Γενικά Μαθηματικά Ι
1ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
Ημερομηνία παράδοσης: 19/10/2015

Τμήμα Τ1: Ν. Στεργιούλας

Άσκηση 1: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \ln(5^x - 3^x - 2)$
2. $g(x) = \sqrt{\ln\left[\ln\left(\dfrac{30x+6}{-2x+5}\right)\right]}$
3. $h(x) = \sqrt{|x^2 + 18x - 3| - 12}$

Λύση:

1. Πρέπει $5^x - 3^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 5^x - 3^x > 2$. Για $x = 1$ υπάρχει η προφανής σχέση $5^1 - 3^1 = 2$. Η ανισότητα ικανοποιείται για $x > 1$. Επομένως, $D(f) = (1, +\infty)$.
2. Δουλεύουμε την έκφραση από μέσα προς τα έξω. 1ος περιορισμός: $\frac{30x+6}{-2x+5} > 0 \Rightarrow -1/5 < x < 5/2$. 2ος περιορισμός: $\ln\left(\frac{30x+6}{-2x+5}\right) > 0 \Rightarrow \frac{30x+6}{-2x+5} > 1 \Rightarrow x > -1/5$. 3ος περιορισμός: $\ln\left[\ln\left(\frac{30x+6}{-2x+5}\right)\right] \geq 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{30x+6}{-2x+5}\right) \geq 1 \Rightarrow \frac{30x+6}{-2x+5} \geq e \Rightarrow x \geq (5e-6)/(30+2e) \simeq 0.2142$. Συνολικά: $D(g) = [\frac{5e-6}{30+2e}, 5/2)$.
3. Πρέπει $|x^2 + 18x - 3| - 12 \geq 0 \Leftrightarrow |x^2 + 18x - 3| \geq 12 \Leftrightarrow \{x^2 + 18x - 3 \geq 12$ ή $x^2 + 18x - 3 \leq -12\} \Leftrightarrow \{x^2 + 18x - 15 \geq 0$ ή $x^2 + 18x + 9 \leq 0\} \Leftrightarrow \{(x \leq -9 - 4\sqrt{6}$ ή $x \geq -9 + 4\sqrt{6})$ ή $-9 - 6\sqrt{2} \leq x \leq -9 + 6\sqrt{2}\}$. Επομένως, το πεδίο ορισμού είναι $D(h) = (-\infty, -9 - 4\sqrt{6}] \cup [-9 - 6\sqrt{2}, -9 + 6\sqrt{2}] \cup (-9 + 4\sqrt{6}, +\infty)$.

Άσκηση 2: Να βρεθεί (αν υπάρχει) η αντίστροφη συνάρτηση των:

1. $f_1(x) = 3x + \sqrt{x^2 + 9}$
2. $f_2(x) = \dfrac{4^x}{4 + 4^x}$

Λύση:

1. Η $f_1(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπου είναι 1-1. Θέτουμε $y = 3x + \sqrt{x^2+9}$ και λύνοντας ως προς x βρίσκουμε δύο πιθανές λύσεις: $x = 3y/8 + 1/8\sqrt{y^2+72}$ ή $x = 3y/8 - 1/8\sqrt{y^2+72}$, δηλ. προκύπτουν δύο υποψήφιες εκφράσεις της αντίστροφης συνάρτης: $f_1^{-1}(x) = 3x/8 + 1/8\sqrt{x^2+72}$ ή $f_1^{-1}(x) = 3x/8 - 1/8\sqrt{x^2+72}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Από αυτές, βρίσκουμε πως μόνο η δεύτερη ικανοποιεί τη σχέση $f_1^{-1} \circ f_1(x) = x$, άρα αυτή είναι η ζητούμενη αντίστροφη συνάρτηση.

2. Η $f_2(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $D(f_2) = (-\infty, +\infty)$, όπου είναι 1-1. Θέτουμε $y = 4^x/(4+4^x) \Rightarrow y = 4^{x-1}/(1+4^{x-1}) \Rightarrow 4^{x-1} = y/(1-y) \Rightarrow x = 1+\log_4[y/(1-y)]$. Άρα $f_1^{-1}(x) = 1+\log_4[x/(1-x)]$, με πεδίο ορισμού $D(f_2^{-1}) = (0,1)$. Οι $f_2(x)$ και $f_2^{-1}(x)$ αποτελούν ζεύγος αντίστροφων συναρτήσεων, δηλ. $f_2^{-1} \circ f_2(x) = f_2 \circ f_2^{-1}(x) = x$ στο κοινό πεδίο ορισμού $x \in (0,1)$.

Άσκηση 3: Να υπολογιστούν τα όρια:

1. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{\sqrt{x+1}}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$

Λύση:

1. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{\sqrt{x+1}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to -1} \frac{(\sqrt{x^2+8}-3)'}{(\sqrt{x+1})'} = \lim_{x\to -1} \frac{2x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+8}} = \frac{0}{3} = 0.$

2. Δεν υπάρχει το όριο αν $x \in \mathbb{R}$. Σημείωση: Αν επεκτήναμε την άσκηση στους μιγαδικούς αριθμούς, τότε το όριο θα ήταν $-2i$, αφού $\sqrt{-1} = i$.

