Γενικά Μαθηματικά Ι
2ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
Ημερομηνία παράδοσης: 2/11/2015

Τμήμα Τ1: Ν. Στεργιούλας

Άσκηση 1: Δίδεται η καμπύλη:

$$y = \left[4x^5 + x^3(\exp(2x) - 4) + 3x - \cos(xy)\right] g(x)$$

όπου $g(0) = 10$ και $\lim_{x\to 0}[(g(x) - 10)/x] = 5$. Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο παραγώγισης πεπλεγμένης συνάρτησης για να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της καμπύλης και την κάθετο επί αυτής στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση:

$$\frac{dy}{dx} = \left\{20x^4 + 3x^2\left(e^{2x} - 4\right) + 2x^3 e^{2x} + 3 + \left[y + x\frac{dy}{dx}\right]\sin(xy)\right\} g(x) + \frac{y}{g}\frac{dg}{dx}$$

$$\Longrightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = 3g(0) - \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0},$$

διότι και $y(0) = -10 \Rightarrow y(0)/g(0) = -1$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 0}[(g(x) - 10)/x] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}\right] = \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0} = 5$, οπότε η κλίση της εφαπτόμενης στο σημείο $x = x_0 = 0$ είναι:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 30 - 5 = 25$$

και η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι :

$$y = -10 + 25(x - 0) = -10 + 25x,$$

ενώ της καθέτου σε αυτή στο σημείο $x = x_0 = 0$ είναι:

$$y = -10 - 25(x - 0) = -10 - x/25.$$

Άσκηση 2: Ένα σύρμα κρέμεται από δύο κολώνες, ύψους 0.75m η καθεμία, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση 5m. Το χαμηλότερο σημείο του σύρματος ακουμπά στο έδαφος. *Υποθέστε* αρχικά ότι το σχήμα του σύρματος είναι μια *παραβολή* και προσδιορίστε τη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του σύρματος και τις κολώνας. Στη συνέχεια, με το πρόγραμμα desmos.com βρείτε μια παλινδρόμιση της μορφής $y = \dfrac{1}{a}\cosh(ah) + b$, χρησιμοποιώντας ως δεδομένα τις τιμές της παραβολής στα πέντε σημεία $x = 0, \pm 1, \pm 2$. Βρείτε πάλι τη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του σύρματος και της κολώνας, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της παλινδρόμισης. Πόσο διαφέρουν μεταξύ τους (επί τοις εκατό) οι δύο τιμές που υπολογίσατε για τη γωνία; Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την παραβολή, την παλινδρόμηση και την εφαπτόμενη.

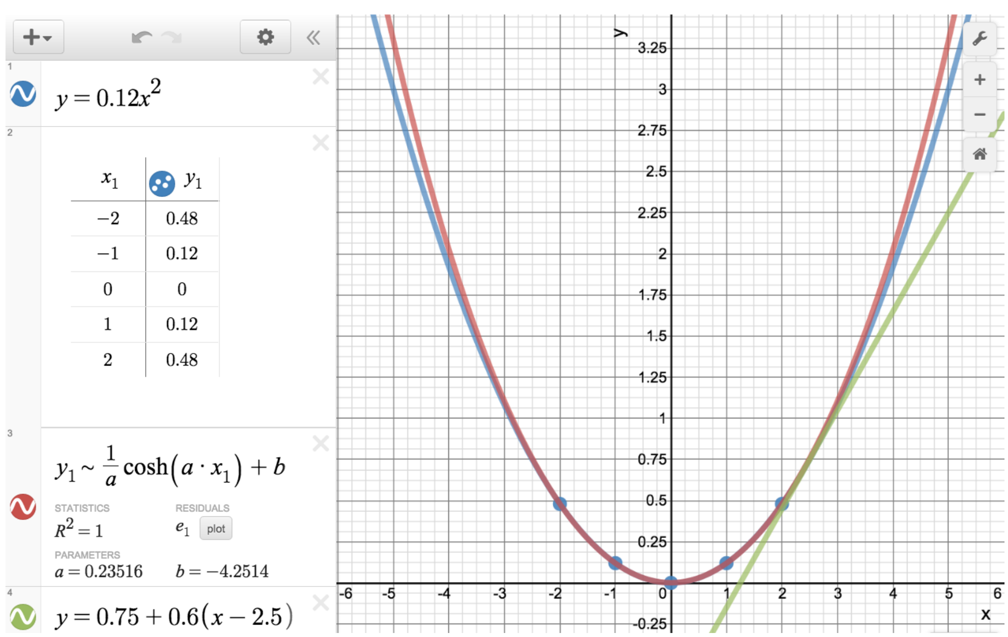
Λύση:

Υποθέτουμε ότι το σύρμα έχει το σχήμα της παραβολής $y = kx^2$ και ότι ακουμπά στο έδαφος στο σημείο $(x, y) = (0, 0)$. Επειδή $y(2.5) = 0.75 \Rightarrow k = 0.12$, δηλ. $y = 0.12x^2$, με παράγωγο $dy/dx = 0.24x$ που παίρνει τιμή 0.6 στο $x = 2.5$. Αν ϕ είναι η γωνία μεταξύ του σύρματος και της κολώνας, τότε $\tan^{-1}(90^\circ - \phi) = 0.6 \Rightarrow \phi = 59^\circ$. Η εφαπτόμενη στο $x = 2.5$ είναι η ευθεία $y = 0.75 + 0.6(x - 2.5)$.

Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών

$$(x, y) = \{(-2, 0.48), (-1, 0.12), (0, 0), (1, 0.12), (2, 0.48)\}$$

και υπολογίζουμε με το desmos.com την παλινδρόμιση $y = \dfrac{1}{0.235}\cosh(0.235x) - 4.25$. Η παράγωγος είναι $dy/dx = \sinh(0.235x) = \dfrac{1}{2}(e^{0.235x} - e^{-0.235x})$ με τιμή 0.625 στο $x = 2.5$. Αυτό αντιστοιχεί σε γωνία $\phi = 58^\circ$ που διαφέρει κατά 1.7% από την τιμή που υπολογίσαμε όταν υποθέσαμε ότι το σχήμα του σύρματος είναι παραβολή.



Άσκηση 3: Να εξεταστεί εάν η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3}{|x|} + e^{a|x-1|+b}$, με $a, b \neq 0$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 1$.

Λύση:

Για να είναι συνεχής, πρέπει $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 + e^b = 1 + e^b = 1 + e^b$, άρα είναι πράγματι συνεχής στο $x = 1$. Για να είναι παραγωγίσιμη, πρέπει $y'|_- = y'|_+$. Όμως, $2 - ae^b \neq 2 + ae^b$ όταν $a \neq 0$, άρα δεν είναι παραγωγίσιμη.

Άσκηση 4: Αν η συνάρτηση $y = f(x)$ ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = a(t + 2/t)$ και $y = a(t - 2/t)$, δείξτε ότι

$$y^3 \frac{d^2y}{dx^2} = -8a^2$$

Λύση:

Υπολογίζουμε: $dx/dt = a(1 - 2/t^2)$ και $dy/dt = a(1 + 2/t^2)$, άρα

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(1 - 2/t^2)}{(1 + 2/t^2)}$$

και

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = -\frac{8t^3}{a(t^2 - 3)^3}$$

Οπότε

$$y^3 \frac{d^2y}{adx^2} = -8a^3$$

Άσκηση 5: Δυο θετικοί αριθμοί έχουν γινόμενο 100. Να εξεταστεί αν το άθροισμα τους γίνεται μέγιστο ή ελάχιστο.

Λύση: Αν συμβολίσουμε με x και y τους δυο αριθμούς, τότε $x \cdot y = 100$, ενώ το άθροισμά τους είναι $A = x + y \Rightarrow A(x) = x + 100/x$. Ακρότατο υπάρχει για $dA/dx = 0 \Rightarrow dA/dx = 1 - 100/x^2 = 0 \Rightarrow x = 10$. Εξετάζοντας τη δεύτερη παράγωγο, βρίσκουμε $d^2A/dx^2 = 200/x^3 > 0$ για $x > 0$, άρα πρόκειται για ελάχιστο. Μέγιστο δεν υπάρχει.

Άσκηση 6: Στο επίπεδο $x - y$ μια καμπύλη ορίζεται από την εξίσωση $x^2 - 2x + 1 - y^4 = 0$. Να βρεθεί το σημείο της καμπύλης που έχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Λύση: Λύνοντας την $x^2 - 2x + 1 - y^4 = 0$ ως προς x βρίσκουμε $x = 1 \pm y^2 \Rightarrow y^2 = \pm(x-1)$. Άρα, η καμπύλη αποτελείται από δύο κλάδους που περιγράφονται από τις εξισώσεις $y^2 = x - 1$ και $y^2 = -x + 1$ και που εφάπτονται στο σημείο $(x, y) = (1, 0)$. Απαιτώντας $y^2 > 0$, βρίσκουμε για τον πρώτο κλάδο $x \geq 1$, ενώ για το δεύτερο κλάδο $x \leq 1$.

Για τον πρώτο κλάδο, η απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι $D = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x - 1}$ με ακρότατο για $dD/dx = 0 \Rightarrow x = -1/2$. Η τιμή αυτή δε βρίσκεται εντός του $x \geq 1$, άρα απορρίπτεται.

Για τον δεύτερο κλάδο, η απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι $D = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - x + 1}$ με ακρότατο για $dD/dx = 0 \Rightarrow x = 1/2$. Με χρήση της δεύτερης παραγώγου, επιβεβαιώνουμε ότι το ακρότατο αυτό είναι ελάχιστο. Ελάχιστη απόσταση υπάρχει στα δύο σημεία $(x, y) = (1/2, \pm 1/\sqrt{2})$ (λόγω συμμετρίας ως προς τον άξονα x). Ως παράδειγμα, δείχνουμε παρακάτω το ένα από τα δύο σημεία: