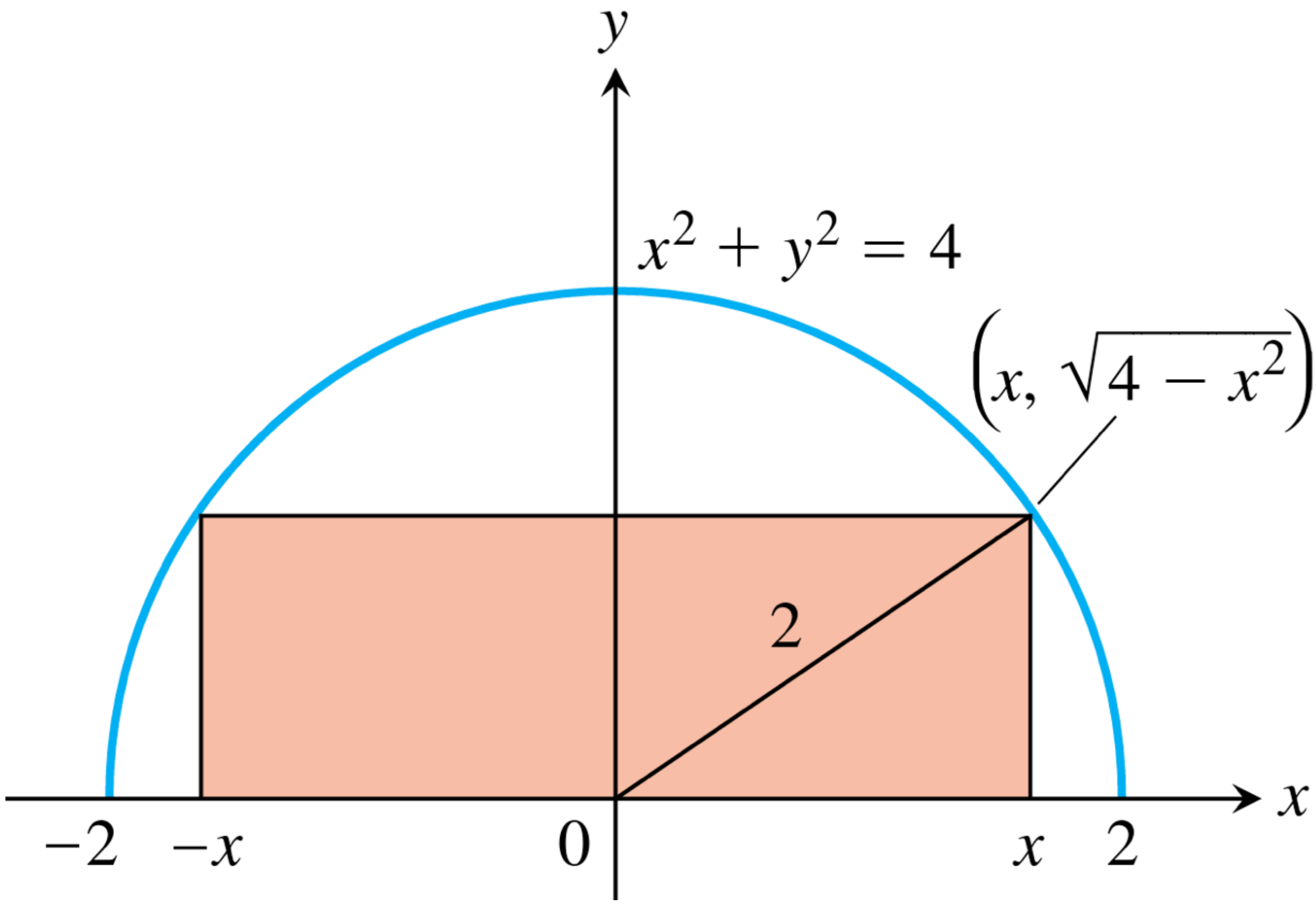
$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0$$

Άρα:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Βελτιστοποίηση: Άσκηση 3

Θέλουμε να εγγράψουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε ημικύκλιο ακτίνας 2. Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν του ορθογωνίου, και ποιες οι διαστάσεις του;



Άσκηση 3

Ο εμβαδό του ορθογωνίου είναι:

$$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

με πεδίο ορισμού: $[0, 2]$

Αναζητούμε ακρότατο:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2} = 0$$

$$-2x^2 + 2(4 - x^2) = 0$$

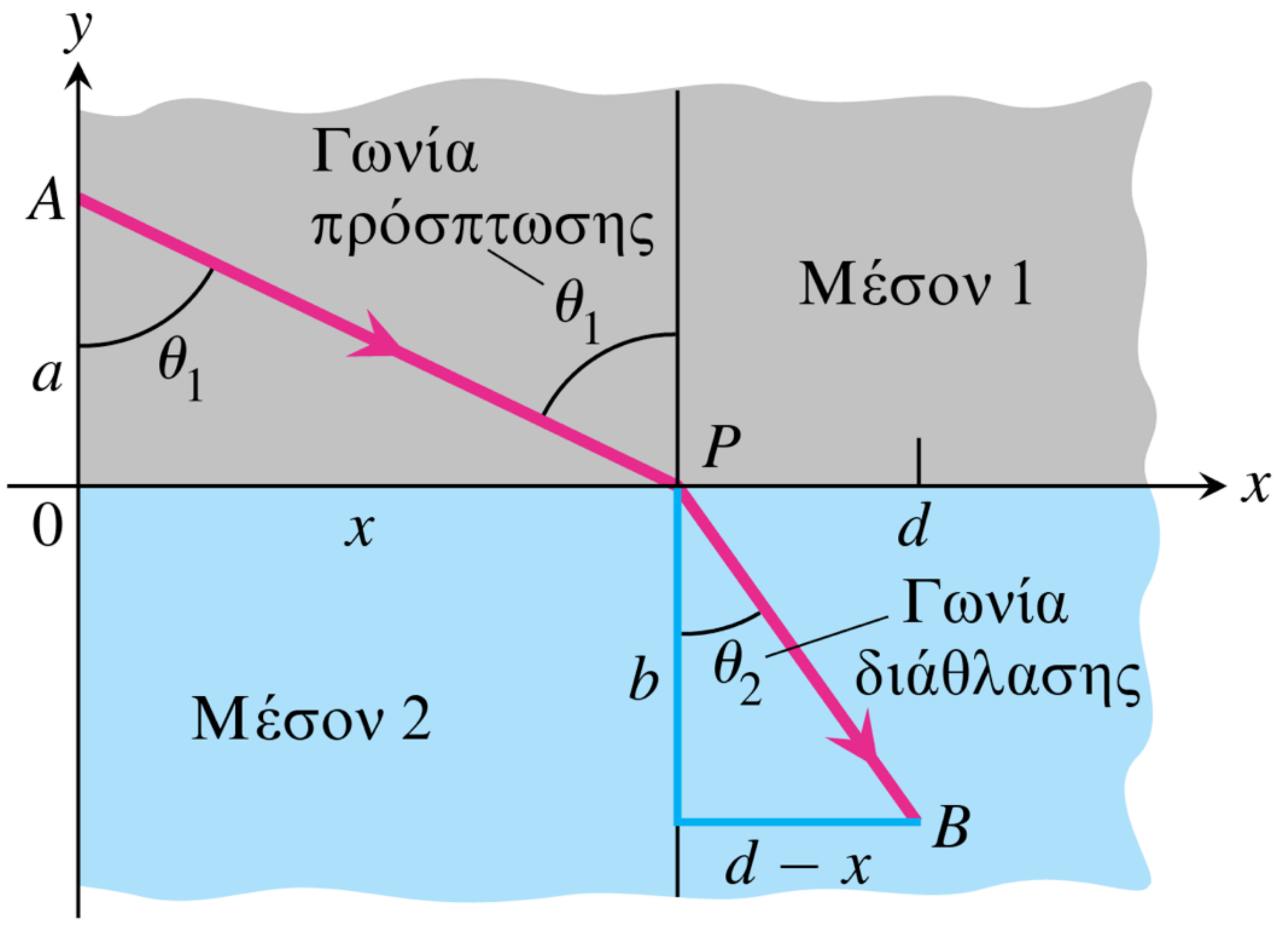
$$8 - 4x^2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