3. Επειδή $-1 \le \sin x \le 1$, μπορούμε να ορίσουμε δύο συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1+2\sqrt{x}}{x+1}$ και $g(x) = \frac{x-1+2\sqrt{x}}{x-1}$, ώστε $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) \le \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x} \le \lim_{x\to\infty} g(x)$. Επειδή $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 1$, από το θεώρημα του «σάντουιτς» έπεται πως και $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x} = 1$.

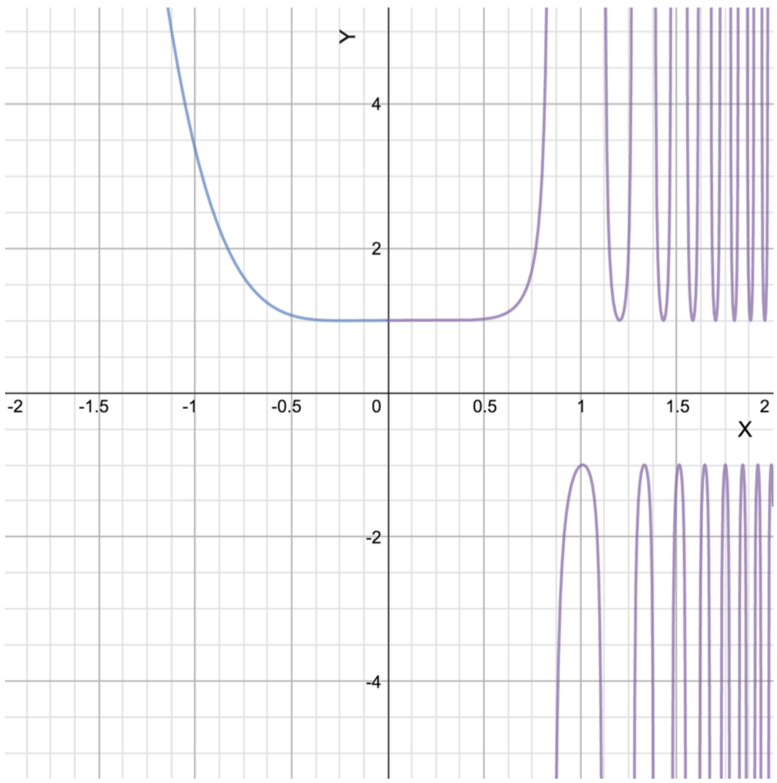
Άσκηση 4: Υπάρχει τιμή του a για την οποία η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^4 + e^{x^3} + \dfrac{2}{3}a, & \text{αν } x < 0 \\ \sec(3x^4 + ax), & \text{αν } x \ge 0 \end{cases}$$

γίνετια συνεχής στο $x = 0$; Σχεδιάστε την $f(x)$ (για τη συγκεκριμένη τιμή του a) μεταξύ $-2 < x < 2$ χρησιμοποιώντας όποιο πρόγραμμα γραφικών θέλετε (πχ., desmos).

Λύση:

Πρέπει $\lim_{x\to 0^-}\left(3x^4 + e^{x^3} + \frac{2}{3}a\right) = \lim_{x\to 0^+}\sec(3x^4 + ax) \Rightarrow 1 + \frac{2}{3}a = \sec 0 = 1 \Rightarrow a = 0.$ Επιπροσθέτως, πρέπει $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 1 = 1$, άρα ισχύει. Η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Άσκηση 5:

Βρείτε ποια τιμή πρέπει να έχει το όριο $\lim_{x\to 0} g(x)$, ώστε να αληθεύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

1. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4 - g(x)}{x}\right) = 1$

2. $\lim_{x\to -4}\left(x \lim_{x\to 0} g(x)\right) = 1$

Λύση:

1. Πρέπει $g(x) = 4 - f(x)$, ώστε $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4-4+f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f'}{x'}\right) = \frac{f'}{1} = 1$. Ικανοποιείται για $f(x) = x$ και $\lim_{x\to 0} g(x) = 4$.

2. Είναι προφανές πως $\lim_{x\to 0} g(x) = -1/4$.

Άσκηση 6: Η κίνηση ενός σώματος περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = t^2 - 2$, $y(t) = t^3 - 2t$, με $-\infty < t < \infty$. Βρείτε τα σημεία της τροχιάς στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα Ox.

Λύση:

Η εφαπτόμενη έχει κλίση $dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt)$ και άρα είναι παράλληλη με τον άξονα Ox στα σημεία όπου $dy/dt = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2/3}$, δηλαδή στα σημεία $(x, y) = (-4/3, -4/3\sqrt{2/3})$ και $(x, y) = (-4/3, 4/3\sqrt{2/3})$. Το παρακάτω σχήμα επιβεβαιώνει τη λύση: