

Βαρυτική Ακτινοβολία στην Υπολογιστική Σχετικότητα

Επιβλέπων Καθηγητής:
Ν. Στεργιούλας

Πτυχιακή Εργασία του φοιτητή Μίλεα Χρήστου

2005

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Σχολή Θετικών Επιστημών-Τμήμα Φυσικής
20 Σεπτεμβρίου 2005

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Επίκουρο Καθηγητή του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου, και επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, κ. Στεργιούλα Νίκο, για την υπόδειξη του θέματος και για τη συνεχή και πολύτιμη βοήθεια του σε κάθε μου δυσκολία και απορία κατά τη διάρκεια της μελέτης αυτής της εργασίας. Να ευχαριστήσω επίσης τους φίλους μου για την ψυχολογική και επιστημονική τους βοήθεια. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που στάθηκε δίπλα μου και με στήριξε όχι μόνο κατά τη διάρκεια επεξεργασίας αυτής της διπλωματικής εργασίας, αλλά και σε κάθε στιγμή της ζωής μου.

Περίληψη

Σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας ήταν η μελέτη της συνεισφοράς των περιστροφικών όρων της μετρικής του εξωτερικού χωροχρόνου ενός περιστρεφόμενου σχετικιστικού αστέρα, στην εκπεμπόμενη βαρυτική ακτινοβολία. Ξεκινάμε με τη μελέτη των βαρυτικών κυμάτων στον επίπεδο χωροχρόνο, μέσω των γραμμικοποιημένων εξισώσεων πεδίου του Einstein. Στο επόμενο στάδιο μελετάμε τις διαταραχές της μετρικής Schwarzschild ενός σφαιρικά συμμετρικού χωροχρόνου. Χωρίζοντας τις διαταραχές σε άρτιες και περιττές, καταλήγουμε σε δύο κυματικές εξισώσεις, την εξίσωση των Regge-Wheeler για περιττές διαταραχές και την εξίσωση του Zerilli για άρτιες διαταραχές. Το επόμενο βήμα είναι πάλι η εξαγωγή των εξισώσεων Regge-Wheeler και Zerilli, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι είναι δυνατή η χρήση τέτοιων συναρτήσεων που να είναι αναλλοίωτες κάτω από μετσχηματισμούς βαθμίδας, ώστε να υπακούουν τις εξισώσεις των Regge-Wheeler και Zerilli σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Στο τελικό στάδιο μελετάμε την εφαρμογή μας για περιστρεφόμενους αστέρες, η μετρική των οποίων αποκλείει από τη σφαιρική συμμετρία, χρησιμοποιώντας μία μέθοδο σύμφωνα με την οποία, μπορούμε να χωρίσουμε μία γενική μη σφαιρική μετρική σε ένα σφαιρικό κομμάτι και σε ένα μη σφαιρικό κομμάτι, ούτως ώστε να μπορέσουμε να μελετήσουμε το πρόβλημα μας με τη βοήθεια της προηγούμενης θεωρίας που είδαμε για σφαιρικούς χωροχρόνους. Προσδιορίζουμε έτσι τους αναλυτικούς μαθηματικούς τύπους των συνεισφορών των περιστροφών (στάσιμο σφάλμα) και τους εφαρμόζουμε για διάφορους αστέρες.

Abstract

Our goal in this project, was to study the contributions of the rotating parts of the metric outside a rotating relativistic star, on the emitted gravitational waves. We begin by studying the gravitational waves on flat spacetime, through the Einstein's linearized field equations. On the next chapter we investigate the perturbations of the Schwarzschild metric of a spherically symmetric spacetime. Separating the perturbations in even and odd perturbations, we find two wave equations, the Regge-Wheeler equation for odd perturbations and the Zerilli equation for even perturbations. On the next chapter we find a way to build gauge-invariant functions that obey the Regge-Wheeler and Zerilli equations in any coordinate frame. On the last chapter we study our problem for rotating stars, whose metric slightly differs from spherical symmetry, using a method that, allows us to separate a non spherical metric into a spherical part and a non spherical one, so as to study our problem with the aid of the theory developed earlier for spherical spacetimes. So we define the analytical mathematical relations of the rotations' contributions (stationary error) and we use them for various stars.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή στα Βαρυτικά Κύματα	5
1.1	Γραμμικοποίηση των εξισώσεων Einstein	5
1.2	Κυματική Λύση των Εξισώσεων Einstein	10
1.3	Σημασία της Βαθμίδας TT	12
1.4	Πόλωση των Βαρυτικών Κυμάτων	16
1.5	Παραγωγή των Βαρυτικών Κυμάτων	18
2	Διαταραχές του χωροχρόνου Schwarzschild και βαρυτικά κύματα	22
2.1	Γραμμικές Διαταραχές του Χωροχρόνου Schwarzschild	22
2.2	Ανάλυση σε Σφαιρικές Αρμονικές	24
2.3	Ανάλυση Συχνοτήτων:Ειδίκευση για $M = 0$	26
2.4	Μετασχηματισμοί Βαθμίδας	26
2.5	Ακτινικές Εξισώσεις	28
	2.5.1 Περιττές Διαταραχές	28
	2.5.2 Άρτιες Διαταραχές	31
2.6	Εναλλακτική Έκφραση σε Σφαιρικές Αρμονικές	33
3	Αναλλοίωτες Βαθμίδας του Χωροχρόνου Schwarzschild	38
3.1	Αρχή Μεταβολών στη Θεωρία Διαταραχών	39
3.2	Διαταραχές των Κενών και Στατικών Μετρικών	41
3.3	Περιττές Διαταραχές	44
3.4	Άρτιες Διαταραχές	47
3.5	Ευστάθεια Μελανών Οπών	52
4	Βαρυτική Ακτινοβολία από Περιστρεφόμενους Αστέρες	54
4.1	Εξαγωγή Κυματομορφών σε μη-σφαιρικούς Χωροχρόνους	54
4.2	Η Μετρική των Hartle-Thorne	58
4.3	Εύρεση των συναρτήσεων των διαταραχών	60
4.4	Πολυωνυμικό ανάπτυγμα του στατικού σφάλματος	63
4.5	Σύγκριση της καμπύλης στάσιμου σφάλματος για διαφορετικούς αστέρες	65
4.6	Συμπεράσματα	69

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στα Βαρυτικά Κύματα

Μέχρι τις αρχές του 20ού αιώνα, η μόνη πηγή παρατήρησης του σύμπαντος ήταν η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, σε κάθε της μορφή. Η ανάπτυξη της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας όμως άνοιξε νέους ορίζοντες για τη μελέτη και παρατήρηση του σύμπαντος. Ένας από τους νέους αυτούς κλάδους αποτελούν και τα βαρυτικά κύματα, η μελέτη των οποίων αν και ξεκίνησε λίγο μετά τη δημοσίευση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (1915) με το πρωτοποριακό έργο του Albert Einstein, ήχμασε μετά τη δεκαετία του 1970, με τις εργασίες των Regge και Wheeler, Zerilli, Mathews, Moncrief, κ.α.

Η εργασία χωρίζεται σε τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στη θεωρία των βαρυτικών κυμάτων, τη διάδοση τους στο κενό, την πόλωση τους καθώς και την παραγωγή τους από αστρικά σώματα. Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετούνται οι διαταραχές του χωροχρόνου Schwarzschild και τα βαρυτικά κύματα που αυτές προκαλούν. Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάται το ίδιο πρόβλημα, από μία διαφορετική όμως σκοπιά, βασισμένη στην κατασκευή ποσοτήτων που είναι αναλλοίωτες σε απειροστούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Τέλος εφαρμόζουμε την όλη θεωρία που μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια στην περίπτωση περιστρεφόμενων αστερών.

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιηθεί η χωροειδής μορφή των προσήμων, $(-, +, +, +)$, όπου οι ελληνικοί δείκτες θα παίρνουν τιμές από 0 έως 3, ενώ οι λατινικοί από 1 έως 3. Η συναλλοίωτη παράγωγος συμβολίζεται με το ελληνικό ερωτηματικό (;) και μερικές φορές με το σύμβολο του ανάδελα, ∇ , ενώ η συνήθης με ένα κόμμα (,) ή με το σύμβολο ∂ . Οι ταυιστές θα γράφονται με πιο σκούρα γράμματα (π.χ. \mathbf{T}) και τα τρία-διανύσματα με το βέλος από επάνω (π.χ. \vec{a}). Τέλος θα δουλέψουμε στο γεωμετρικοποιημένο σύστημα μονάδων, όπου $G = c = 1$.

