

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

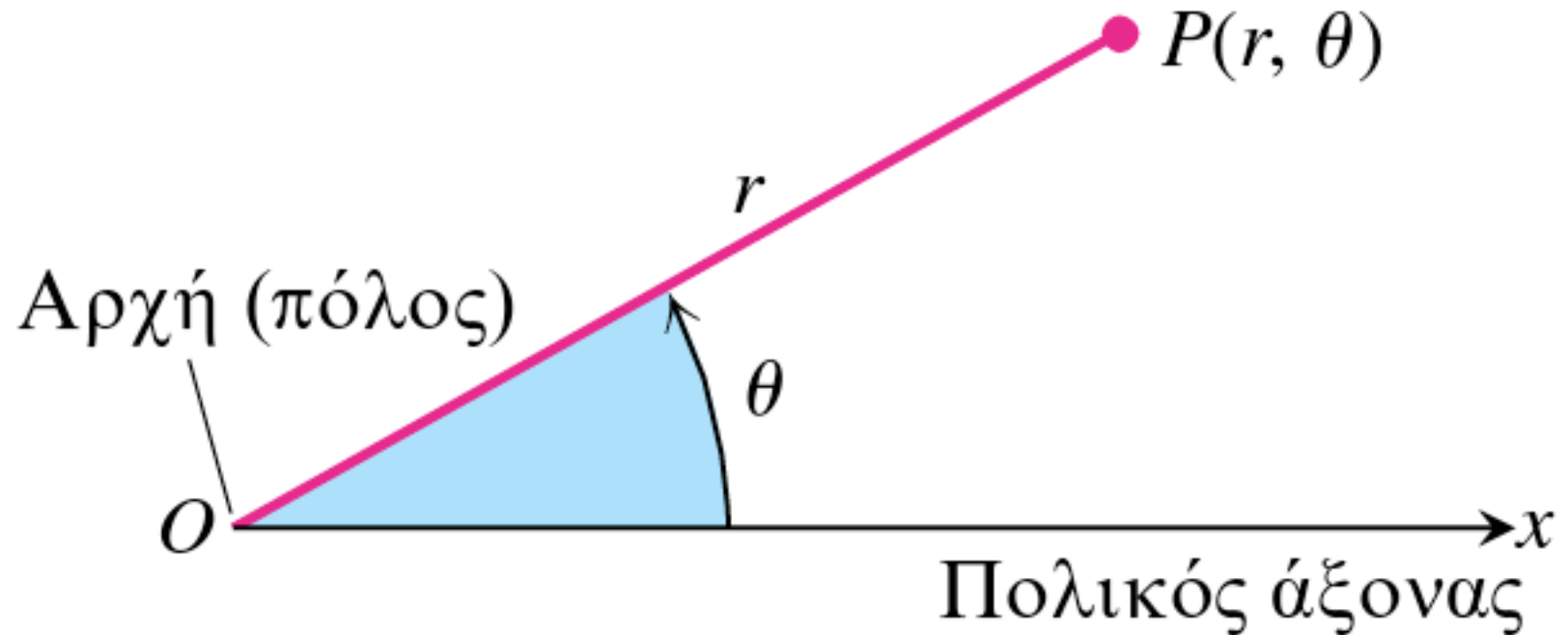
ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 8ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ



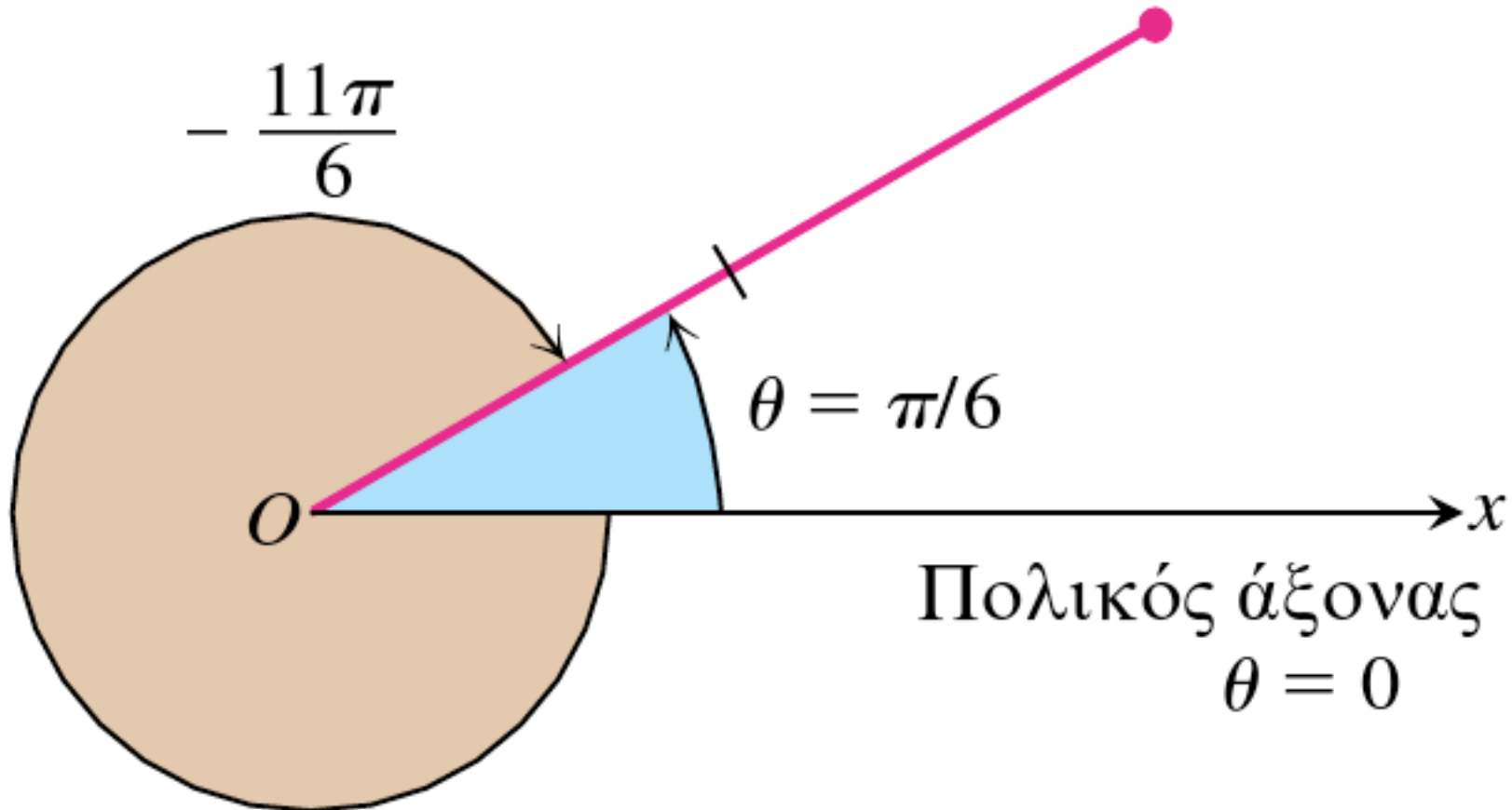
Πολικές Συντεταγμένες



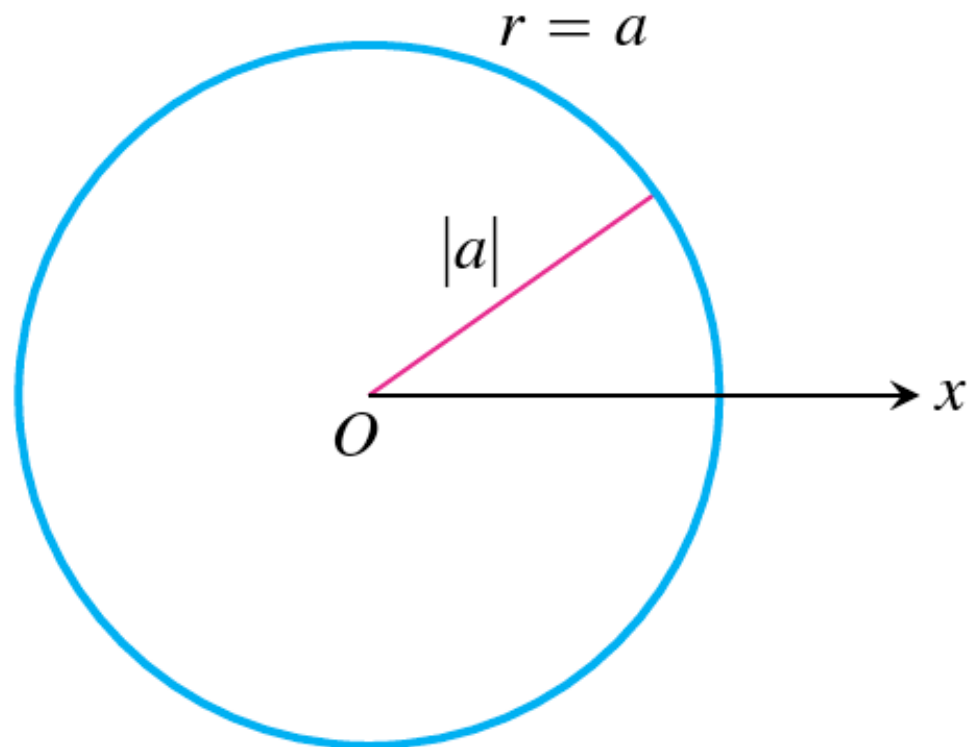
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Σε αντίθεση με το βιβλίο του Thomas, στο εξής θα θεωρούμε πως η συντεταγμένη r θα λαμβάνει μόνο θετικές τιμές (αυτή είναι η συνηθισμένη σύμβαση στα πλαίσια εφαρμογών των πολικών συντεταγμένων στην φυσική).

Δεν είναι μοναδικές

$$P\left(2, \frac{\pi}{6}\right) = P\left(2, -\frac{11\pi}{6}\right)$$



Πολικά Διαγράμματα



Εξίσωση

$$r = a$$

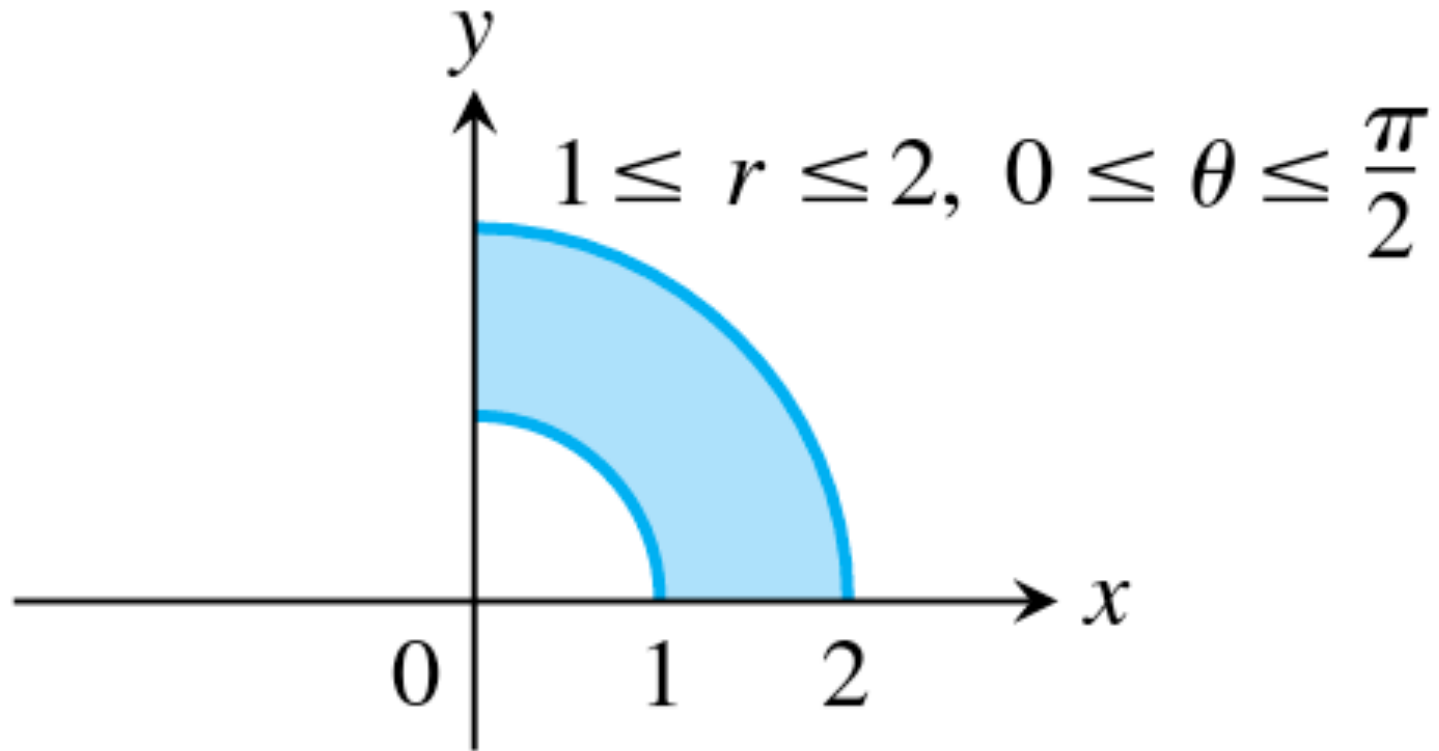
$$\theta = \alpha$$

Πολικό διάγραμμα

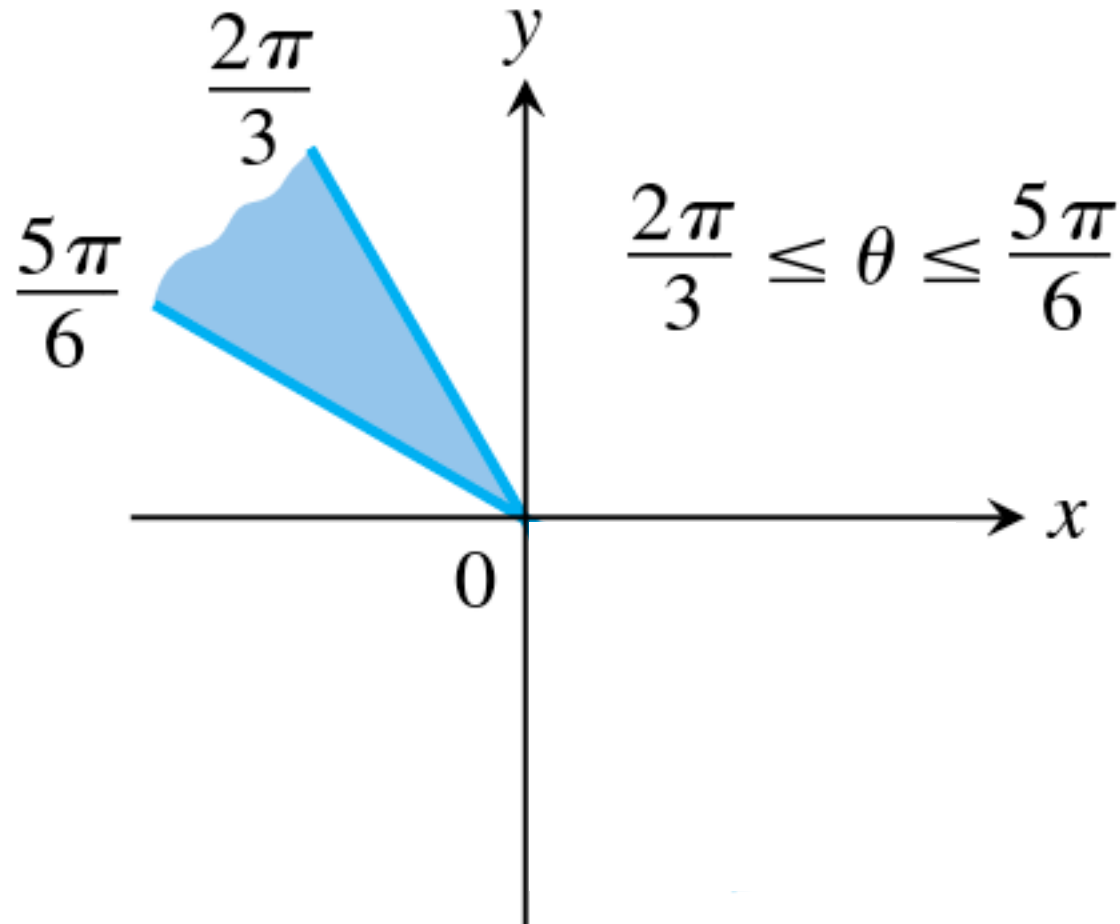
Κύκλος ακτίνας $|a|$ με κέντρο το O

Ευθεία που διέρχεται από το O και σχηματίζει γωνία α με τον πολικό άξονα

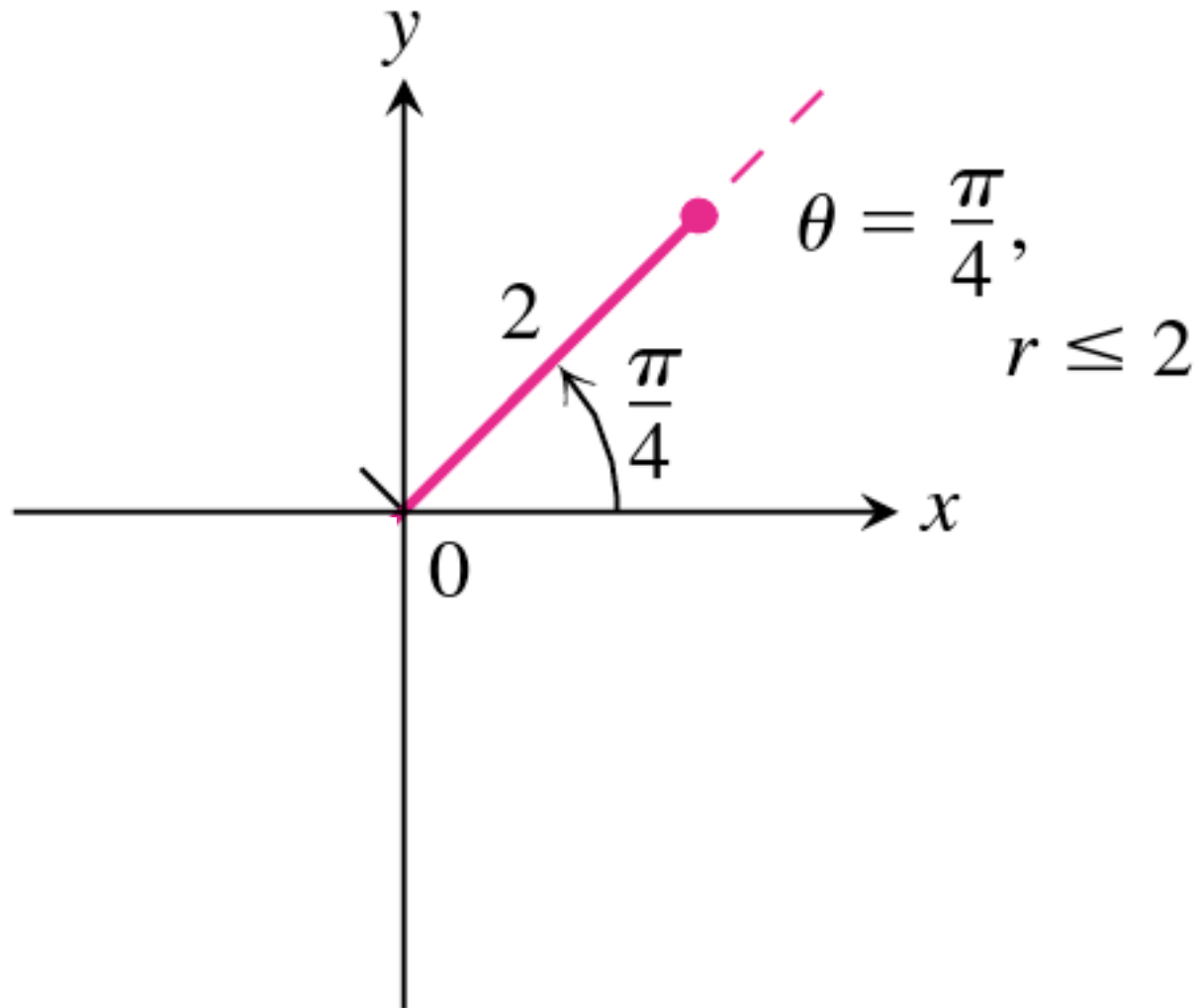
Πολικά Διαγράμματα



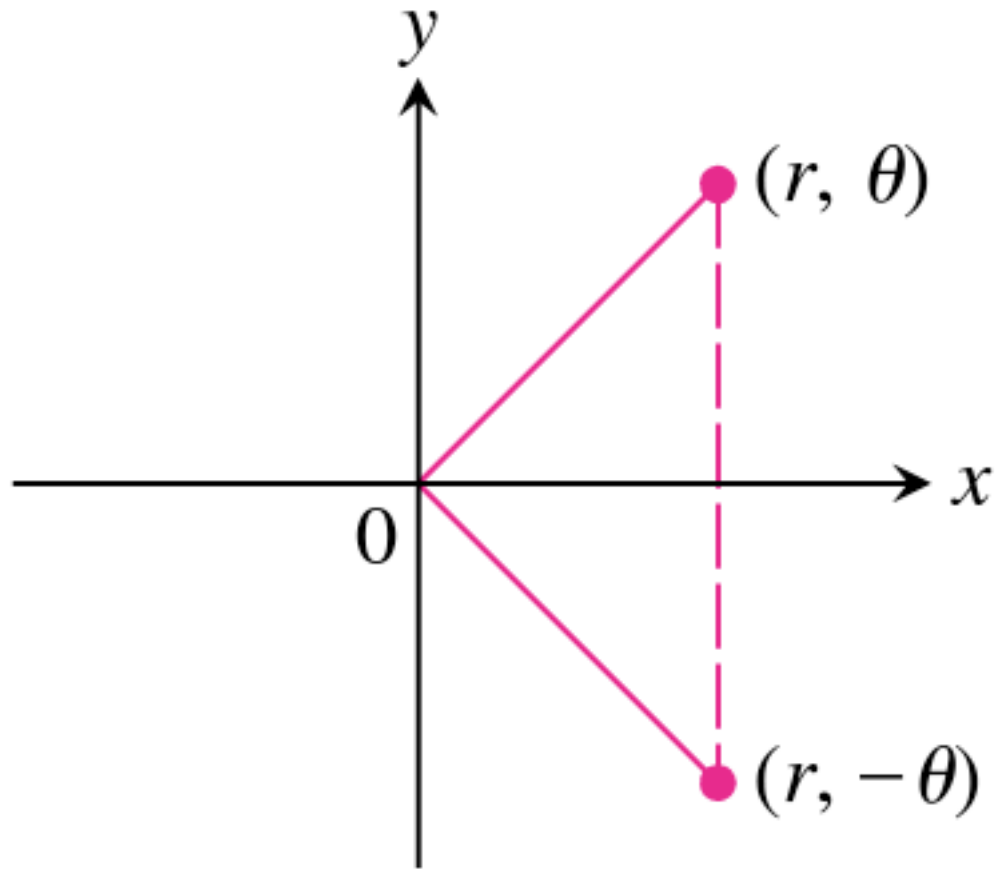
