

Ασκήσεις Γενικά Μαθηματικά Ι

Ομάδα 4

Νικόλαος Στεργιούλας

Ημερομηνία παράδοσης: 7/12/2015, 23:55

Άσκηση 1: Υπολογίστε το όριο του $x \rightarrow 0$ της κάτωθι συνάρτησης, χρησιμοποιώντας αναπτύγματα Maclaurin:

$$f(x) = \frac{\sin(2x) - \tan^{-1}(4x)}{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$$

Άσκηση 2: Βρείτε το ανάπτυγμα MacLaurin της συνάρτησης: $f(x) = \ln(1 + 4x^b)$, όπου b κάποιος αριθμός. Ποια είναι η προσεγγιστική τιμή του αναπτύγματος στο $x = 0.2$ εάν χρησιμοποιήσουμε τους 3 πρώτους όρους του αναπτύγματος MacLaurin για $b = 1$; Εκτιμήστε το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης αυτής με βάση το θεωρητικό τύπο και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με το πραγματικό σφάλμα.

Άσκηση 3: Ένας μηχανικός ύψους $1.80m$ βρίσκεται σε απόσταση $x = 40m$ από κτίριο ύψους h και μετρά ότι γωνία υπό την οποία βλέπει την ταράτσα του κτιρίου είναι 70° . Εάν απαιτείται ακρίβεια καλύτερη από 2% στον υπολογισμό του ύψους του κτιρίου, με πόση ακρίβεια πρέπει να μετρηθεί η παραπάνω γωνία;

Άσκηση 4: Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση το $\tan(\pi/10)$ με τη χρήση όρων μέχρι 3ης τάξης του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης $f(x) = \tan(x)$ στο σημείο $x_0 = 0$. Εκτιμήστε το μέγιστο σφάλμα και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με το πραγματικό σφάλμα.

Άσκηση 5: Να βρεθεί η σειρά που έχει τη συνάρτηση $x \tan(x^2)$ ως άθροισμα.

Άσκηση 6: Η σφαιρική συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, δεύτερου βαθμού δίνεται από την έκφραση:

$$j_2(x) = \frac{\left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \sin x}{x} - \frac{3 \cos x}{x^2}.$$

Βρείτε τα αναπτύγματα Taylor 1ης, 2ης και 3ης τάξης της παραπάνω συνάρτησης στο σημείο $x = 2\pi$. Σχεδιάστε τη συνάρτηση και τα παραπάνω αναπτύγματα α) σε ένα μικρό διάστημα γύρω από το $x = 2\pi$ και β) στο διάστημα $-10 < x < 10$. Σχολιάστε τη σύγκλιση του αναπτύγματος Taylor της $j_2(x)$ στα παραπάνω διαστήματα.