1.1 Γραμμικοποίηση των εξισώσεων Einstein

Η μελέτη των βαρυτικών κυμάτων ξεκινά από την πρωτοποριακή δουλειά του Einstein και βασίζεται στη γραμμικοποιημένη μορφή των εξισώσεων πεδίου του Einstein, οι οποίες είναι

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

όπου $G_{\mu\nu}$ ο τανυστής του Einstein, $R_{\mu\nu}$ και R ο τανυστής και το βαθμωτό του Ricci αντίστοιχα, $g_{\mu\nu}$ η μετρική και $T_{\mu\nu}$ ο τανυστής ενέργειας-ορμής. Σε αυτή την προσέγγιση θα αποδειχτεί ότι η γραμμικοποιημένη θεωρία οδηγεί σε λύσεις των εξισώσεων (1.1) που συμπεριφέρονται ως κύματα (βαρυτικά κύματα). Πρέπει όμως να τονιστεί (όπως θα δείχτεί παρακάτω) ότι η έννοια των βαρυτικών κυμάτων ως λύσεις των εξισώσεων Einstein είναι έγκυρη μόνο κάτω από μερικές εξιδανικευμένες υποθέσεις: έναν κενό και ασυμπτωτικά επίπεδο χωροχρόνο και μία γραμμικοποιημένη μορφή του βαρυτικού πεδίου. Αυτή είναι εξάλλου και η προσέγγιση της γραμμικοποιημένης θεωρίας. Σε περίπτωση όμως που δε πληρούνται οι υποθέσεις αυτές δε σημαίνει ότι δεν είναι δυνατός ο ορισμός των βαρυτικών κυμάτων [16]. Απλά τότε η μελέτη γίνεται πιο περίποκη και δύσκολη (Τέτοια περίπτωση θα συναντίσουμε στο 2ο κεφάλαιο).

Η όλη μελέτη ξεκινά θεωρώντας μία μετρική, $g_{\mu\nu}$, η οποία διαφέρει ελάχιστα από τη μετρική Minkowski, σε συντεταγμένες Minkowski (t, x, y, z) , έτσι ώστε

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

όπου

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (1.3)$$

Το ότι βρισκόμαστε στη γραμμικοποιημένη περιοχή σημαίνει ότι

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1.$$

Συνεπώς όσοι όροι εμφανίζονται δευτέρας και ανωτέρας τάξεως θα αγνοούνται. Από τη μορφή της (1.2) φαίνεται ότι και ο τανυστής $h_{\mu\nu}$ είναι διαγώνιος.

Η ανταλλοιώτη μορφή του $h_{\mu\nu}$ είναι [11]

$$h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}. \quad (1.4)$$

Ισχύει ότι

$$(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) = \delta_{\alpha}^{\nu} \quad (1.5)$$

Συγκρίνοντας την τελευταία εξίσωση με την $g_{\alpha\beta}g^{\beta\nu} = \delta_{\alpha}^{\nu}$ παίρνουμε ότι

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (1.6)$$

Πριν γραφούν οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις πεδίου πρέπει να εκφραστούν τα σύμβολα Christoffel στη γραμμικοποιημένη τους μορφή. Αφού τα $\eta_{\mu\nu}$ είναι σταθερά,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \\ &= \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})(h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\beta\nu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\beta\nu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) \\ &= \frac{1}{2}(h_{\alpha,\beta}^{\mu} + h_{\beta,\alpha}^{\mu} - h_{\alpha\beta}^{\mu}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

αφού $\eta_{\mu\nu,\alpha} = 0$ και $h^{\mu\nu}(h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\beta\nu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu})$ είναι όρος δεύτερας τάξεως. Παρατηρούμε ότι το ανέβασμα και κατέβασμα των δεικτών γίνεται με το μετρικό τανυστή $\eta^{\mu\nu}$ κι όχι με τον $g^{\mu\nu}$. Αυτό είναι το αποτέλεσμα της γραμμικής προσέγγισης. Παρ' όλη όμως τη γραμμική μορφή των εξισώσεων ο χωροχρόνος παραμένει καμπυλωμένος.

Με βάση τα παραπάνω ο τανυστής του Riemann δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} R_{\alpha\mu\beta\nu} &\equiv \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\mu\beta} - g_{\alpha\beta,\mu\nu} + g_{\mu\beta,\alpha\nu} - g_{\mu\nu,\alpha\beta}) \\ &\equiv \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\mu\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu} + h_{\mu\beta,\alpha\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Οι ταυτότητες του Bianchi

$$\nabla_\alpha R_{\delta\epsilon\beta\gamma} + \nabla_\gamma R_{\delta\epsilon\alpha\beta} + \nabla_\beta R_{\delta\epsilon\gamma\alpha} \equiv 0 \quad (1.9)$$

γίνονται

$$\partial_\alpha R_{\delta\epsilon\beta\gamma} + \partial_\gamma R_{\delta\epsilon\alpha\beta} + \partial_\beta R_{\delta\epsilon\gamma\alpha} \equiv 0 \quad (1.10)$$

και ικανοποιούνται από την (1.8).

Ο τανυστής του Ricci είναι¹

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(h_{\beta,\mu\beta}^\nu - h_{\beta,\mu\nu}^\beta + h_{\mu,\alpha\nu}^\alpha - h_{\mu\nu,\alpha}^\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(h_{\nu,\mu\alpha}^\alpha - h_{\mu\nu,\alpha}^\alpha + h_{\mu,\alpha\nu}^\alpha - h_{,\mu\nu}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

όπου

$$h_{\beta}^{\beta} = \eta^{\beta\alpha} h_{\beta\alpha} \equiv h \quad (1.12)$$

Ο όρος $h_{\mu\nu,\alpha}^\alpha$ γράφεται κι ως $\square h_{\mu\nu}$, όπου \square είναι ο τελεστής του d'Alembert

$$\begin{aligned} \square &= \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \\ &= \partial_\alpha \partial^\alpha \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Έτσι η (1.11) γίνεται

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\nu,\mu\alpha}^\alpha + h_{\mu,\alpha\nu}^\alpha - \square h_{\mu\nu} - \square h_{,\mu\nu}) \quad (1.14)$$

¹ Στην ίδια σχέση θα καταλήγαμε αν ξεκινούσαμε από τη σχέση

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta$$

Το βαθμωτό του Ricci

$$\begin{aligned} R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (h_{\nu,\mu\alpha}^\alpha + h_{\mu,\alpha\nu}^\alpha - \square h_{\mu\nu} - \square h_{,\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (h^{\mu\alpha}{}_{,\mu\alpha} + h^{\nu\alpha}{}_{,\nu\alpha} - \square h_\nu^\nu - h_{,\nu}{}^\nu) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Οι δείκτες μ, α, ν είναι βωβοί δείκτες. Επίσης με βάση την (1.13) ισχύει ότι $h_{,\nu}{}^\nu = \square h$. Θέτοντας $\mu = \nu = \beta$ η (1.15) γίνεται

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} (2h^{\beta\alpha}{}_{,\beta\alpha} - 2\square h) \\ &= h^{\beta\alpha}{}_{,\beta\alpha} - \square h \end{aligned} \quad (1.16)$$

Άρα ο τανυστής του Einstein θα είναι

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R \\ &= \frac{1}{2} [h_{\nu,\mu\alpha}^\alpha + h_{\mu,\alpha\nu}^\alpha - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \square h)] \end{aligned} \quad (1.17)$$

και η εξίσωση του Einstein

$$h_{\nu,\mu\alpha}^\alpha + h_{\mu,\alpha\nu}^\alpha - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (1.18)$$

Από τη μορφή της (1.18) δεν φαίνεται ότι η εξίσωση αυτή αποτελεί κυματική εξίσωση. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε νέο συμβολισμό που κάνει χρήση των τανυστών μηδενικού ίχνους (trace-free), οι οποίοι ορίζονται ως

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (1.19)$$

όπου ο «τελεστής παύλα» μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε συμμετρικό τανυστή, όπως για παράδειγμα, $\bar{R}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$ και $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Με τη βοήθεια αυτού του συμβολισμού οι εξισώσεις του Einstein (1.18) γίνονται

$$\bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^\alpha + \bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^\alpha - \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \square \bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (1.20)$$

Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ελευθερία που μας δίνει η Γενική Σχετικότητα στην επιλογή των συντεταγμένων. Το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο γράφτηκαν οι εξισώσεις (1.2) και (1.3) λέγεται σχεδόν-Lorentz. Υπάρχουν δύο είδη μετασχηματισμών που οδηγούν από ένα σύστημα σχεδόν-Lorentz σε ένα άλλο: οι μετασχηματισμοί Lorentz υποβάθρου και οι μετασχηματισμοί βαθμίδας.

Οι μετασχηματισμοί βαθμίδας [10] είναι ένα είδος αλλαγής συντεταγμένων της μορφής

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha \quad (1.21)$$

από ένα σύστημα $\{x^\alpha\}$ σε ένα άλλο $\{x^{\alpha'}\}$ με τη βοήθεια ενός αυθαίρετου διανύσματος ξ^α , του οποίου οι συνιστώσες είναι συναρτήσεις της θέσης. Το ξ^α είναι μικρό έτσι ώστε και $|\xi^\alpha{}_{,\beta}| \ll 1$.

