ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Μέρος 9ο

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ανάπτυγμα Taylor

Αν μια συνάρτηση f(x) έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε ένα διάστημα I, μπορεί να εκφραστεί ως ***δυναμοσειρά*** *στο ίδιο διάστημα;*

Στο τελευταίο ερώτημα δίνεται εύκολα απάντηση αν υποθέσουμε ότι η $f(x)$ παριστάνεται από τη σειρά

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \\ &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots \\ f''(x) &= 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-a) + 3 \cdot 4a_4(x-a)^2 + \cdots \\ f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5(x-a)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

Ανάπτυγμα Taylor

οπότε η n-οστή παράγωγος, για κάθε n, είναι

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \text{άθροισμα όρων με παράγοντα } (x-a).$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν και για $x = a$, οπότε

$$\begin{aligned} f'(a) &= a_1, \\ f''(a) &= 1 \cdot 2a_2, \\ f'''(a) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3, \end{aligned}$$

και, εν γένει,

$$f^{(n)}(a) = n!a_n.$$

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}}$$

Ανάπτυγμα Taylor

Αν η f μπορεί να παρασταθεί από κάποια σειρά, η σειρά αυτή οφείλει να είναι η εξής:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots. \quad (1)$$

Ανάπτυγμα Taylor

Ορισμοί **Σειρά Taylor, σειρά Maclaurin**

Έστω f συνάρτηση με παραγώγους όλων των τάξεων σε κάθε σημείο ενός διαστήματος και a κάποιο εσωτερικό σημείο του διαστήματος αυτού. Η **σειρά Taylor που παράγεται από την f στο $x = a$** είναι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots +$$

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots .$$

Παράδειγμα

Ορισμός **Πολυώνυμο Taylor τάξης *n***

Έστω f συνάρτηση με παραγώγους k τάξης για $k = 1, 2, \ldots, N$ σε κάποιο διάστημα που περιέχει το a ως εσωτερικό σημείο. Για κάθε ακέραιο n από 0 έως N, το **πολυώνυμο Taylor τάξης *n*** που παράγεται από την f στο $x = a$ είναι το εξής:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^n(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ανάπτυγμα Taylor

Η **σειρά Maclaurin που παράγεται από την** $\boldsymbol{f}$ είναι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots,$$

δηλαδή ισούται με τη σειρά Taylor που παράγεται από την f στο $x = 0$.

Παράδειγμα

Παράδειγμα 1 Εύρεση σειράς Taylor

Να βρεθεί η σειρά Taylor την οποία παράγει η $f(x) = 1/x$ στο $a = 2$.

Λύση Πρέπει να βρούμε τις $f(2), f'(2), f''(2), \ldots$. Παραγωγίζουμε, οπότε παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{-1}, & f(2) &= 2^{-1} = \frac{1}{2}, \\
f'(x) &= -x^{-2}, & f'(2) &= -\frac{1}{2^2}, \\
f''(x) &= 2!x^{-3}, & \frac{f''(2)}{2!} &= 2^{-3} = \frac{1}{2^3}, \\
f'''(x) &= -3!\,x^{-4}, & \frac{f'''(2)}{3!} &= -\frac{1}{2^4}, \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n n!\,x^{-(n+1)}, & \frac{f^{(n)}(2)}{n!} &= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

Η σειρά Taylor, λοιπόν, είναι

$$f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-2)^n + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \cdots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \cdots .$$

Παράδειγμα

Παράδειγμα 2 Εύρεση πολυωνύμων Taylor για το e^x

Να βρεθεί η σειρά Taylor και τα πολυώνυμα Taylor τα οποία παράγει η $f(x) = e^x$ στο $x = 0$.

Λύση Εφόσον

$$f(x) = e^x, \qquad f'(x) = e^x, \qquad \ldots, \qquad f^{(n)}(x) = e^x, \ldots,$$

θα έχουμε

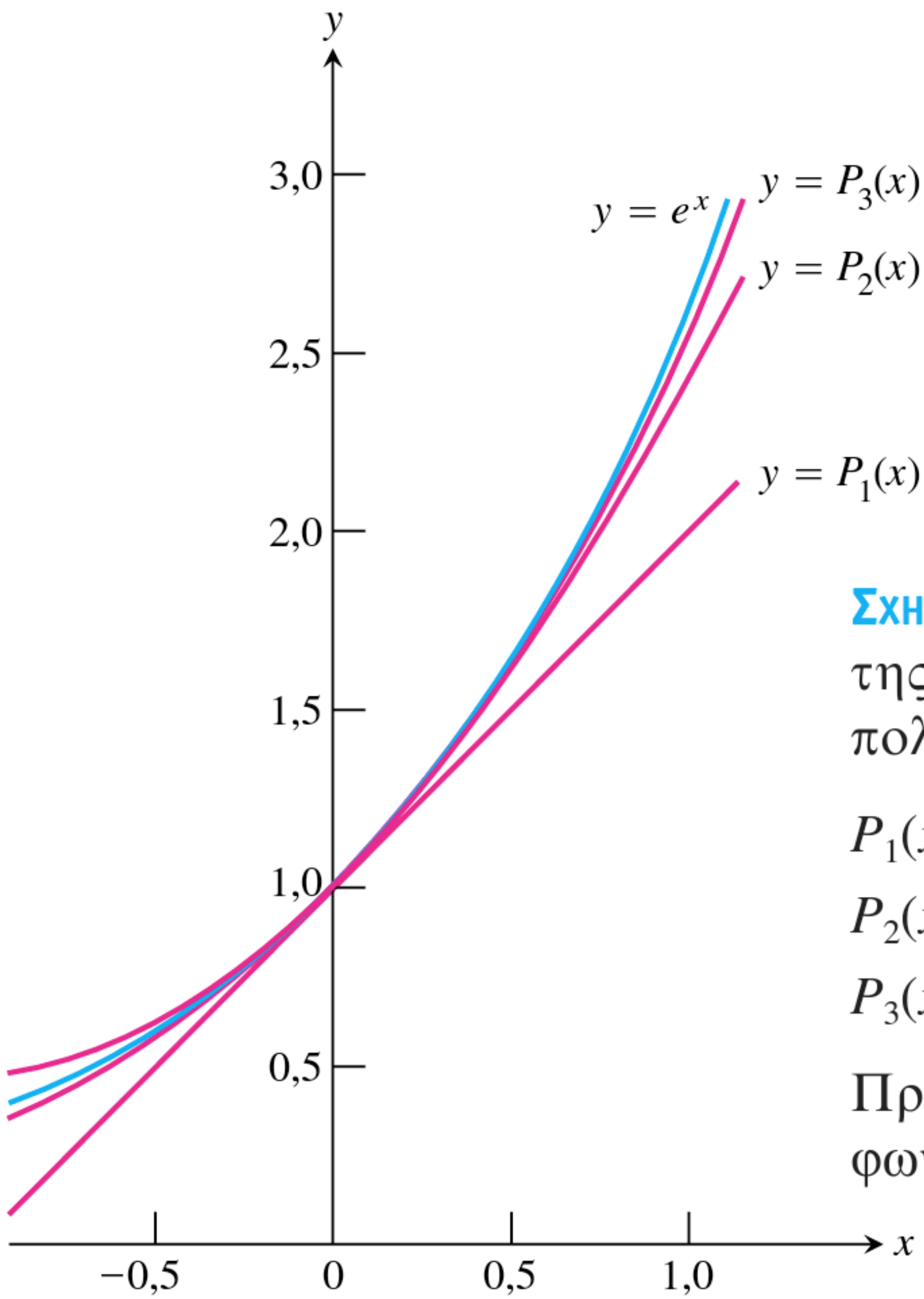
$$f(0) = e^0 = 1, \qquad f'(0) = 1, \qquad \ldots, \qquad f^{(n)}(0) = 1, \ldots.$$

Η σειρά Taylor την οποία παράγει η f στο $x = 0$ είναι, λοιπόν,

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f^{n}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Παράδειγμα



ΣΧΗΜΑ 8.18 Γραφική παράσταση της $f(x) = e^x$ και των πολυωνύμων Taylor αυτής

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + (x^2/2!)$$

$$P_3(x) = 1 + x + (x^2/2!) + (x^3/3!).$$

Προσέξτε την πολύ καλή συμφωνία κοντά στο κέντρο $x = 0$.