και τελικά: $x = \sqrt{2}$ και A=4.

Βελτιστοποίηση: Άσκηση 4

Να βρεθεί η πορεία που θα ακολουθήσει μια φωτεινή ακτίνα από σημείο A ενός μέσου με ταχύτητα διάδοσης c_1 σε σημείο B ενός άλλου μέσου ταχύτητας διάδοσης c_2. Η διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων είναι λεία.



Άσκηση 4

Ο χρόνος που απαιτείται για τη διαδρομή από το A στο P είναι λοιπόν

$$t_1 = \frac{AP}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}.$$

Ομοίως, από το P στο B απαιτείται χρόνος

$$t_2 = \frac{PB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}.$$

Ο χρόνος από το A στο B είναι το άθροισμα των παραπάνω:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}.$$

Άσκηση 4

Αναζητούμε ακρότατο:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} = 0$$

που αν εκφραστεί ως προς τις γωνίες γίνεται:

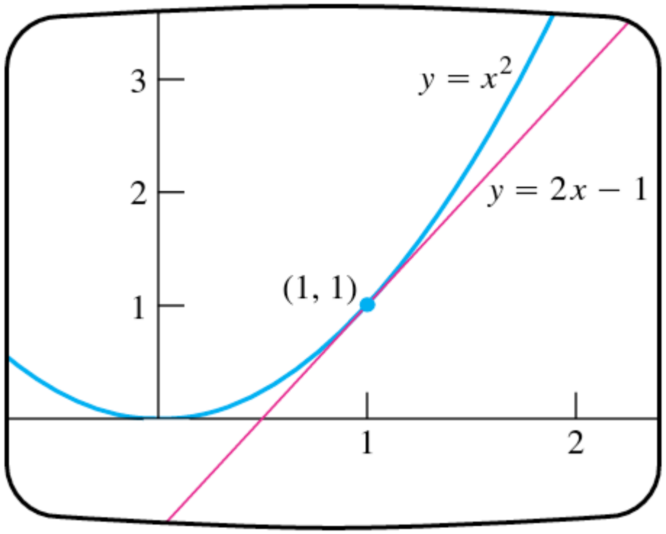
$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2} = 0$$

Αρα:

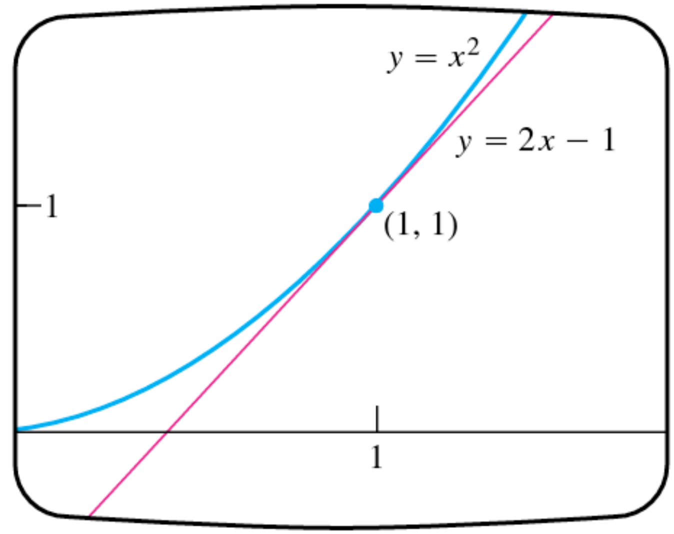
$$\boxed{\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}}$$

(νόμος διάθλασης του Snell)

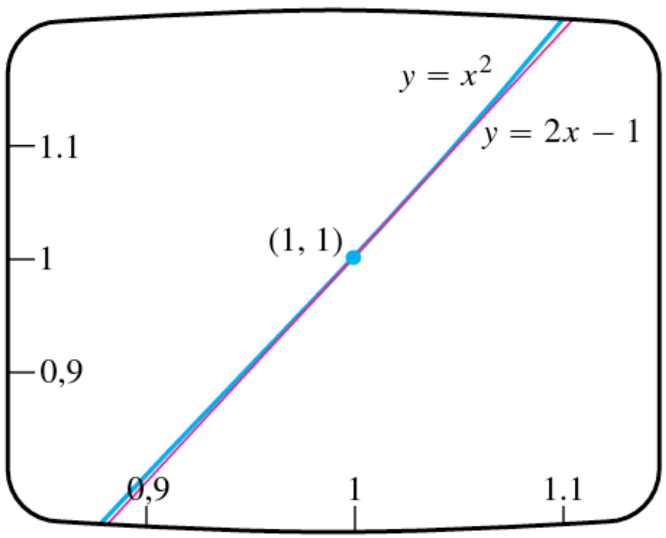
Γραμμικοποίηση



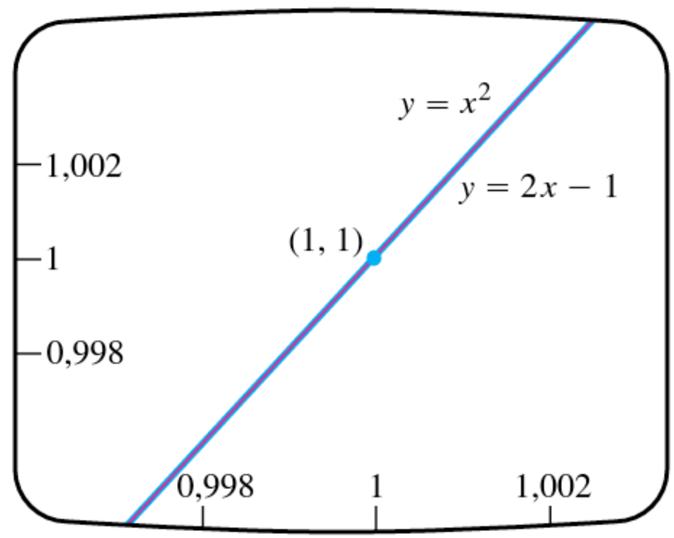
Φαίνεται η $y = x^2$ και η εφαπτομένη της $y = 2x - 1$ στο (1, 1).



Κοντά στο σημείο (1, 1) η εφαπτομένη πλησιάζει πάρα πολύ την καμπύλη.