Τότε ο μετρικός ταυυστής της (1.2) μετασχηματίζεται απο το ένα σύστημα $\{x^\alpha\}$ στο άλλο σύστημα $\{x'^\alpha\}$ ως:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \quad (1.22)$$

Από την (1.21) προκύπτει

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta^\alpha_\beta - \xi^\alpha_{,\beta} \quad (1.23)$$

και η (1.22) με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= (\delta^\alpha_\mu - \xi^\alpha_{,\mu})(\delta^\beta_\nu - \xi^\beta_{,\nu})(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\ &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \delta^\alpha_\nu \eta_{\alpha\beta} \xi^\beta_{,\mu} - \delta^\beta_\mu \eta_{\alpha\beta} \xi^\alpha_{,\nu} + \mathcal{O}[\xi^2, \xi \cdot h] \\ &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \end{aligned} \quad (1.24)$$

όπου για να έχει ο μετρικός ταυυστής τη μορφή της (1.2) στο νέο σύστημα πρέπει

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad (1.25)$$

Επίσης παρατηρούμε ότι $|h'_{\mu\nu}| \ll 1$. Άρα το νέο σύστημα είναι πάλι σύστημα σχεδόν-Lorentz. Η ονομασία μετασχηματισμός βαθμίδας δόθηκε απο την ομοιότητα της (1.25) με τους μετασχηματισμούς βαθμίδας του Ηλεκτρομαγνητισμού.

Αν τώρα υπολογίσουμε από την (1.8) τον ταυυστή του Riemann στο νέο σύστημα συντετγμένων, χρησιμοποιώντας την (1.25), βρίσκουμε πολύ εύκολα ότι

$$R^{\text{παλιό}}_{\alpha\beta\mu\nu} = R^{\text{νέο}}_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (1.26)$$

Δηλαδή ο ταυυστής του Riemann είναι αναλλοίωτο μέγεθος κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Ομοίως και ο ταυυστής του Einstein και ο ταυυστής ενέργειας-ορμής είναι αναλλοίωτοι κάτω από τους μετασχηματισμούς αυτούς. Έτσι αν είναι γνωστή μία λύση $\bar{h}_{\mu\nu}$ των γραμμικοποιημένων εξισώσεων (1.20) για ένα δοσμένο $T_{\mu\nu}$, με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας μπορεί να βρεθεί μία άλλη λύση που περιγράφει την ίδια φυσική κατάσταση (όλα τα παρατηρήσιμα μεγέθη παραμένουν αναλλοίωτα).

Παρατηρώντας την εξίσωση (1.20) γίνεται φανερό ότι μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά αν

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad (1.27)$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει τέσσερις εξισώσεις,όσες και οι ελεύθερες συναρτήσεις βαθμίδας ξ^α . Είναι πάντα δυνατό να επιλεγεί μία βαθμίδα (δηλαδή ένα ξ^α) ώστε να ισχύει η (1.27). Θα αναφερόμαστε έτσι στην (1.27) ως συνθήκη βαθμίδας Lorentz. Η ύπαρξη της αποδεικνύεται ως εξής. Έστω κάποιο αυθαίρετο $\bar{h}^{\text{παλιό}}_{\mu\nu} \neq 0$. Σε ένα μετασχηματισμό βαθμίδας (1.25) το $\bar{h}_{\mu\nu}$ αλλάζει ως

$$\bar{h}^{\text{νέο}}_{\mu\nu} = \bar{h}^{\text{παλιό}}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} \xi^\alpha_{,\alpha} \quad (1.28)$$

και

$$\bar{h}^{\text{νέο}\mu\nu}_{,\nu} = \bar{h}^{\text{παλιό}\mu\nu}_{,\nu} - \xi^{\mu,\nu}_{,\nu} = \bar{h}^{\text{παλιό}\mu\nu}_{,\nu} - \square \xi^\mu \quad (1.29)$$

Για να είναι το $\bar{h}_{\mu\nu}^{\text{νέο}} = 0$ το ξ^μ προσδιορίζεται από την εξίσωση

$$\square \xi^\mu = \xi^{\mu,\nu} = \bar{h}^{\text{παλαιό}\mu\nu} \quad (1.30)$$

Η εξίσωση (1.30) είναι μία κυματική εξίσωση, μη-ομογενής, η οποία έχει πάντα λύση για κάθε $\bar{h}^{\mu\nu}$. Άρα υπάρχει πάντα κάποιο ξ^μ , για το οποίο θα λαμβάνουμε τη βαθμίδα Lorentz για κάποιο αυθαίρετο $h_{\mu\nu}$. Τέλος όσον αφορά τη βαθμίδα Lorentz αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή δεν είναι πλήρως καθορισμένη, γιατί κάθε μετασχηματισμός $\square \xi^\alpha = 0$ αφήνει ανεπηρέαστη τη συνθήκη βαθμίδας $\bar{h}^{\mu\nu} = 0$. Στην ουσία η βαθμίδα Lorentz αποτελεί μία κλάση βαθμίδων.

Στη βαθμίδα Lorentz, οι εξισώσεις του Einstein (1.20) γράφονται ως

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (1.31)$$

Οι εξισώσεις πεδίου στο κενό, όπου $T_{\mu\nu} = 0$ γίνονται

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.32)$$

Παίρνοντας το ίχνος της (1.32) έχουμε

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \square \bar{h}_{\mu\nu} &= \square (\eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu}) \\ &= \square (h - 2h) = -\square h = 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

λόγω της (1.19). Αν συνδιάσουμε τώρα τις (1.31), (1.32) και (1.19) παίρνουμε

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (1.34)$$

Δείχτηκε έτσι ότι, σε μία βαθμίδα Lorentz, οι διαταραχές του χωροχρόνου μεταδίδονται σε αυτόν σαν κύματα.

1.2 Κυματική Λύση των Εξισώσεων Einstein

Δείχτηκε ότι τα $\bar{h}_{\mu\nu}$ υπακούουν στην κυματική εξίσωση (1.32), σε μία συγκεκριμένη βαθμίδα. Η απλούστερη λύση της εξίσωσης (1.32) είναι ένα επίπεδο κύμα της μορφής

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (1.35)$$

όπου ο $A_{\mu\nu}$ είναι ένας συμμετρικός τανυστής κι εκφράζει το πλάτος του κύματος και k_α ένα τετραδιάνυσμα, τις ιδιότητες του οποίου θα δούμε τώρα.

Η (1.32) γράφεται και ως

$$\eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0 \quad (1.36)$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές την εξίσωση (1.35) και με τη βοήθεια της (1.36) παίρνουμε

$$\eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\mu\nu,\alpha\beta} = -\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \bar{h}_{\mu\nu} \quad (1.37)$$

Για να επαληθεύεται η (1.37) πρέπει

$$\eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta = k^\alpha k_\alpha = 0 \quad (1.38)$$

Δηλαδή, σύμφωνα με την τελευταία σχέση το k_α είναι ένα φωτοειδές διάνυσμα. Εφ' όσον η (1.35) παριστάνει ένα επίπεδο κύμα, το $\bar{h}_{\mu\nu}$ θα λαμβάνει μία σταθερή τιμή στην υπερεπιφάνεια

$$k_\alpha x_\alpha = k_0 t + \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (1.39)$$

Τη συνιστώσα k_0 τη λέμε και συχνότητα κύματος και συμβολίζεται με το ω , κι έτσι το $k_\alpha \rightarrow \{\omega, \vec{k}\}$. Έστω τώρα ένα φωτόνιο που κινείται κατά τη διεύθυνση του φωτοειδούς τετραδιανύσματος k_α , στην καμπύλη

$$x^\mu(\lambda) = k^\mu(\lambda) + l^\mu \quad (1.40)$$

όπου λ παράμετρος και l^μ σταθερό διάνυσμα της αρχικής θέσης του φωτονίου $l = 0$. Από την (1.38)

$$k_\mu x^\mu = k_\mu l^\mu = \text{σταθερό} \quad (1.41)$$

Συγκρίνοντας αυτή τη σχέση με την (1.39) βγαίνει το συμπέρασμα ότι το φωτόνιο κινείται με το βαρυτικό κύμα έχοντας την ίδια φάση. Με άλλα λόγια το κύμα διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός στην διεύθυνση $\vec{k} = \frac{(k_x, k_y, k_z)}{\omega}$. Από τα παραπάνω, εφ' όσον το k_α είναι φωτοειδές,

$$\omega^2 = |\vec{k}|^2 \quad (1.42)$$

Η (1.42) αποτελεί την εξίσωση διασποράς του κύματος, από την οποία προκύπτει ότι η ταχύτητα φάσης και η ταχύτητα ομάδος του κύματος είναι ίσες με 1 [18].