Πολικά Διαγράμματα



Πολικά Διαγράμματα

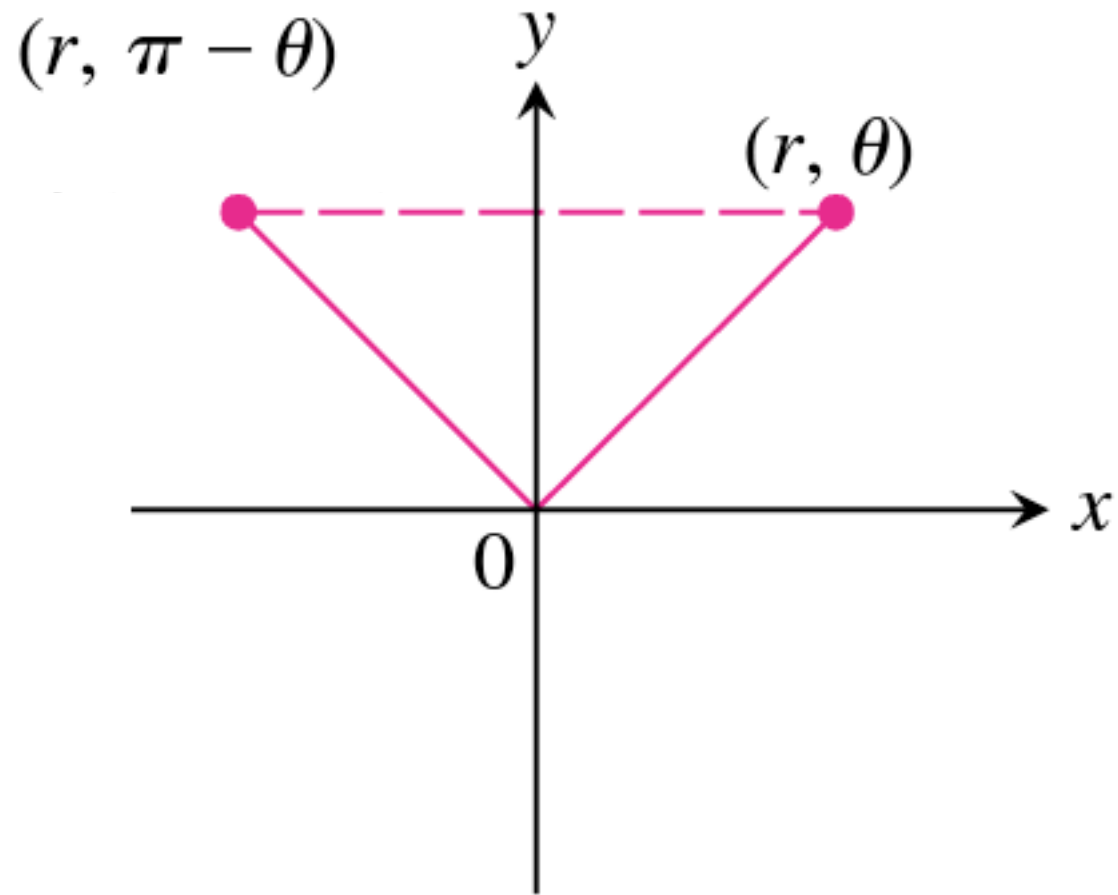


Συμμετρίες



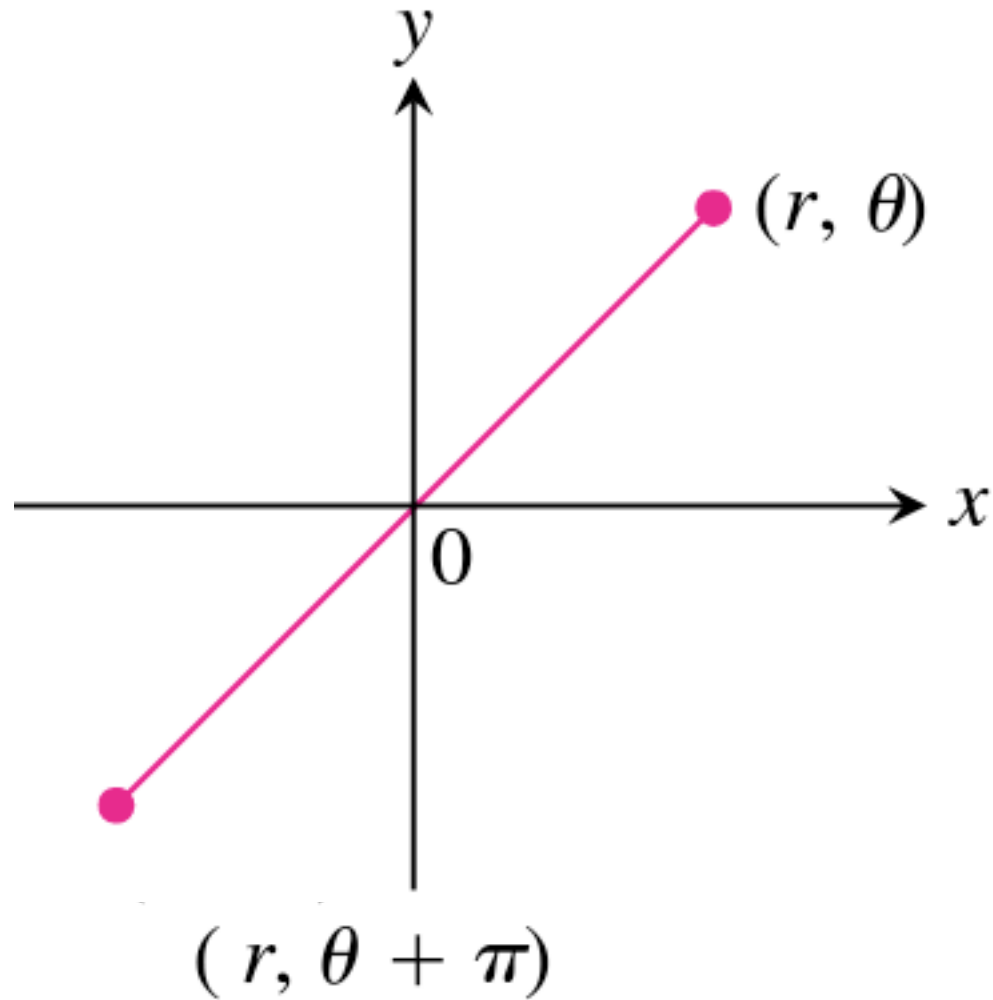
Ως προς τον άξονα x

Συμμετρίες



Ως προς τον άξονα y

Συμμετρίες



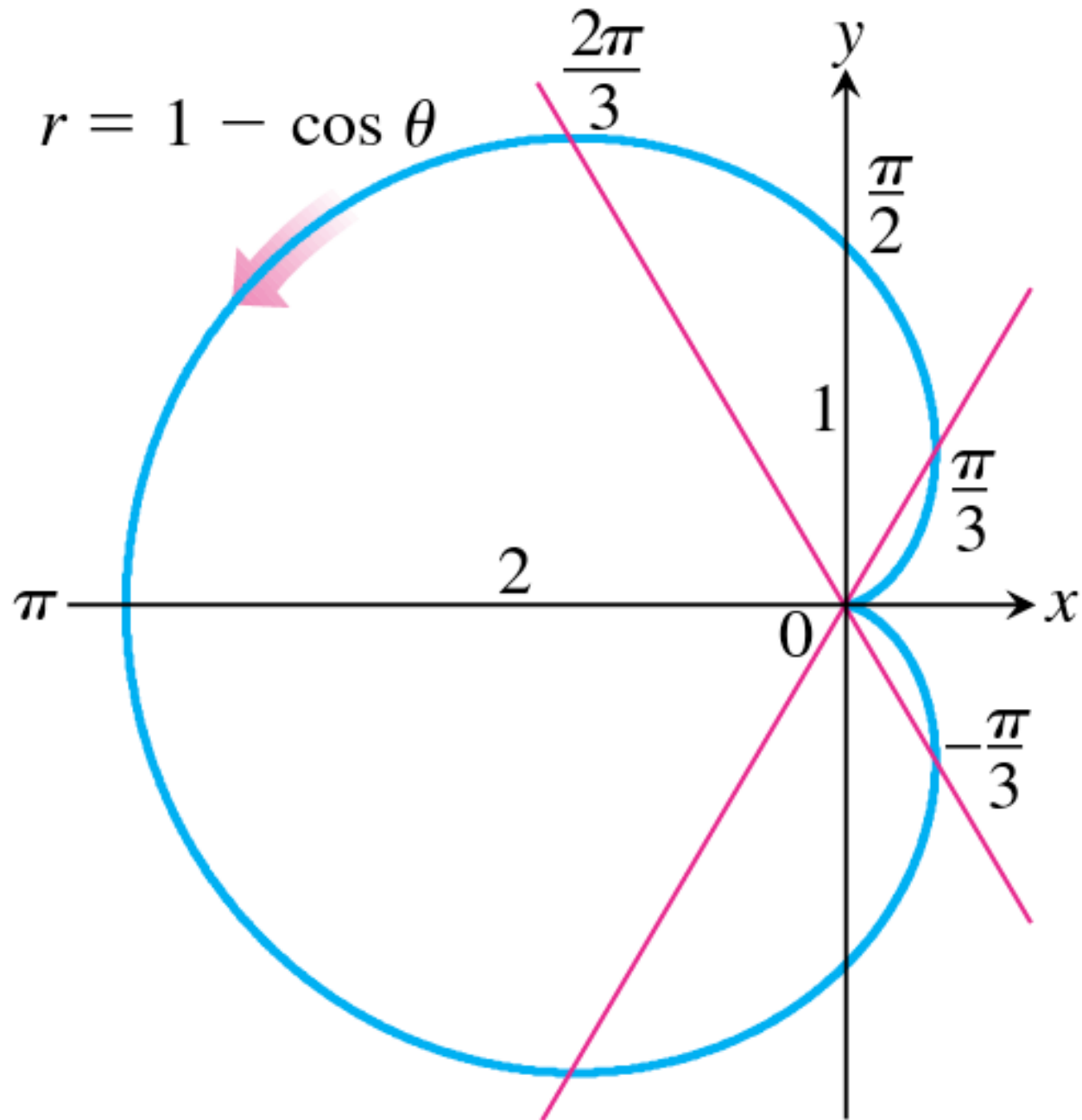
Ως προς την αρχή

Παράδειγμα: Καρδιοειδής Καμπύλη

Σχεδιάστε την καμπύλη $r = 1 - \cos \theta$.

θ	$r = 1 - \cos \theta$
0	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
π	2

Παράδειγμα: Καρδιοειδής Καμπύλη

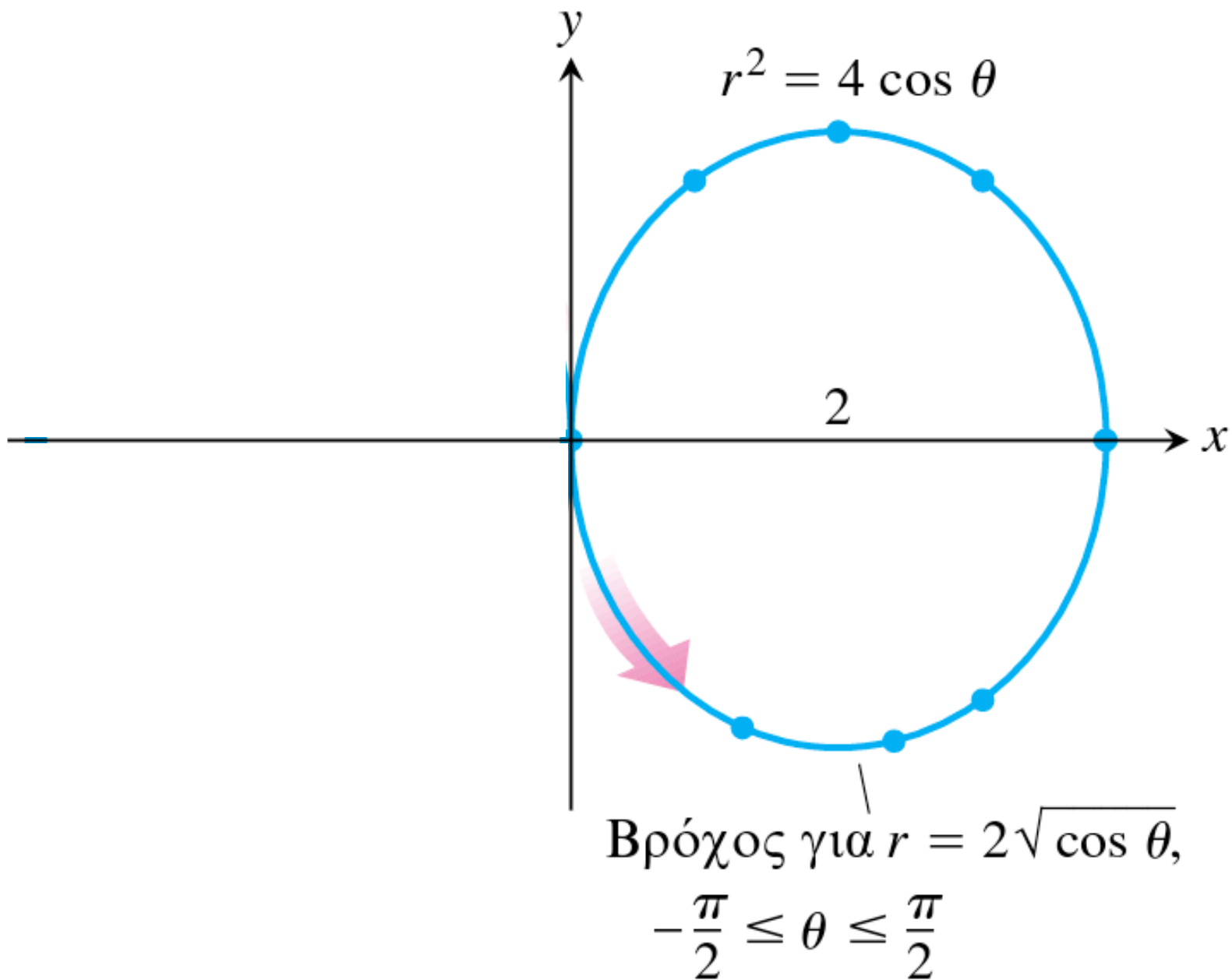


Παράδειγμα

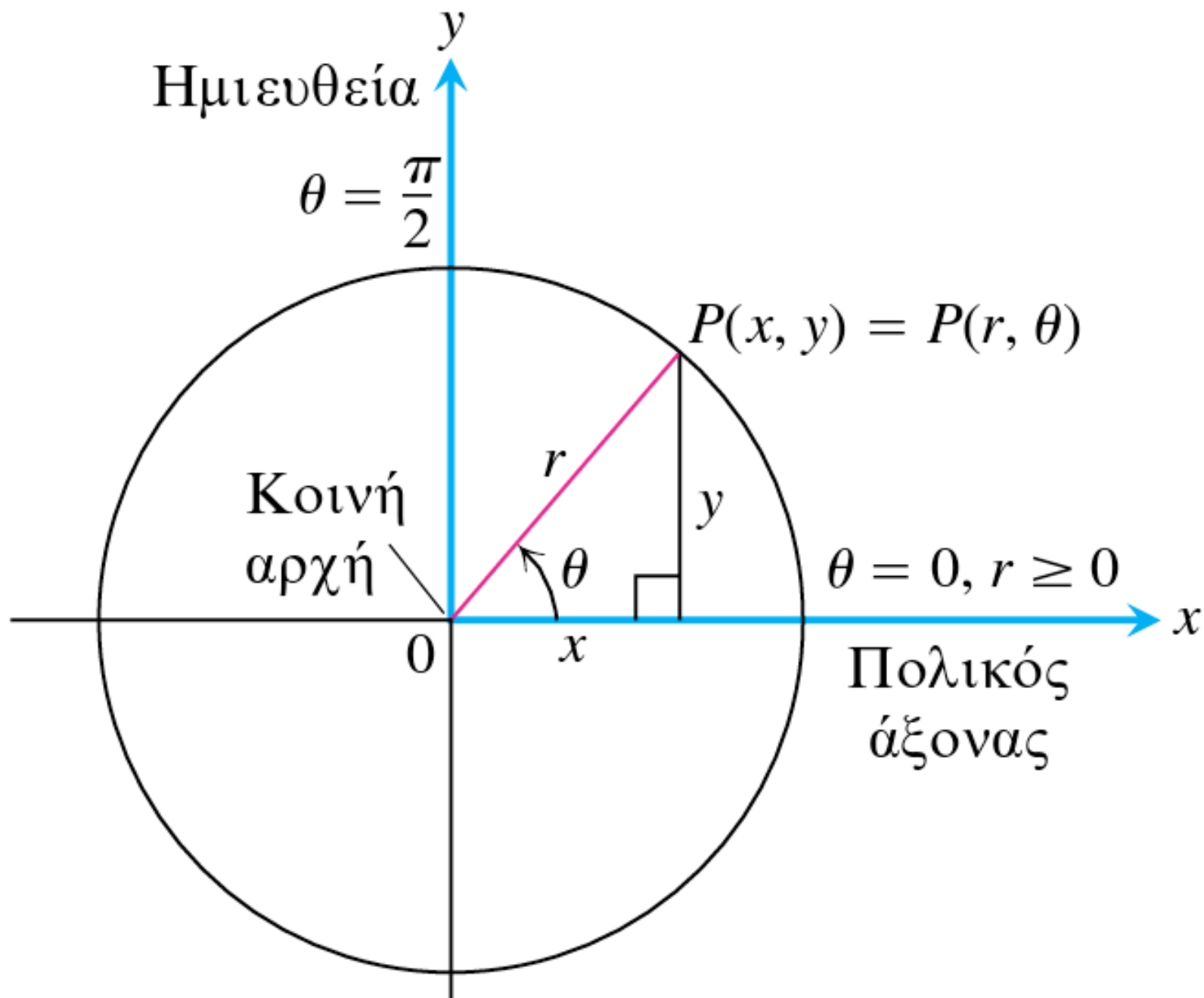
Σχεδιάστε την καμπύλη $r^2 = 4 \cos \theta$.