Σε όλο το διάστημα που φαίνεται, η εφαπτομένη πλησιάζει πάρα πολύ την καμπύλη.



Σε ακόμα μικρότερη περιοχή σχεδίασης, η εφαπτομένη πλησιάζει τόσο πολύ την καμπύλη, ώστε δεν ξεχωρίζει η μια από την άλλη.

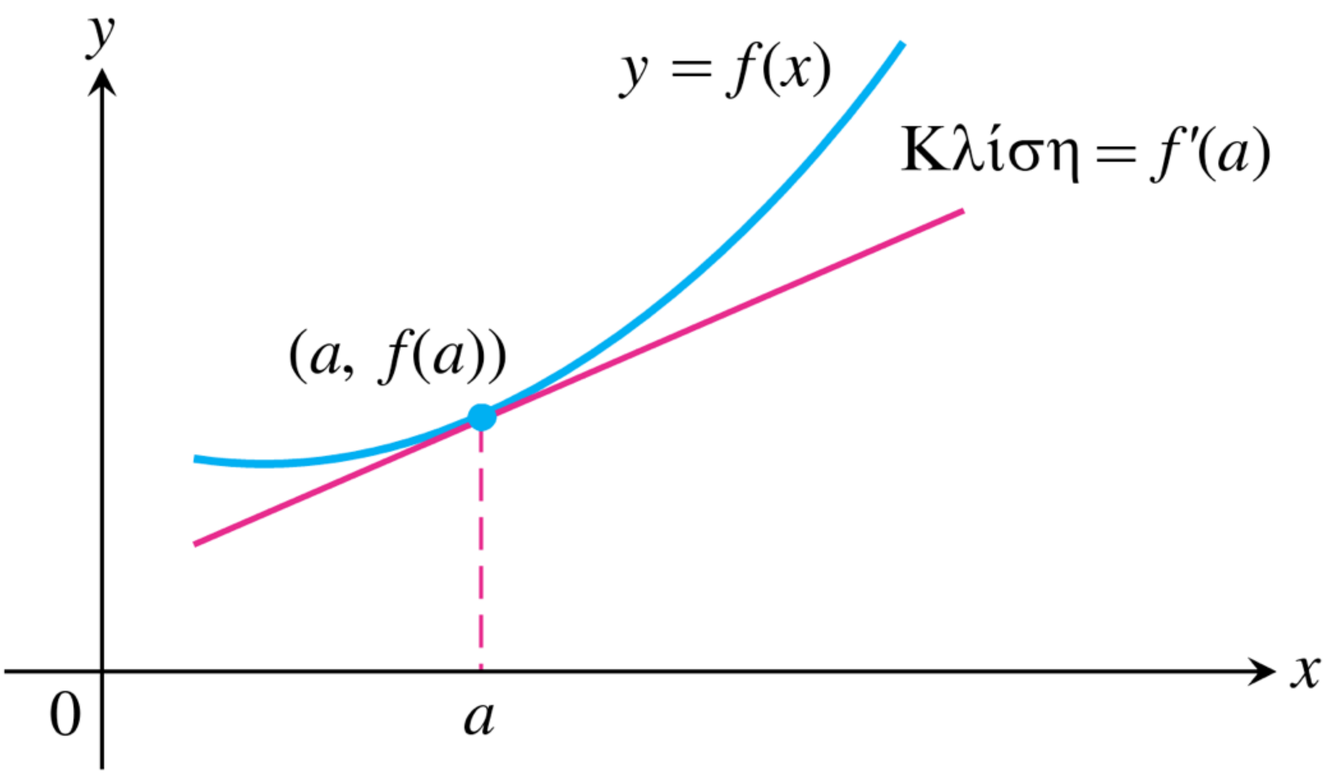
Γραμμικοποίηση

Ορισμός **Γραμμικοποίηση**

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $x = a$, τότε η προσεγγιστική συνάρτηση

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

είναι η **γραμμικοποίηση** της f στο a.



Παράδειγμα

Βρείτε τη γραμμικοποίηση της $f(x) = \sqrt{1 + x}$ στο $x = 0$ (Σχήμα 3.56).

Παράδειγμα

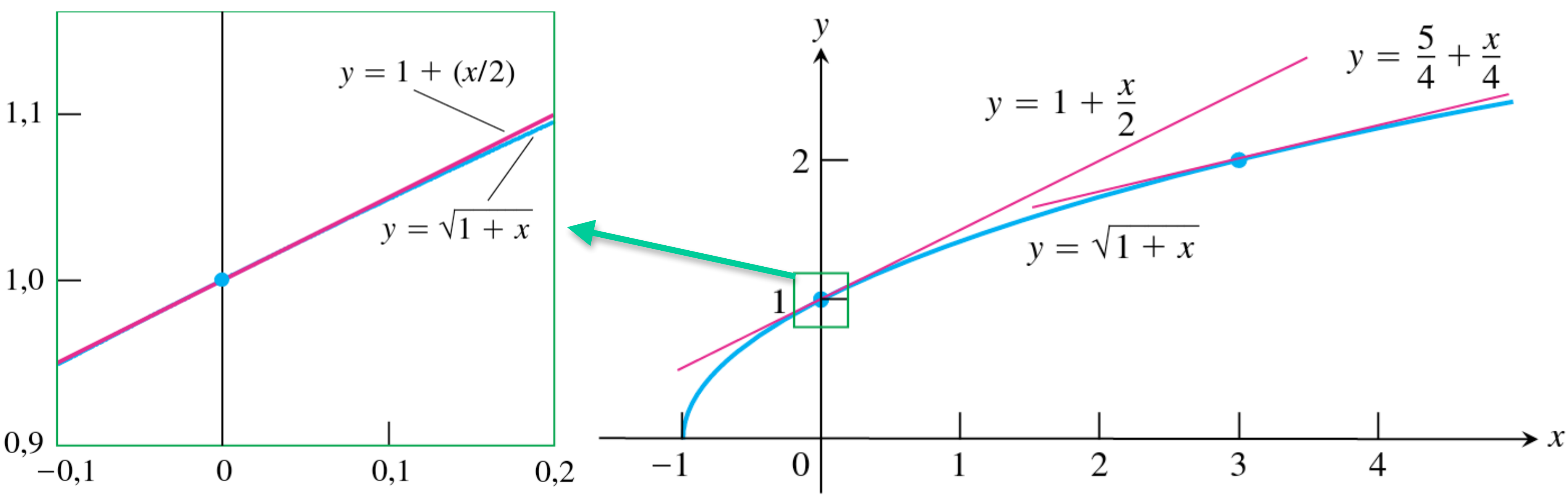
Βρείτε τη γραμμικοποίηση της $f(x) = \sqrt{1 + x}$ στο $x = 0$ (Σχήμα 3.56).

Λύση Εφόσον

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2},$$

θα έχουμε $f(0) = 1$, $f'(0) = 1/2$, και

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}.$$



Παράδειγμα

Ας δούμε πόσο ακριβής είναι η προσέγγιση $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ για τιμές του x κοντά στο 0.