Από τη συνθήκη του Lorentz, $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, προκύπτει για το κύμα (1.35)

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = ik_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow k_\nu A^{\mu\nu} = 0 \quad (1.43)$$

Δηλαδή οι τέσσερις εξισώσεις (1.43) περιορίζουν το $A^{\mu\nu}$ στο να είναι κάθετο στο k_α . Επομένως από τις δέκα ανεξάρτητες συνιστώσες του $A^{\mu\nu}$, μας μένουν μόνο έξι ανεξάρτητες συνιστώσες εξ' αιτίας των συνθηκών (1.43). Όμως δεν έχουμε εξαντλήσει όλα τα περιθώρια της βαθμίδας μας. Υπάρχει η δυνατότητα, όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, να γίνει χρήση ενός αυθαίρετου διανύσματος, λύση της εξίσωσης $\square \xi^\alpha = 0$ χωρίς να επηρεαστεί η βαθμίδα. Έστω η λύση της παραπάνω κυματικής εξίσωσης

$$\xi^\alpha = B^\alpha e^{ik_\mu x^\mu} \quad (1.44)$$

όπου B^α μία σταθερά και k_μ φωτοειδές διάνυσμα. Το ξ^α παράγει μία μεταβολή του $\bar{h}_{\mu\nu}$ που δίνεται από την εξίσωση (1.28), η οποία σε συνεργασία με τις (1.35) και (1.44) δίνει

$$A_{\mu\nu}^{\nu\epsilon 0} = A_{\mu\nu}^{\pi\alpha\lambda\iota\acute{o}} - iB_\mu k_\nu - iB_\nu k_\mu + i\eta_{\mu\nu} B^\alpha k_\alpha \quad (1.45)$$

Επιλέγοντας κατάλληλα το B^α μπορούμε να πάρουμε δύο περιορισμούς ακόμα για το $A_{\alpha\beta}^{\nu\epsilon 0}$

$$(i) \quad A_{\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (1.46)$$

$$(ii) \quad A_{\mu\nu}U^{\nu} = 0 \quad (1.47)$$

όπου U κάποια σταθερά τετραταχύτητα, δηλαδή οποιοδήποτε σταθερό χρονοειδές μοναδιαίο διάνυσμα.

Οι δύο πάνω περιορισμοί αποτελούν τέσσερις επιπλέον εξισώσεις και όχι πέντε όπως φαίνεται εξ' αρχής. Αυτό γιατί μία από τις εξισώσεις της (1.47), η $k^{\mu}(A_{\mu\nu}U^{\nu})$ ικανοποιείται ήδη από την (1.43). Το σύνολο των οχτώ ανεξάρτητων εξισώσεων (1.43), (1.46) και (1.47) αφήνουν τον ταυιστή του πλάτους $A_{\mu\nu}$ με δύο ανεξάρτητες συνιστώσες και ονομάζεται συνθήκες εγκάρσιας -μηδενικού ίχνους βαθμίδας TT (Transverse-Traceless). Αποδεικνύεται εύκολα ότι στη βαθμίδα TT, εξ' αιτίας της (1.46), είναι $\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^{TT}$.

Έστω τώρα ότι μεταφερόμαστε σε ένα σύστημα αναφοράς Lorentz, ώστε το διάνυσμα U που βασίσαμε τη βαθμίδα TT, να είναι το χρονικό διάνυσμα βάσης $U^{\nu} = \delta_0^{\nu} = (1, 0, 0, 0)$. Από την εξίσωση (1.47) προκύπτει ότι $A_{\mu 0} = 0$ για κάθε μ . Μπορούμε να προσανατολίσουμε τους άξονες ώστε το κύμα να διαδίδεται κατά τον άξονα z , δηλαδή το k^{α} να είναι το $(\omega, 0, 0, \omega)$. Τότε από την (1.43) έπεται ότι (και μέσω της 1.47) $A_{\mu z} = 0$ για κάθε μ (Από εδώ βγαίνει η ονομασία «εγκάρσια» για τη βαθμίδα: το $A_{\mu\nu}$ «τέμνει» τη διεύθυνση διάδοσης \vec{e}_z). Από τα παραπάνω οι μόνες μη-μηδενικές συνιστώσες του $A_{\mu\nu}$ είναι οι A_{xx} , A_{yy} και $A_{xy} = A_{yx}$. Από την (1.46) τέλος παίρνουμε ότι $A_{xx} = -A_{yy}$ [18]. Επομένως σε αυτο το ειδικό σύστημα αναφοράς ισχύει

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

Όλη η παραπάνω δουλειά έγινε για επίπεδα κύματα. Μπορεί όμως να δείχτει κάτι αντίστοιχο για αυθαίρετα κύματα, στη γραμμικοποιημένη πάντα θεωρία. Κάθε βαρυτικό κύμα μπορεί, σύμφωνα με την ανάλυση Fourier, να αναλυθεί σε μία υπέρθεση επίπεδων βαρυτικών κυμάτων. Για κάθε επίπεδο κύμα μπορούμε να εισάγουμε τη βαθμίδα TT. Παρατηρούμε ότι οι τρεις συνθήκες της βαθμίδας (1.43), (1.46) και (1.47) είναι γραμμικές ως προς το $h_{\mu\nu}$. Άρα και το αυθαίρετο κύμα θα τις ικανοποιεί. Φτάνουμε έτσι στο θεώρημα: «Διαλέγουμε ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς Lorentz (συγκεκριμένη τετραταχύτητα U^{ν}) της γραμμικοποιημένης θεωρίας. Σε αυτό το σύστημα ($u^{\alpha} = \delta_0^{\alpha}$), εξετάστε ένα συγκεκριμένο βαρυτικό κύμα αυθαίρετης μορφής. Θα μπορείτε πάντα να βρείτε μία βαθμίδα στην οποία το $h_{\mu\nu}$ να ικανοποιεί τις συνθήκες (1.43), (1.46) και (1.47)».

1.3 Σημασία της Βαθμίδας TT

Μέχρι στιγμής η εισαγωγή της βαθμίδας TT φάνηκε λίγο αυθαίρετη, χωρίς ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Όπως θα φανεί όμως παρακάτω, η χρήση της βαθμίδας TT εισάγει κάποια σημαντικά

πλεονεκτήματα στη μελέτη των βαρυτικών κυμάτων. Το πιο σημαντικό αποτέλεσμα που δίνει η βαθμίδα TT είναι ότι οι μόνες μη-μηδενικές συνιστώσες του τανυστή του Riemann είναι οι

$$R_{j0i0} = R_{0j0i} = -R_{j00i} = -R_{0ji0}$$

Εφ'όσον για τη συνιστώσα R_{j0i0} ισχύει

$$R_{j0i0} = -\frac{1}{2}h_{ji,00}^{TT} \quad (1.49)$$

από τη χρήση της βαθμίδας TT βγαίνει το συμπέρασμα ότι, ένα ταξιδεύον βαρυτικό κύμα με περιοδική χρονική συμπεριφορά της μορφής $h_{ji}^{TT} \sim \exp(i\omega t)$ μπορεί να σχετιστεί με μία τοπική ταλάντωση του χωροχρόνου, αφού

$$h_{ji,00}^{TT} \sim -\omega^2 \exp(i\omega t) \sim R_{j0i0} \text{ και } R_{j0i0} = \frac{1}{2}\omega^2 h_{ji}^{TT}$$

Ας δούμε τώρα την επίδραση της διάδοσης των βαρυτικών κυμάτων σε σωματίδια. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ένα ελεύθερο σωματίδιο, σε μία περιοχή του χωροχρόνου όπου αρχικά δεν υπάρχουν βαρυτικά κύματα, που συναντά ένα βαρυτικό κύμα. Διαλέγουμε ένα τοπικό σύστημα Lorentz² στο οποίο αρχικά το σωματίδιο να ηρεμεί και στη συνέχεια επιλέγουμε τη βαθμίδα TT ως προς αυτό το σύστημα. Αυτό σημαίνει πως η τετραταχύτητα της εξίσωσης (1.47) είναι η αρχική τετραταχύτητα του σωματιδίου $U^\alpha = \delta_0^\alpha$. Αφού το σωματίδιο είναι ελεύθερο ικανοποιεί την εξίσωση των γεωδαισιακών

$$\frac{dU^\alpha}{dt} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu = 0 \quad (1.50)$$

Καθώς το σωματίδιο ηρεμεί αρχικά, η αρχική επιτάχυνση του όταν συναντά το κύμα, είναι

$$\left(\frac{dU^\alpha}{dt}\right)_0 = -\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(h_{\beta 0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}) \quad (1.51)$$

Όμως στη βαθμίδα TT που βρισκόμαστε δείχτηκε ότι οι μόνες ανεξάρτητες συνιστώσες \mathbf{A}^{TT} είναι οι $h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT}$ και $h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT}$. Άρα η (1.51) δίνει Γ_{00}^α και επομένως η αρχική επιτάχυνση είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι αμέσως μετά το σωματίδιο θα συνεχίσει να ηρεμεί, αλλά και η επιτάχυνση του θα παραμείνει μηδενική. Άρα το σωματίδιο θα ηρεμεί συνεχώς ανεξάρτητα από το κύμα. Παρ' όλα αυτά η ηρεμία αυτή δε σημαίνει ότι το σωματίδιο δε κινείται καθόλου. Απλώς το σωματίδιο παραμένει σε μία θέση έχοντας σταθερές συντεταγμένες. Ανακαλύφθηκε προς το

²Ένα τοπικό σύστημα Lorentz είναι ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο η μετρική παίρνει τη μορφή

$$g_{\alpha\beta} \equiv \hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$$

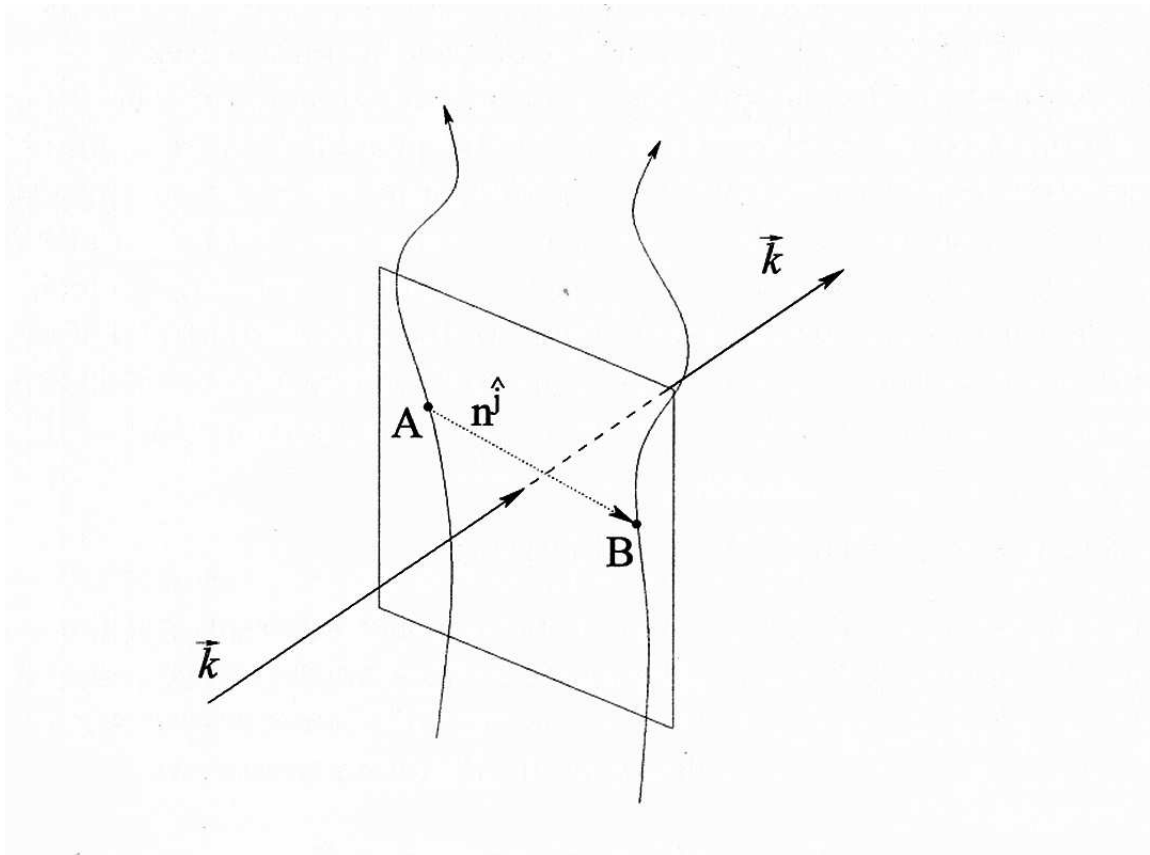
στο γεγονός P που αποτελεί την αρχή του συστήματος. Επίσης για τη μετρική ισχύει

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = 0 \Rightarrow \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0 \text{ στο } P$$

παρόν ότι η επιλογή της βαθμίδας TT—δηλαδή η ειδική προσαρμογή στις «παραμορφώσεις» των συντεταγμένων μας—οδηγεί στην εύρεση ενός συστήματος συντεταγμένων, το οποίο παραμένει συνδεδεμένο με το σωματίδιο. Έτσι το συγκεκριμένο σύστημα Lorentz δεν είναι τέτοιο σύστημα μόνο σε ένα γεγονός της γεωδαισιακής κοσμικής γραμμής του σωματιδίου, αλλά σε όλη την κοσμική γραμμή του σωματιδίου. Σε αυτό το σύστημα των συντεταγμένων είναι

$$ds^2 = -d\tau^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j + \mathcal{O}(|x^i|^2)dx^\alpha dx^\beta \quad (1.52)$$

Έστω ένα δεύτερο σωματίδιο B^i στη γειτονιά του αρχικού μας σωματιδίου (το οποίο θα ονο-



Σχήμα 1.1: Αναπαράσταση της μεταβολής του διανύσματος σύνδεσης η^j μεταξύ δύο σωματιδίων, που βρίσκονται πάνω σε γεωδαισιακές τροχιές, που προκαλείται από την έλευση του βαρυτικού κύματος.

μαστεί A). Θεωρούμε επίσης ότι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων μας ταυτίζεται με το αρχικό μας σωματίδιο A . Η άφιξη του βαρυτικού κύματος θα διαταράξει τη γεωδαισιακή κίνηση των δύο σωματιδίων, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1 (Η εικόνα είναι από την εργασία [16], σελίδα 7) και θα δώσει μία μη-μηδενική συνεισφορά στην εξίσωση της γεωδαισιακής απόκλισης:

$$U^\gamma U^\beta \eta_{;\beta\gamma}^\alpha = -R_{\beta\gamma\delta}^\alpha U^\beta \eta^\gamma U^\delta \quad (1.53)$$

ή ισοδύναμα

$$U^\gamma U^\beta \left(\frac{D^2 \eta^\alpha}{D\tau^2} \right) \equiv U^\gamma U^\beta \left(\frac{d^2 \eta^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{d\eta^\alpha}{d\tau} \frac{d\eta^\beta}{d\tau} \right) = -R_{\beta\gamma\delta}^\alpha U^\beta \eta^\gamma U^\delta \quad (1.54)$$

όπου η^α είναι το τετραδιάνυσμα σύνδεσης των δύο σωματιδίων, $\frac{D}{D\tau}$ η ολική παράγωγος και τ ο ιδιο-χρόνος. Εφ' όσον το σωματίδιο A βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων οι χωρικές συνιστώσες του η^α είναι $\eta^j \equiv x_B^j - x_A^j = x_B^j$ και η εξίσωση (1.54) γίνεται

$$\frac{D^2 x_B^j}{D\tau^2} = -R_{0i0}^j x_B^i = -R_{j0i0} x_B^i \quad (1.55)$$

Αφού είμαστε σε ένα σύστημα Lorentz κοντά στη γειτονιά του σωματιδίου A τα σύμβολα Christoffel εξαφανίζονται, όπως και οι παράγωγοι τους $\frac{d\Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{d\tau}$ και η συναλλοίωτη παράγωγος γίνεται η συνήθης παράγωγος. Έτσι η (1.55) γίνεται

$$\frac{d^2 x_B^j}{d\tau^2} = -R_{j0i0} x_B^i \quad (1.56)$$

Όπως αναφέραμε το σύστημα που διαλέξαμε ταξιδεύει μαζί με το σωματίδιο κι επομένως ο ιδιο-χρόνος ταυτίζεται με το συντεταγμένο χρόνο t . Επίσης στη βαθμίδα TT ισχύει, όπως δείχτηκε νωρίτερα, ότι $R_{j0i0}^{TT} = R_{j0i0}$ και η (1.56) γίνεται τελικά

$$\frac{d^2 x_B^j}{d\tau^2} = -R_{j0i0}^{TT} x_B^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{ji}^{TT}}{\partial t^2} x_B^i \right) \quad (1.57)$$

Με αρχική συνθήκη να βρίσκονται τα δύο σωματίδια σε ηρεμία μεταξύ τους πριν την έλευση του κύματος ($x_B^i = x_B^i(0)$), ολοκληρώνοντας την (1.57) παίρνουμε τη λύση

$$x_B^i(t) = x_B^i(0) [\delta_{ij} + \frac{1}{2} h_{ji}^{TT}] \text{ στη θέση του A} \quad (1.58)$$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει τις ταλαντώσεις που εκτελεί το σωματίδιο B, όπως τις βλέπει το σωματίδιο A καθώς περνά το κύμα. Από την εξίσωση αυτή φαίνεται ότι η ιδιάποσταση, που είναι ανάλογη του η^j και είναι μέγεθος ανεξάρτητο του συστήματος συντεταγμένων, μεταβάλλεται χρονικά, ενώ η συντεταγμένη απόσταση, μέγεθος εξαρτώμενο από το σύστημα, παραμένει σταθερή.

Αν έχουμε ένα επίπεδο κύμα και το τετραδιάνυσμα σύνδεσης είναι παράλληλο στο τετραδιάνυσμα διάδοσης k_α τότε δεν έχουμε ταλάντωση αφού

$$h_{ji}^{TT} x_B^i(0) \sim h_{ji}^{TT} k_i = 0$$

Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι μόνο όταν το διάνυσμα σύνδεσης είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης ταλαντώνεται. Το κύμα είναι εγκάρσιο όχι μόνο στη μαθηματική περιγραφή του, αλλά και στα φυσικά του αποτελέσματα.

1.4 Πόλωση των Βαρυτικών Κυμάτων

Για την εξαγωγή των παρακάτω σχέσεων ακολουθούμε τον d' Inverno [11]. Έστω ένα επίπεδο βαρυτικό κύμα, που διαδίδεται κατά τον άξονα z και η συνιστώσα του $h_{xy} = h_{yx} = 0$. Τότε οι μόνες μη-μηδενικές συνιστώσες του, στη βαθμίδα TT, είναι

$$h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT} = A_+ e^{-i\omega(t-z)} \quad (1.59)$$

Το κύμα παραμορφώνει το χώρο από τη γραμμική μορφή του και το γραμμικό στοιχείο γίνεται

$$ds^2 = dt^2 - [1 - h_{xx}^{TT}(t-z)]dx^2 - [1 + h_{xx}^{TT}(t-z)]dy^2 - dz^2 \quad (1.60)$$

Έστω ότι το h_{xx} είναι μία συνάρτηση ταλαντούμενης μορφής που παίρνει τιμές θετικές $h_{xx} > 0$ και αρνητικές $h_{xx} < 0$. Έστω τώρα δύο σωματίδια στο επίπεδο x - y με συντεταγμένες (x_0, y_0) και $(x_0 + dx, y_0)$. Από την (1.60) παίρνουμε την ιδιάπσταση τους

$$ds^2 = -(1 + h_{xx})dx^2 \quad (1.61)$$

Από την (1.61) όταν το h_{xx} από μηδέν και θετικές $h_{xx} > 0$ τα σωματίδια πλησιάζουν μεταξύ τους, ενώ όταν παίρνει αρνητικές τιμές αυτά απομακρύνονται. Το αντίθετο συμβαίνει αν θεωρήσουμε ελεύθερα σωματίδια στις θέσεις (x_0, y_0) και $(x_0, y_0) + dy$ στο επίπεδο x - y , αφού τώρα η ιδιάπσταση τους είναι

$$ds^2 = -(1 + h_{xx})dy^2 \quad (1.62)$$

Έτσι αν έχουμε ένα δαχτυλίδι σωματιδίων στο επίπεδο x - y με ένα σωματίδιο στο κέντρο του, η έλευση του βαρυτικού κύματος θα διαταράξει το δαχτυλίδι σε μία ταλαντούμενη έλλειψη, ο μεγάλος ημιάξονας της οποίας είναι παράλληλος διαδοχικά στους άξονες x και y . Αναφερόμαστε στην κατάσταση αυτή ως πόλωση +(cross) του βαρυτικού κύματος.

Έστω τώρα ότι οι μόνες μη-μηδενικές συνιστώσες του βαρυτικού κύματος είναι οι:

$$h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT} = A_+ e^{-i\omega(t-z)} \quad (1.63)$$

και το γραμμικό στοιχείο

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2h_{xy}(t-z)dxdy \quad (1.64)$$

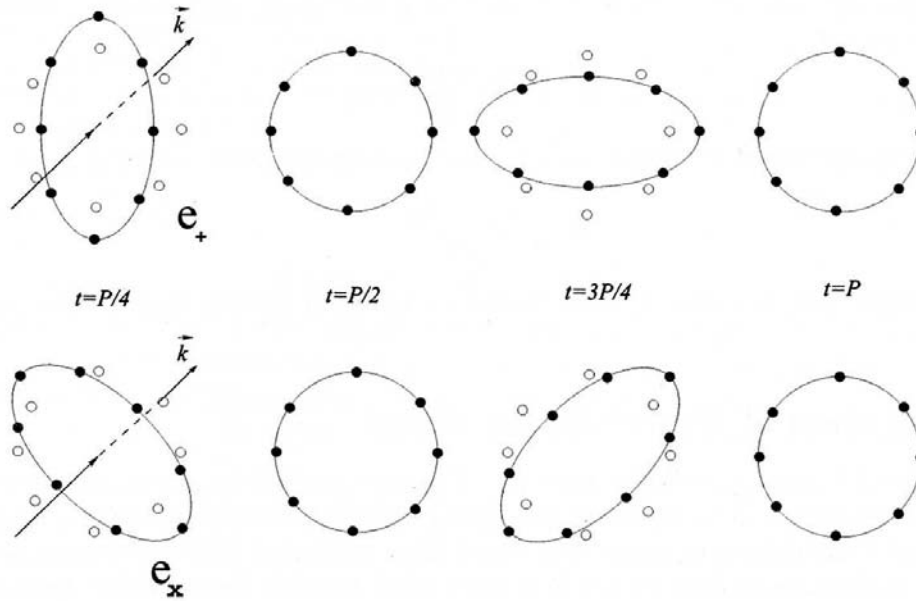
Αν στρέψουμε τους άξονες κατά 45° σύμφωνα με τις σχέσεις μετασχηματισμού για στροφές

$$x \rightarrow \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \text{ και } y \rightarrow \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \quad (1.65)$$

το γραμμικό στοιχείο στις νέες συντεταγμένες (t, \bar{x}, \bar{y}, z) γίνεται

$$ds^2 = dt^2 - [1 - h_{xy}^{TT}(t-z)]d\bar{x}^2 - [1 + h_{xy}^{TT}(t-z)]d\bar{y}^2 - dz^2 \quad (1.66)$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση αυτή με την (1.60) παρατηρούμε ότι το h_{xy} -κύμα προκαλεί το ίδιο αποτέλεσμα με το h_{xx} -κύμα, μόνο που οι άξονες της έλλειψης είναι στραμμένοι κατά 45° . Την κατάσταση αυτή την ονομάζουμε \times πόλωση του κύματος. Οι δύο καταστάσεις γραμμικής πόλωσης



Σχήμα 1.2: Αναπαράσταση της παραμόρφωσης ενός δαχτυλιδιού σωματιδίων κατά την έλευση ενός βαρυτικού κύματος + και x κατάστασης πόλωσης αντίστοιχα.

φαίνονται στο σχήμα 1.2(Η εικόνα είναι από την εργασία [16], σελίδα 8). Στον ηλεκτρομαγνητισμό τα μοναδιαία διανύσματα γραμμικής πόλωσης είναι \hat{e}_x και \hat{e}_y . Στη Σχετικότητα, οι μοναδιαίοι ταυιστές γραμμικής πόλωσης είναι

$$\begin{aligned} e_+ &\equiv e_x \otimes e_x - e_y \otimes e_y \\ e_x &\equiv e_x \otimes e_y + e_y \otimes e_x \end{aligned} \quad (1.67)$$

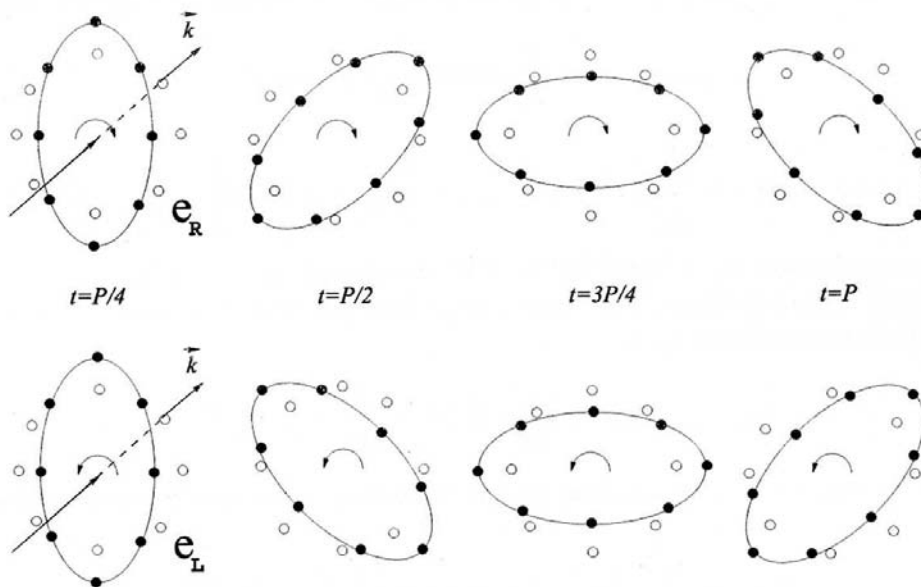
Κάθε κύμα είναι μία υπέρθεση των δύο παραπάνω καταστάσεων πόλωσης. Αξίζει να τονιστεί ότι οι δύο καταστάσεις πόλωσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι κάθετες, ενώ των βαρυτικών κυμάτων όπως είδαμε σχηματίζουν γωνία 45° . Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η βαρύτητα αντιπροσωπεύεται από ένα συμμετρικό ταυιστή δευτέρας τάξεως $h_{\mu\nu}$, ενώ ο ηλεκτρομαγνητισμός από το διανυσματικό δυναμικό A^μ [18].

Όπως και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα έτσι και τα βαρυτικά μπορεί να είναι και κυκλικά πολωμένα σε δύο καταστάσεις. Στην περίπτωση αυτή οι μοναδιαίοι ταυιστές κυκλικής πόλωσης είναι

$$\begin{aligned} e_R &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ + ie_x) \\ e_L &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ - ie_x) \end{aligned} \quad (1.68)$$

Ένα σωματίδιο που πάνω του πέφτει σε ένα βαρυτικό κύμα κυκλικής πόλωσης e_R κινείται κυκλικά με δεξιόστροφη φορά (όπως οι άξονες του ρολογιού, για κύμα που κινείται προς τον αναγνώστη).

Σε περίπτωση που το συναντήσει κύμα κυκλικής πόλωσης e_L περιστρέφεται αριστερόστροφα. Αντίστοιχα ένα βαρυτικό κύμα πόλωσης e_R θα αναγκάζει έναν δακτύλιο σωμάτων να περιστρέφεται δεξιόστροφα, ενώ ένα κύμα κατάστασης πόλωσης e_L αριστερόστροφα. Στο σχήμα 1.4 (Η εικόνα είναι από την εργασία [12], σελίδα 953) φαίνονται όλες οι καταστάσεις πόλωσης.

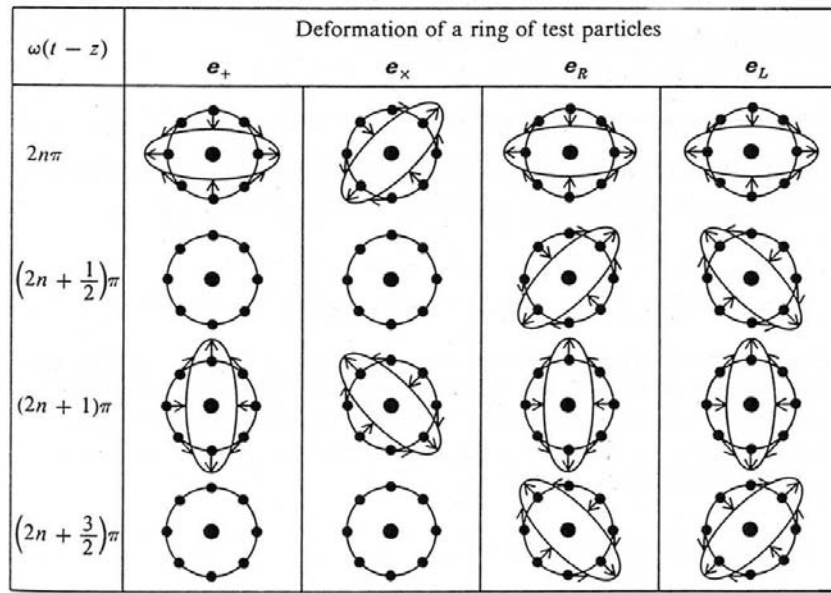


Σχήμα 1.3: Αναπαράσταση της παραμόρφωσης δακτυλίου σωματιδίων κατά την έλευση μέσα από αυτό ενός βαρυτικού κύματος κυκλικής κατάστασης πόλωσης R και L αντίστοιχα για την πάνω και κάτω παράσταση.

Από το σχήμα 1.3 (Η εικόνα είναι από την εργασία [16], σελίδα 10) παρατηρούμε ότι, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, το βαρυτικό κύμα μένει αναλλοίωτο ύστερα από μία περιστροφή 180° γύρω από τη διεύθυνση διάδοσης του. Η αντίστοιχη γωνία για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι 360° και για τα κύματα νετρίνων 720° . Η συμπεριφορά αυτή σχετίζεται με την κατάσταση spin σωματιδίων μηδενικής μάζας της κβαντομηχανικής περιγραφής των κυμάτων αυτών: τα γκραβιτόνια (gravitons) έχουν spin 2, τα φωτόνια spin 1 και τα νετρίνα spin $\frac{1}{2}$. Το κλασικό πεδίο ακτινοβολίας ενός σωματιδίου με spin s μένει αναλλοίωτο κάτω από περιστροφές $\frac{360^\circ}{s}$ γύρω από τη διεύθυνση διάδοσης τους [12].

1.5 Παραγωγή των Βαρυτικών Κυμάτων

Στα προηγούμενα μελετήθηκε η διάδοση των βαρυτικών κυμάτων στο κενό, που περιγράφεται από την κυματική εξίσωση (1.32), καθώς και την επίδραση τους σε ελεύθερα σωματίδια στο χωροχρόνο. Σημαντικό θέμα όμως στην έρευνα των βαρυτικών κυμάτων αποτελεί και η μελέτη της παραγωγής τους από διάφορες πηγές.



Σχήμα 1.4: Αναπαράσταση όλων των καταστάσεων γραμμικής και κυκλικής πόλωσης για διάφορες τιμές της φάσης του βαρυτικού κύματος.

Η παραγωγή των βαρυτικών κυμάτων δίνεται από τη λύση της εξίσωσης:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} \tag{1.69}$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι κάπως περίπλοκη. Για το λόγο αυτό θα ακολουθήσουμε τους Misner et al [12] σε έναν απλούστερο τρόπο, ο οποίος μπορεί να μη δίνει ακριβείς λύσεις, αλλά μας δίνει μία πολύ καλή εκτίμηση της τάξης των διαφόρων μεγεθών που περιγράφουν την παραγωγή κι εκπομπή των βαρυτικών κυμάτων. Οι «εκτιμήσεις» αυτές προκύπτουν από τις παρατηρούμενες αναλογίες της Σχετικότητας με την ηλεκτρομαγνητική θεωρία και βασίζονται σε μία Νευτώνεια προσέγγιση της βαρύτητας.

Στην κλασική ηλεκτροδυναμική θεωρία, η ενέργεια που εκπέμπεται στη μονάδα του χρόνου (φωτεινότητα), L , από ένα ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο d , δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} L_{\text{ηλεκτρικού διπόλου}} &= \frac{\text{(εκπεμπόμενη ενέργεια)}}{\text{(μονάδα χρόνου)}} \\ &= \frac{2}{3}q^2a^2 = \frac{2}{3}\dot{d}^2 \end{aligned} \tag{1.70}$$

όπου

$$\vec{d} = q\vec{x} \text{ και } \ddot{\vec{d}} = q\ddot{\vec{x}} = q\vec{a} \tag{1.71}$$

με q το ηλεκτρικό φορτίο και την τελεία να υποδηλώνει την ολική χρονική παράγωγο.

Το βαρυτικό ανάλογο ενός συστήματος N σωματιδίων μάζας $m_A (A = 1, 2, 3, \dots, N)$ του

ηλεκτρικού διπόλου είναι η διπολική ροπή μάζας:

$$\vec{d} \equiv \sum_{A=1}^N (m_A \vec{x}_A) \quad (1.72)$$

Η πρώτη παράγωγος της ως προς το χρόνο είναι η ολική ορμή του συστήματος:

$$\dot{\vec{d}} \equiv \sum_{A=1}^N (m_A \dot{\vec{x}}_A) = \vec{p} \quad (1.73)$$

Εξ' αιτίας όμως της αρχής διατήρησης της ορμής ενός συστήματος η δεύτερη παράγωγος ως προς το χρόνο μηδενίζεται, $\ddot{\vec{d}} = \dot{\vec{p}} = 0$. Έτσι δεν μπορεί να υπάρξει βαρυτική ακτινοβολία διπόλου.

Το επόμενο είδος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας είναι το μαγνητικό δίπολο και το ηλεκτρικό τετράπολο. Η ακτινοβολία μαγνητικού διπόλου παράγεται από τη δεύτερη χρονική παράγωγο της μαγνητικής ροπής, $\ddot{\vec{\mu}}$. Όμως κι εδώ το βαρυτικό ανάλογο είναι μία σταθερά της κίνησης η στροφορμή

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \sum_{A=1}^N (\text{θέση του } A) \times (\text{ρεύμα εξ' αιτίας του } A) \\ &= \sum_{A=1}^N \vec{r}_A \times (m \vec{u}_A) = \vec{J} \end{aligned} \quad (1.74)$$

της οποίας η χρονική παράγωγος μηδενίζεται. Επομένως ούτε ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να ακτινοβολεί. Δεν υπάρχει βαρυτική διπολική ακτινοβολία καμίας μορφής.

Το πρώτο μη-μηδενικό αποτέλεσμα το βρίσκουμε στην ακτινοβολία τετραπολικής ροπής. Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία δίνει:

$$L_{\text{ηλεκτρικού τετραπόλου}} = \frac{1}{20} \frac{d\ddot{Q}^2}{dt} \equiv \frac{1}{20} \frac{d\ddot{Q}_{jk}}{dt} \frac{d\ddot{Q}_{jk}}{dt} \quad (1.75)$$

όπου

$$Q_{jk} \equiv \sum_{A=1}^N e_A (x_{Aj} x_{Ak} - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2) \quad (1.76)$$

Το βαρυτικό ανάλογο είναι

$$L_{\text{τετραπόλου μάζας}} = \frac{1}{5} \left\langle \frac{d^3 I^2}{dt^3} \right\rangle \equiv \frac{1}{5} \left\langle \frac{d^3 \mathcal{I}_{jk}}{dt^3} \frac{d^3 \mathcal{I}_{jk}}{dt^3} \right\rangle \quad (1.77)$$

και

$$\mathcal{I}_{jk} \equiv \sum_{A=1}^N m_A (x_{Aj} x_{Ak} - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2) = \int \varrho (x_j x_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2) d^3 x \quad (1.78)$$

Ο τύπος (1.76) περιέχει το σωστό παράγοντα $\frac{1}{5}$, ο οποίος προέρχεται από την ταυσιτική ανάλυση, αντί του λάθους όρου $\frac{1}{20}$ της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Το δεξί μέλος της (1.77) περιέχει το μέσο όρο (« $\langle \quad \rangle$ ») ύστερα από μερικές περιόδους της πηγής, σύμφωνα και με τη μη-δυνατότητα των παρατηρητών να εντοπίσουν την ενέργεια της βαρυτικής ακτινοβολίας σε ένα μήκος κύματος.