θ	$\cos \theta$	$r = \pm 2\sqrt{\cos \theta}$
0	1	± 2
$\pm \frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm 1,9$
$\pm \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm 1,7$
$\pm \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\pm 1,4$
$\pm \frac{\pi}{2}$	0	0

Παράδειγμα



Σχέση Πολικών - Καρτεσιανών Συντεταγμένων



Σχέση Πολικών - Καρτεσιανών Συντεταγμένων

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{y}{x} = \tan \theta$$

Παραδείγματα

Πολική εξίσωση

Καρτεσιανό ισοδύναμο

$$r \cos \theta = 2$$

$$x = 2$$

$$r^2 \cos \theta \sin \theta = 4$$

$$xy = 4$$

$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$r = 1 + 2r \cos \theta$$

$$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$r = 1 - \cos \theta$$

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$$

Παραδείγματα

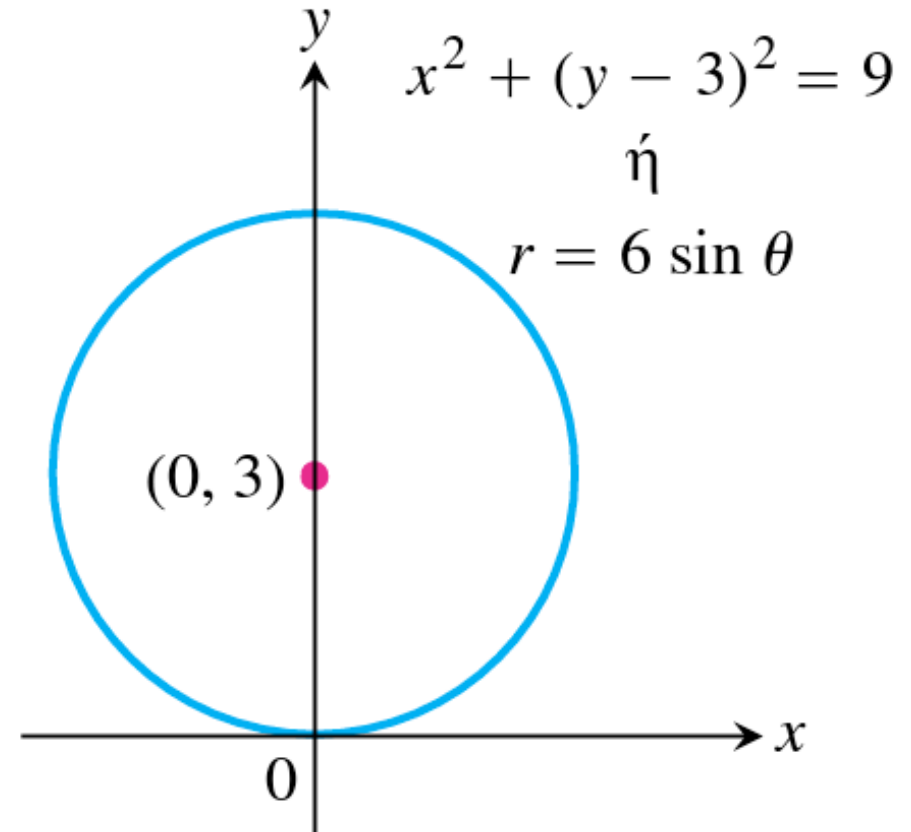
Βρείτε μια πολική εξίσωση του κύκλου $x^2 + (y - 3)^2 = 9$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6y = 0$$

$$r^2 - 6r \sin \theta = 0$$

$$\boxed{r = 0} \quad \text{ή} \quad \boxed{r - 6 \sin \theta = 0}$$



Παράδειγμα

Βρείτε το καρτεσιανό ισοδύναμο της ακόλουθης πολικής εξίσωσης.
Προσδιορίστε το σχήμα της καμπύλης.

$$(a) r^2 = 4r \cos \theta$$

$$r^2 = 4r \cos \theta$$

$$x^2 + y^2 = 4x \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad r \cos \theta = x$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

Συμπληρώνουμε το
τετράγωνο

Το γράφημα της ισοδύναμης καρτεσιανής εξίσωσης $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ είναι κύκλος ακτίνας 2 και κέντρου (2, 0).

Παράδειγμα

Βρείτε το καρτεσιανό ισοδύναμο της ακόλουθης πολικής εξίσωσης.
Προσδιορίστε το σχήμα της καμπύλης.

$$(\beta) \quad r = \frac{4}{2 \cos \theta - \sin \theta}$$

$$r = \frac{4}{2 \cos \theta - \sin \theta}$$

$$r (2 \cos \theta - \sin \theta) = 4$$

$$2r \cos \theta - r \sin \theta = 4$$

$$2x - y = 4$$

$$r \cos \theta = x, r \sin \theta = y$$

$$y = 2x - 4$$

Το γράφημα της ισοδύναμης καρτεσιανής εξίσωσης $y = 2x - 4$ είναι ευθεία κλίσεως 2 και τεταγμένης -4 .