Προσέγγιση	**|Πραγματική τιμή – προσέγγιση|**
$\sqrt{1{,}2} \approx 1 + \dfrac{0{,}2}{2} = 1{,}10$	$<10^{-2}$
$\sqrt{1{,}05} \approx 1 + \dfrac{0{,}05}{2} = 1{,}025$	$<10^{-3}$
$\sqrt{1{,}005} \approx 1 + \dfrac{0{,}005}{2} = 1{,}00250$	$<10^{-5}$

Παραδείγματα

Στο $x \approx 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &\approx x \\ \cos x &\approx 1 \\ \tan x &\approx x \\ (1+x)^k &\approx 1 + kx \end{aligned}}$$

Παράδειγμα

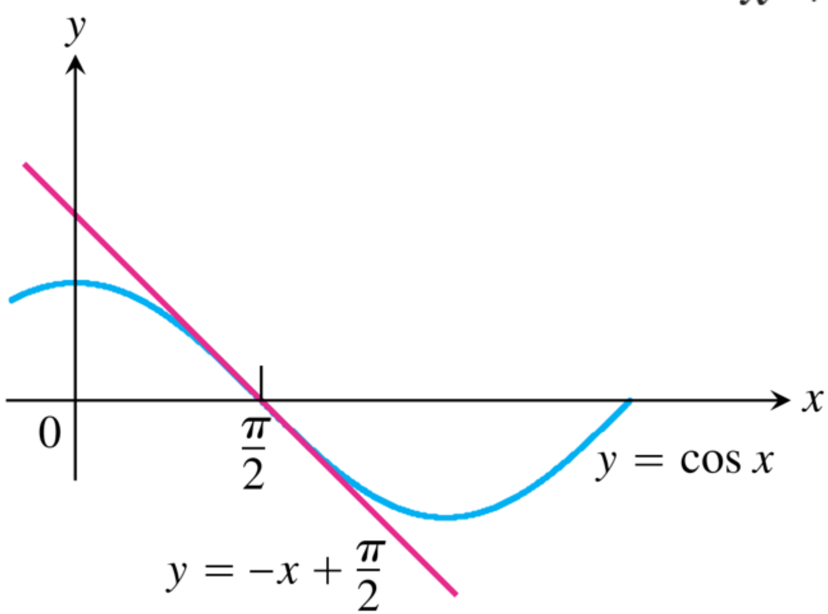
Να βρεθεί η γραμμικοποίηση της $f(x) = \cos x$ στο $x = \pi/2$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η γραμμικοποίηση της $f(x) = \cos x$ στο $x = \pi/2$

Λύση Εφόσον $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\sin x$, και $f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$, έχουμε

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



Διαφορικό

Ορισμός **Διαφορικά**

Έστω $y = f(x)$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Το **διαφορικό** $\boldsymbol{dx}$ είναι μια ανεξάρτητη μεταβλητή. Το **διαφορικό** $\boldsymbol{dy}$ ισούται με

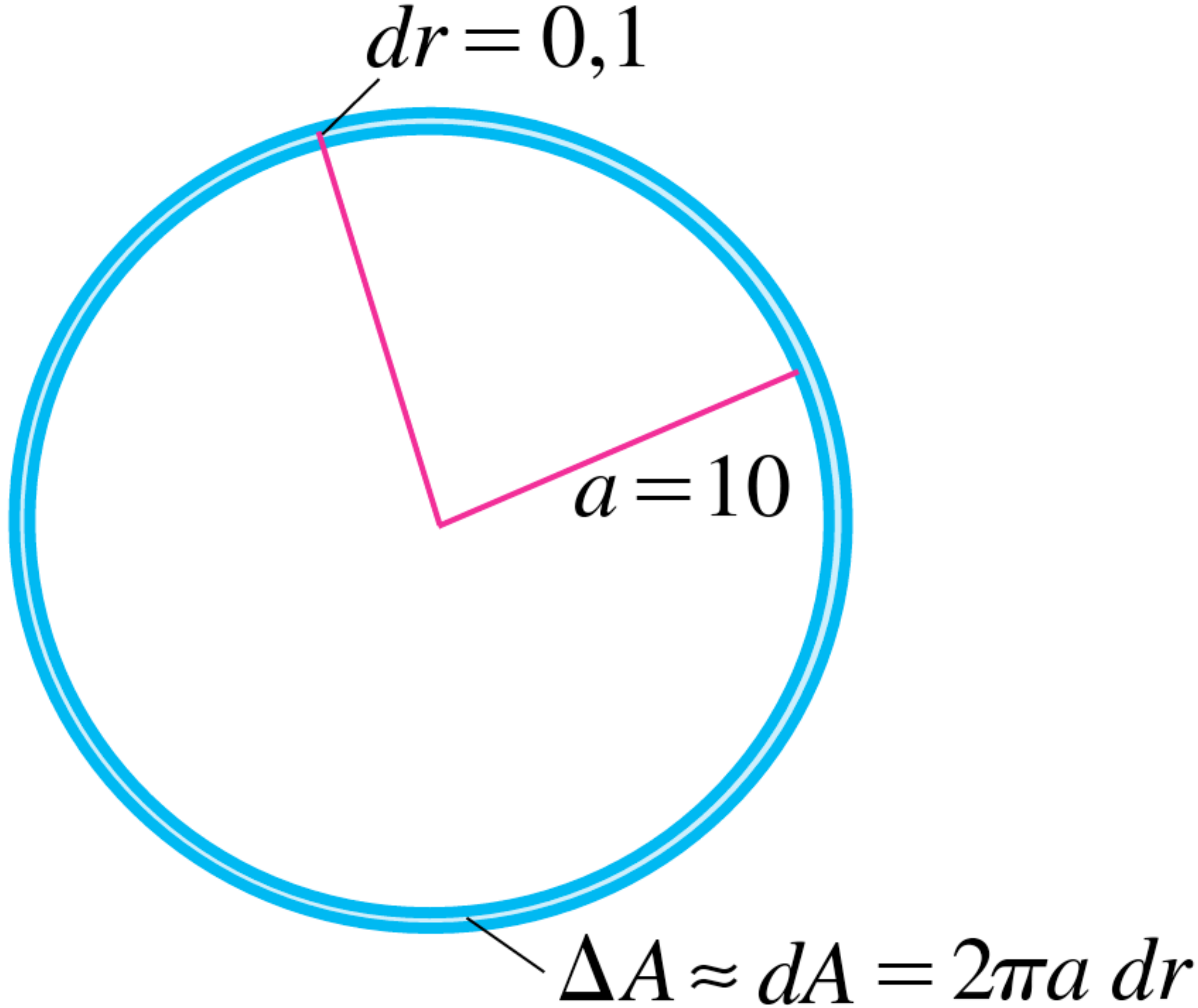
$$dy = f'(x)\, dx\,.$$

(α) $d(\tan 2x) = \sec^2(2x)\; d(2x) = 2\sec^2 2x\, dx$

(β) $d\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{(x+1)\,dx - x\,d(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x\,dx + dx - x\,dx}{(x+1)^2} = \dfrac{dx}{(x+1)^2}$

Παράδειγμα

Η ακτίνα r ενός κύκλου αυξάνει από $a = 10$ m σε $a = 10{,}1$ m (Σχήμα 3.60). Αν μια πρώτη εκτίμηση της αύξησης του εμβαδού A του κυκλικού δίσκου δίδεται από το διαφορικό dA, να συγκρίνετε την εκτίμηση αυτή με την πραγματική μεταβολή ΔA .



Παράδειγμα

Λύση Εφόσον $A = \pi r^2$, η εκτιμώμενη μεταβολή ισούται με

$$dA = A'(a)\,dr = 2\pi a\,dr = 2\pi(10)(0{,}1) = 2\pi\ \mathrm{m}^2 .$$

Η πραγματική μεταβολή είναι

$$\Delta A = \pi(10{,}1)^2 - \pi(10)^2 = (102{,}01 - 100)\pi = (\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0{,}01\pi}_{\text{σφάλμα}})\ \mathrm{m}^2.$$

Παράδειγμα

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = ma,$$

εμπεριέχει την υπόθεση ότι η μάζα είναι σταθερή, αλλά γνωρίζουμε ότι αυτό δεν είναι αυστηρά σωστό εφόσον η μάζα ενός σώματος αυξάνεται με την ταχύτητά του. Στον ορθότερο τύπο του Einstein, η μάζα έχει την τιμή

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

όπου η «μάζα ηρεμίας» m_0 παριστάνει τη μάζα ακίνητου σώματος και c είναι η ταχύτητα του φωτός που ισούται με 300.000 km/sec περίπου. Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \tag{4}$$

από το Παράδειγμα 4 για να εκτιμήσετε τη μεταβολή της μάζας Δm εξαιτίας της κίνησης με ταχύτητα v.

Παράδειγμα

Λύση

Όταν το v είναι πολύ μικρότερο του c, η ποσότητα v^2/c^2 είναι σχεδόν μηδενική και είναι ικανοποιητική η χρήση της προσέγγισης

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

[Εξίσωση (4) με $x = v/c$], οπότε

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

δηλαδή

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2\left(\frac{1}{c^2}\right). \tag{5}$$

Η Εξίσωση (5) εκφράζει την αύξηση της μάζας λόγω αύξησης της ταχύτητας v.

Εύρεση ριζών με τη μέθοδο του Νεύτωνα

Η γραμμικοποίηση μιας εξίσωσης $y = f(x)$ σε ένα σημείο x_n είναι:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

Άρα, μια προσεγγιστική λύση της εξίσωσης $y = 0$ είναι:

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

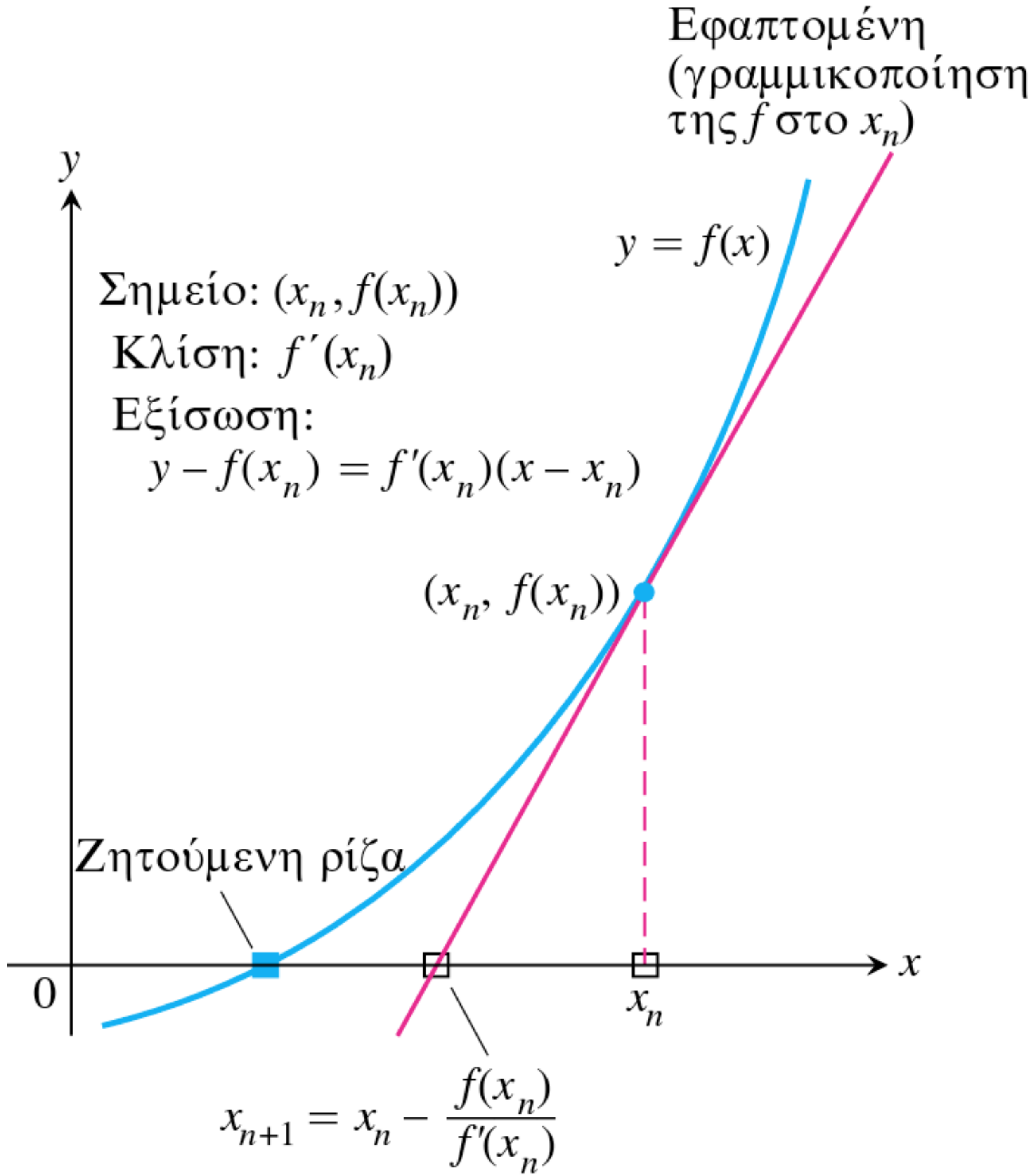
$$-f(x_n) = f'(x_n) \cdot x - f'(x_n) \cdot x_n$$

$$f'(x_n) \cdot x = f'(x_n) \cdot x_n - f(x_n)$$

$$\boxed{x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Αν $f'(x_n) \neq 0$

Εύρεση ριζών με τη μέθοδο του Νεύτωνα



Εύρεση ριζών με τη μέθοδο του Νεύτωνα

Διαδικασία της μεθόδου του Νεύτωνα

1. Επιλέγουμε (αυθαίρετα) μια πρώτη προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$. Η επιλογή μας αυτή γίνεται ορθολογικότερα αν έχουμε το γράφημα της $y = f(x)$.
2. Από την πρώτη προσέγγιση βρίσκουμε τη δεύτερη, από τη δεύτερη την τρίτη, κ.ο.κ., μέσω του τύπου

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Παράδειγμα

Βρείτε τη θετική ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Παράδειγμα

Λύση   Με $f(x) = x^2 - 2$ και $f'(x) = 2x$, η Εξίσωση (1) παίρνει τη μορφή

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n{}^2 - 2}{2x_n}.$$

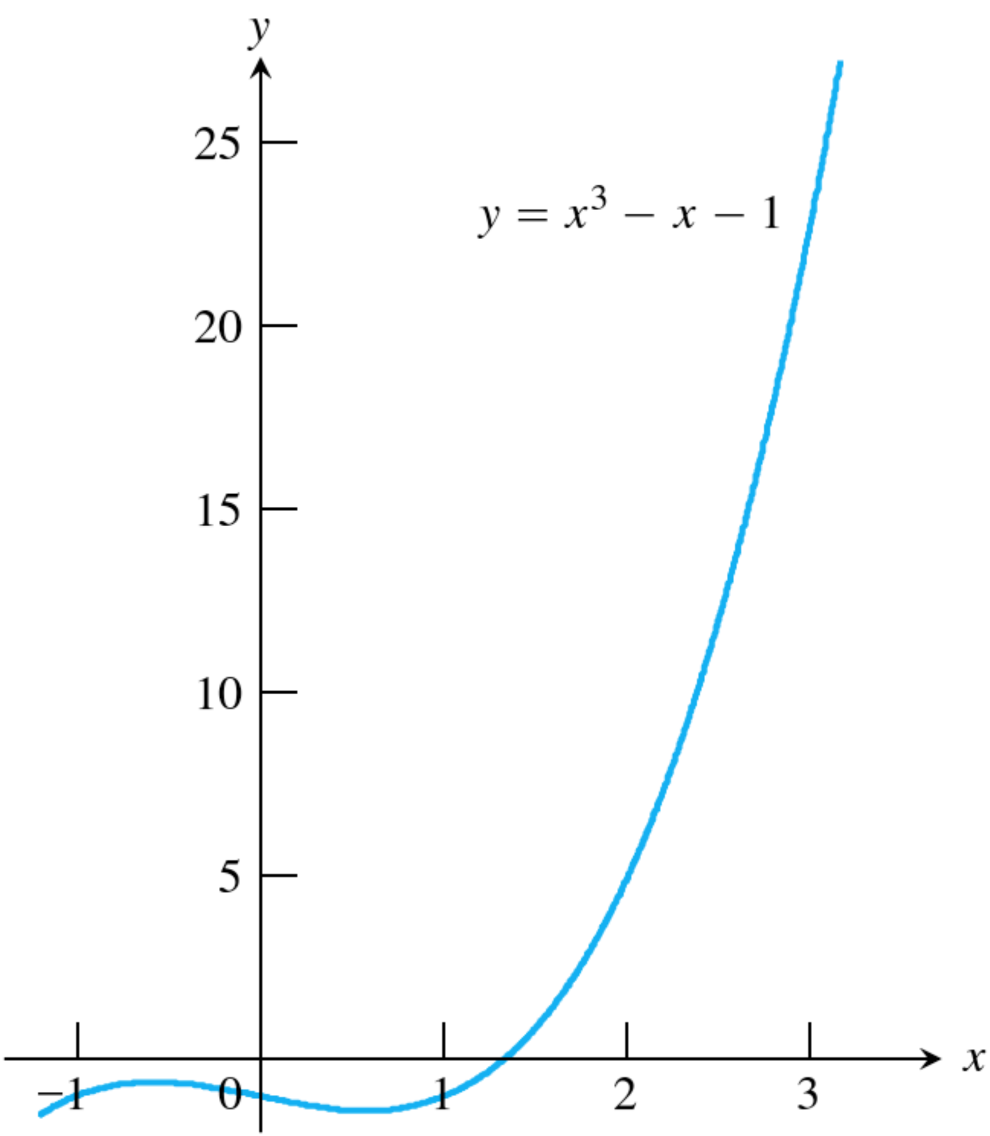
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

$$= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

	Σφάλμα	**Αριθμός ορθών ψηφίων**
$x_0 = 1$	$-0{,}41421$	1
$x_1 = 1{,}5$	$0{,}08579$	1
$x_2 = 1{,}41667$	$0{,}00246$	3
$x_3 = 1{,}41422$	$0{,}00001$	5

Παράδειγμα

Βρείτε τη συντεταγμένη x του σημείου τομής της καμπύλης $y = x^3 - x$ με την οριζόντια ευθεία $y = 1$.



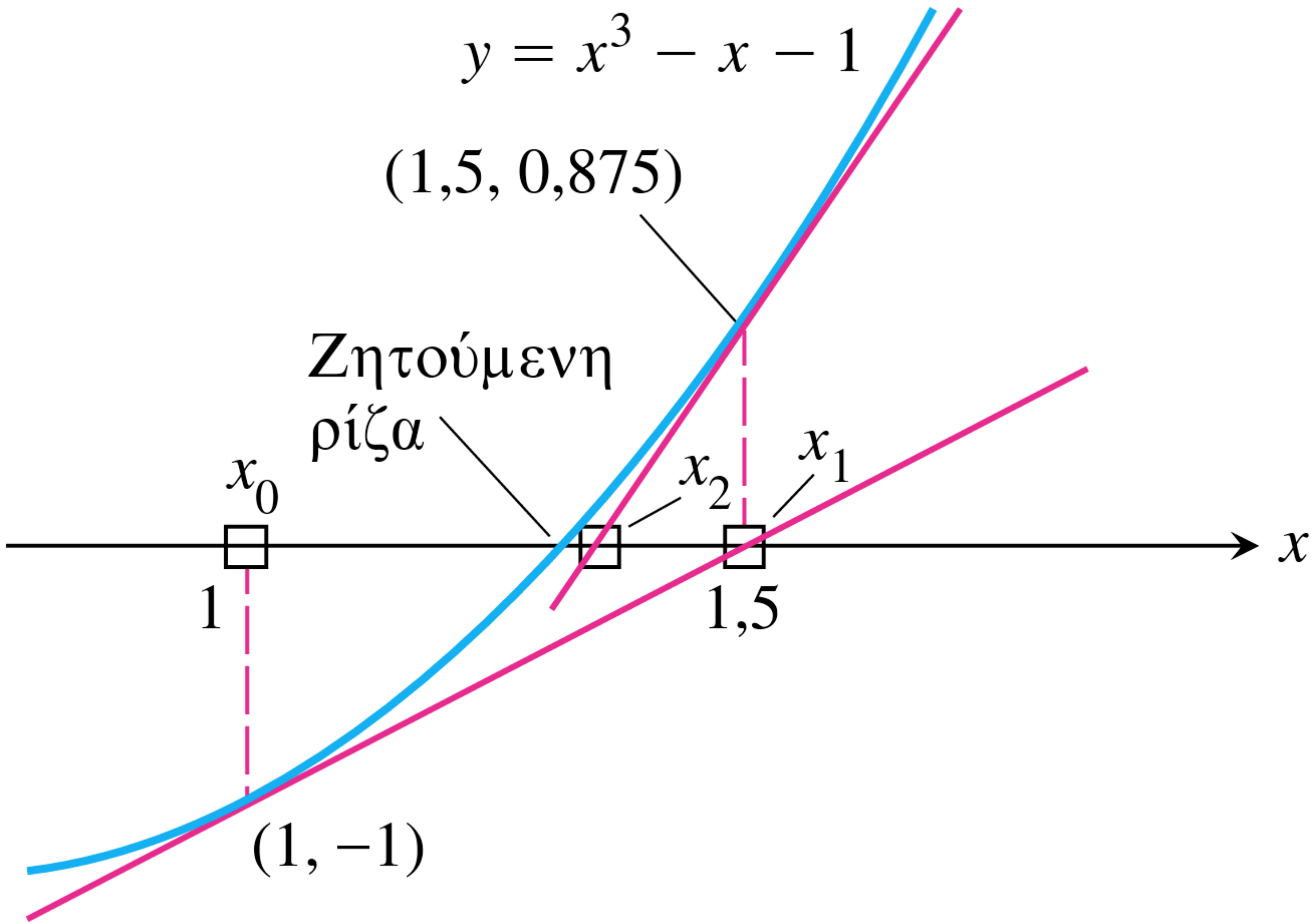
ΣΧΗΜΑ 3.63 Γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - x - 1$. (Παράδειγμα 2)

Παράδειγμα

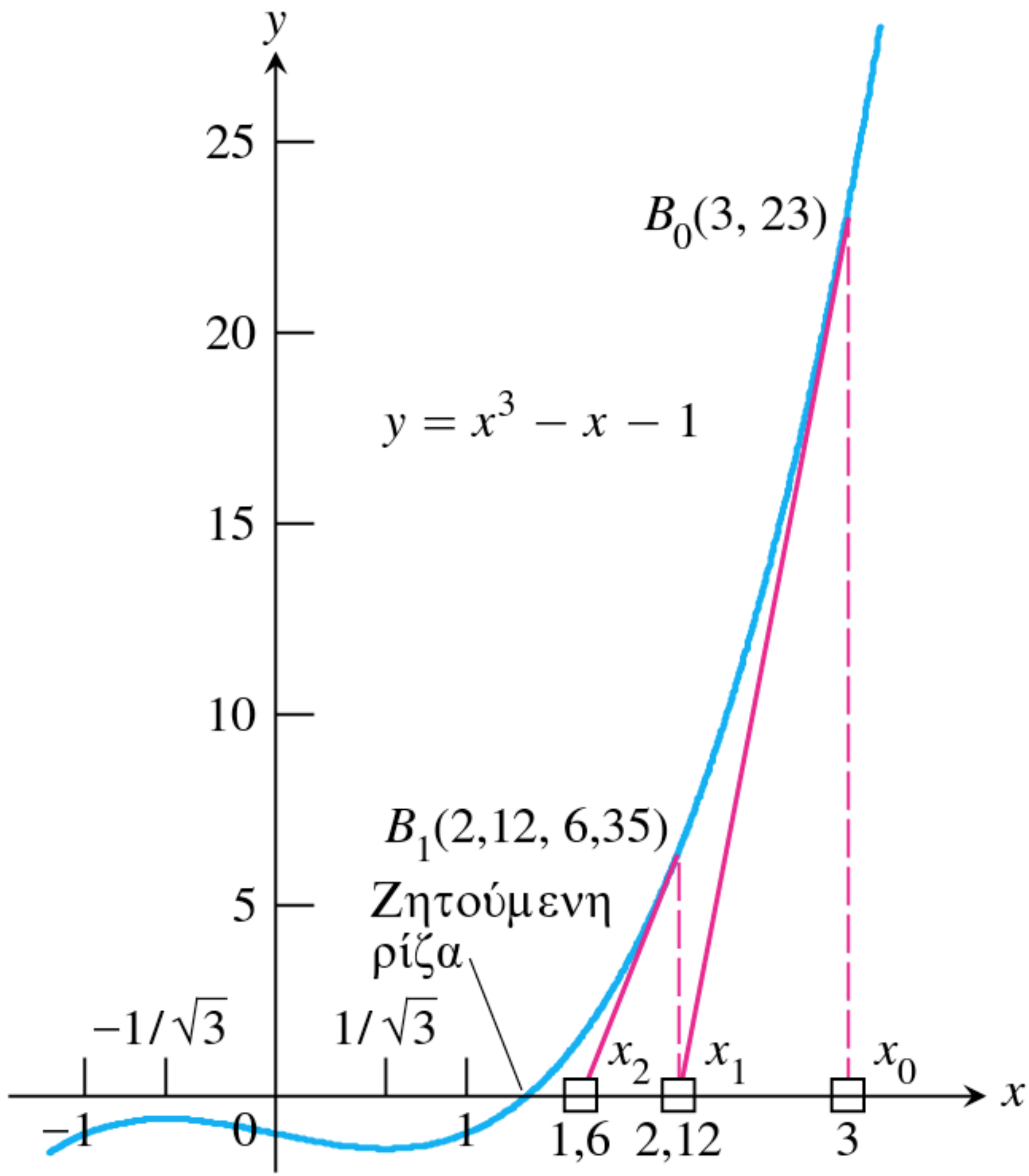
Πίνακας 3.1 Αποτελέσματα εφαρμογής της μεθόδου του Νεύτωνα στην $f(x) = x^3 - x - 1$ με $x_0 = 1$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	−1	2	1,5
1	1,5	0,875	5,75	1,3478 26087
2	1,3478 26087	0,1006 82173	4,4499 05482	1,3252 00399
3	1,3252 00399	0,0020 58362	4,2684 68292	1,3247 18174
4	1,3247 18174	0,0000 00924	4,2646 34722	1,3247 17957
5	1,3247 17957	−1,8672E-13	4,2646 32999	1,3247 17957

Παράδειγμα

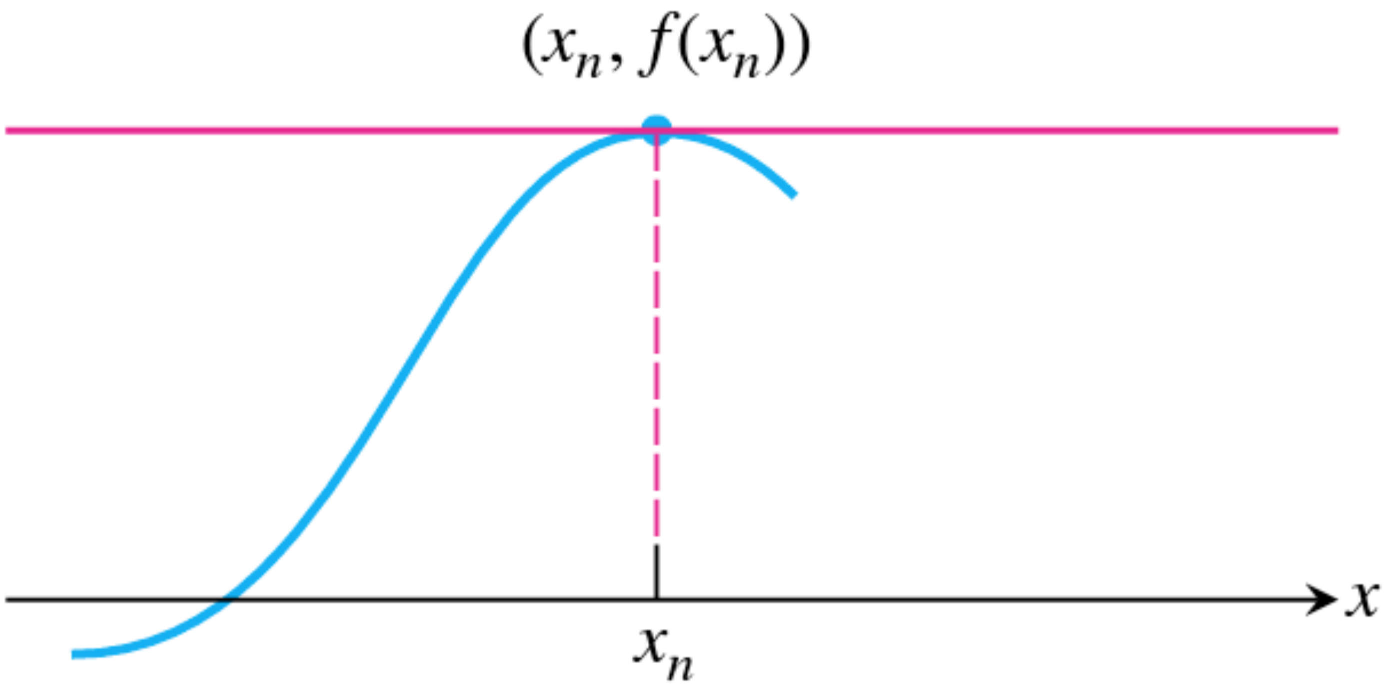


Παράδειγμα



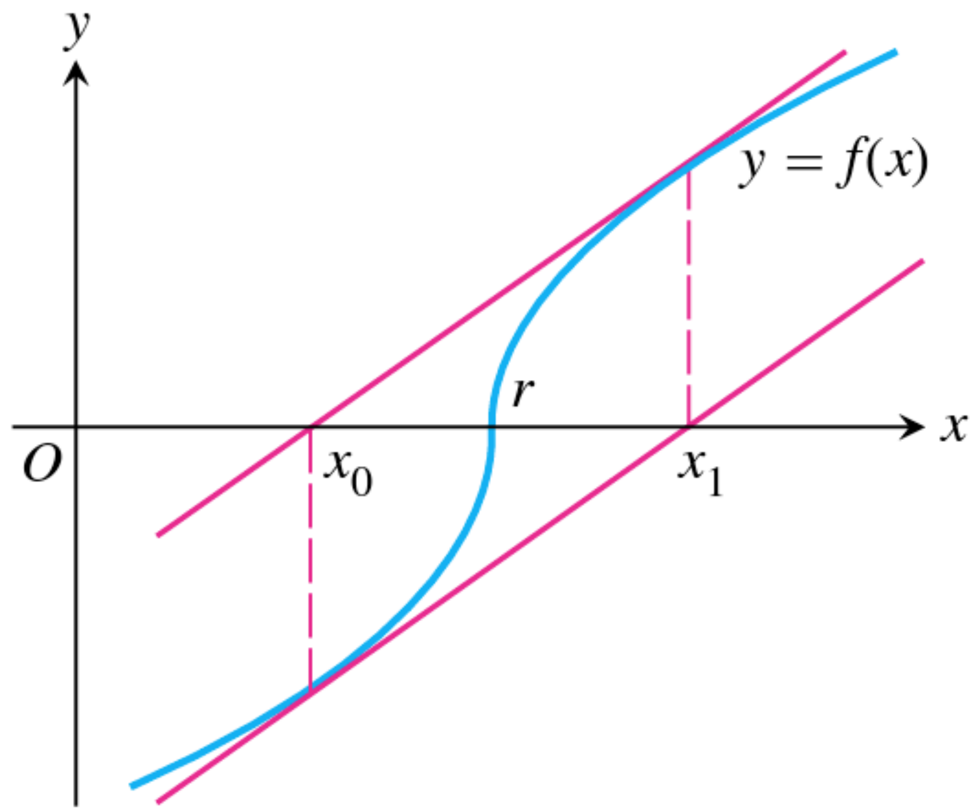
y
25
20
15
10
5
$y = x^3 - x - 1$
$B_0(3, 23)$
$B_1(2{,}12,\ 6{,}35)$
Ζητούμενη
ρίζα
$-1/\sqrt{3}$
$1/\sqrt{3}$
x_2
x_1
x_0
x
−1
0
1
1,6
2,12
3

Πότε δε συγκλίνει η μέθοδος του Νεύτωνα;



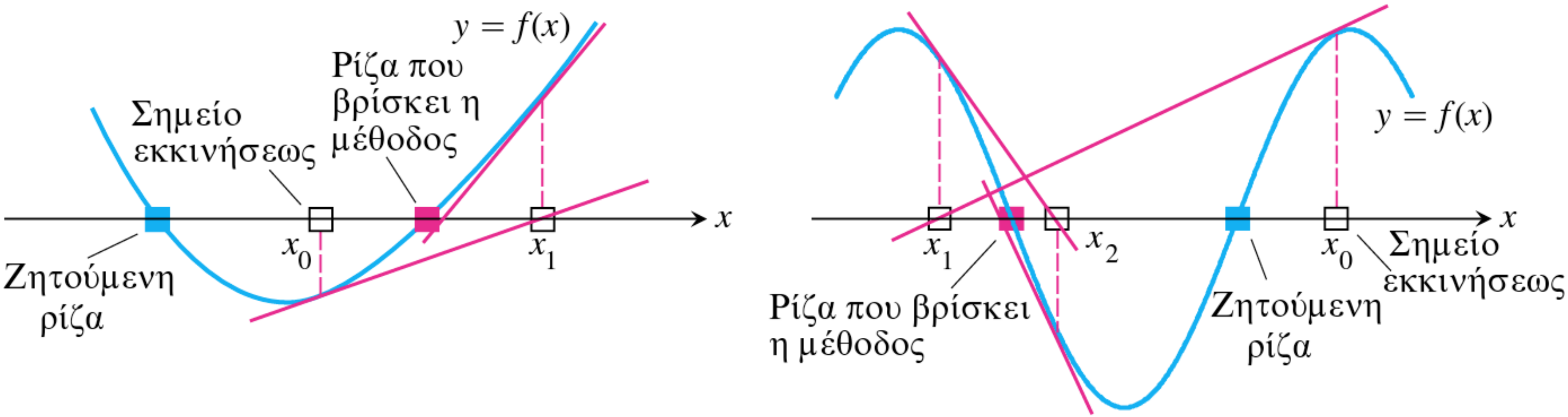
ΣΧΗΜΑ 3.67 Αν $f'(x_n) = 0$, τότε η εφαπτομένη δεν τέμνει τον άξονα x και δεν ορίζεται το x_{n+1}.

Πότε δε συγκλίνει η μέθοδος του Νεύτωνα;



ΣΧΗΜΑ 3.68 Εδώ η μεθοδος του Νεύτωνα δεν συγκλίνει. Απλώς ταλαντεύεται από το x_0 στο x_1 και πάλι πίσω στο x_0, χωρίς να πλησιάζει καθόλου στο r.

Προσοχή στην τιμή εκκίνησης



ΣΧΗΜΑ 3.69 Αν ξεκινήσετε πολύ μακριά από την περιοχή που σας ενδιαφέρει, η μέθοδος του Νεύτωνα ενδέχεται να μη βρει τη ρίζα που ζητάτε, αλλά μια άλλη ρίζα.