Ο όρος \mathcal{I}_{jk} ονομάζεται μηδενικού ίχνους τετραπολική ροπή κι ένας απλός υπολογισμός της τρίτης χρονικής της παραγωγού δίνει

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3} \mathcal{I}_{jk} &\sim \frac{(\text{μάζα κινούμενου συστήματος})(\text{μέγεθος συστήματος})^2}{(\text{χρόνος})^3} \\ &\sim \frac{MR^2}{T^3} \sim \frac{Mu^2}{T} \end{aligned} \quad (1.79)$$

έτσι ώστε:

$$L_{\text{τετραπόλου μάζας}} \sim \frac{G}{c^5} \frac{Mu^2}{T} \quad (1.80)$$

Αν και οι τύποι (1.79) και (1.80) είναι αρκετά απλοποιημένοι περιέχουν τις δύο πιο σημαντικές πληροφορίες για την παραγωγή των βαρυτικών κυμάτων. Η πρώτη είναι ότι η ενέργεια που εκπέμπεται με την βαρυτικά κύματα ελλατώνεται σημαντικά λόγω του όρου $\frac{G}{c^5} \sim 10^{-59}$, ή να το θέσουμε αλλιώς, μετατροπή οποιασδήποτε μορφής ενέργειας σε βαρυτικά κύματα, είναι γενικώς, μη εφικτή. Η δεύτερη πληροφορία είναι η χρονική μεταβολή του τετραπόλου μάζας, η οποία μπορεί να γίνει σημαντική μόνο για πολύ μεγάλες μάζες κινούμενες με σχετικιστικές ταχύτητες. Από τα παραπάνω γίνεται εμφανές ότι, οι συνθήκες αυτές δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν σε γήινα εργαστήρια, αλλά συναντώνται συχνά σε αστροφυσικά συμπαγή αντικείμενα, που αποτελούν τις πιο υποσχόμενες πηγές βαρυτικών κυμάτων.

Κεφάλαιο 2

Διαταραχές του χωροχρόνου Schwarzschild και βαρυτικά κύματα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε μία εισαγωγή στη θεωρία των βαρυτικών κυμάτων και τη διάδοσή τους στον επίπεδο χωροχρόνο. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθούν οι διαταραχές που προκαλούνται σε μία μελανή και πιο συγκεκριμένα σε μία μη περιστρεφόμενη μελανή οπή, ακολουθώντας τους Regge και Wheeler [1]. Ένα τέτοιο αντικείμενο ονομάζεται μελανή οπή Schwarzschild και αποτελεί μία στατική λύση των εξισώσεων πεδίου του Einstein σε ένα σφαιρικά συμμετρικό και κενό χωροχρόνο. Ένα βασικό θεώρημα που ισχύει για τη λύση Schwarzschild είναι το θεώρημα του Birkhoff, σύμφωνα με το οποίο η λύση Schwarzschild είναι η μοναδική σφαιρικά συμμετρική στατική, ασυμπτωτικά επίπεδη λύση των εξισώσεων Einstein για το κενό.

Η έρευνα πάνω στις των διαταραχές των μελανών οπών είναι αρκετά σημαντική και ενδιαφέρουσα και αποτελεί έναν ταχέως αναπτυσσόμενο κλάδο της θεωρητικής και υπολογιστικής αστροφυσικής. Ο λόγος που κάνει αυτή την έρευνα τόσο σημαντική είναι το γεγονός ότι η παρουσία των διαταραχών μπορεί να «σπάσει» τις στατικές ιδιότητες του χωροχρόνου μίας μελανής οπής, καθιστώντας την πηγή βαρυτικών κυμάτων. Επίσης τα εκπεμπόμενα βαρυτικά κύματα από μία μελανή οπή μεταφέρουν πληροφορίες για διάφορες ιδιότητες της, όπως η μάζα, η στροφορμή και το φορτίο της. Τέλος μελετώντας τις αντιδράσεις μίας μελανής οπής σε διαταραχές στην περιοχή της, μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για τη ευστάθεια αυτών των αντικειμένων (το ότι αποτελούν λύση των εξισώσεων του Einstein είναι μία ικανοποιητική συνθήκη ευστάθειας).

2.1 Γραμμικές Διαταραχές του Χωροχρόνου Schwarzschild

Το σημείο εκκίνησης της ανάλυσης των διαταραχών μελανών οπών είναι η αδιατάραχτη λύση των μελανών οπών Schwarzschild με γραμμικό στοιχείο, που καθορίζει τη μετρική του Schwarzschild, και δίνεται από τη σχέση:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.1)$$

όπου $g_{\mu\nu}$ ο μετρικός τανυστής (μετρική Schwarzschild) του στατικού αδιατάραχτου χωροχρόνου και M είναι η μάζα της μελανής οπής εκφρασμένης σε γεωμετρικοποιημένες μονάδες μήκους, $M = \frac{Gm}{c^2}$, όπου m είναι η μάζα σε κιλά. Η συνταταγμένη r έχει μία γεωμετρική ερμηνεία που προκύπτει από τη σφαιρική συμμετρία. Δεν είναι η απόσταση από κάποιο «κέντρο». Απλά σχετίζεται με την επιφάνεια A μίας σφαίρας καθορισμένου r και t με τη σχέση

$$r = \left(\frac{A}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Το $d\Omega$ είναι η στοιχειώδης στερεά γωνία που δίνεται από τη σχέση

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

Επειδή ο χωροχρόνος είναι κενός, οι εξισώσεις του Einstein γίνονται πιο συμπαγείς και παίρνουν τη μορφή

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.2)$$

όπου $R_{\mu\nu}$ ο τανυστής του Ricci κατασκευασμένος από τη μετρική $g_{\mu\nu}$. Αν εισαχθούν μικρές διαταραχές $h_{\mu\nu}$, η τελική μετρική που προκύπτει είναι

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

όπου η συνθήκη να είναι οι διαταραχές μικρές σημαίνει πως

$$\left| \frac{h_{\mu\nu}}{g_{\mu\nu}} \right| \ll 1 \quad (2.4)$$

Ο τανυστής του Ricci $R'_{\mu\nu}$ για το διαταραγμένο χωροχρόνο θα δίνεται από τη σχέση

$$R'_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.5)$$

όπως και στη σχέση (2.2), αφού ο διαταραγμένος χωροχρόνος δεν περιέχει ύλη ή ενέργεια.

Ο όρος $\delta R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu}(h_{\mu\nu})$, που αποτελεί τον όρο της διαταραχής στον τανυστή του Ricci, δίνεται από τη σχέση

$$\delta R_{\mu\nu} = -\delta\Gamma_{\mu\nu;\beta}^{\beta} + \delta\Gamma_{\mu\beta;\nu}^{\beta} \quad (2.6)$$

όπου τα διαταραγμένα σύμβολα Christoffel ορίζονται ως

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(h_{\mu\alpha,\nu} + h_{\nu\alpha,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha}) \quad (2.7)$$

Συνδιάζοντας τις εξισώσεις (2.2) και (2.5) παίρνουμε την εξίσωση

$$\delta R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.8)$$

Συνδιάζοντας τώρα την (2.8) με τις (2.6) και (2.7) παίρνουμε μία διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς $h_{\mu\nu}$ (ουσιαστικά έχουμε 10 εξισώσεις). Αυτή η εξίσωση αποτελεί γενίκευση σε ένα καμπύλο χωροχρόνο της εξίσωσης του Schrödinger για σωματίδιο μηδενικής μάζας και spin 2 σε ένα επίπεδο χώρο. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.8) θα προσπαθήσουμε να βρούμε τις διαταραχές της μετρικής, $h_{\mu\nu}$.

2.2 Ανάλυση σε Σφαιρικές Αρμονικές

Όπως και η λύση της εξίσωσης Schrödinger μπορεί να χωριστεί σε ένα γινόμενο συναρτήσεων μίας μεταβλητής, για κάθε μεταβλητή, το ίδιο μπορεί να γίνει και με τη λύση $h_{\mu\nu}$ της εξίσωσης (2.8), όπου τα $h_{\mu\nu}$ είναι συναρτήσεων των μεταβλητών t, r, θ, ϕ . Αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί από το γεγονός ότι η αδιατάρακτη πολλαπλότητα \mathcal{M} είναι χωρικά σφαιρικά συμμετρική, με αποτέλεσμα να μπορεί να γραφεί ως γινόμενο $\mathcal{M} = \mathbf{M}^2 \times \mathbf{S}^2$, όπου \mathbf{M}^2 είναι η δισδιάστατη πολλαπλότητα Lorentz των συντεταγμένων (t, r) και \mathbf{S}^2 είναι η επιφάνεια σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας και συντεταγμένων (θ, ϕ) . Ως αποτέλεσμα αυτού του διαχωρισμού, οι διαταραχές $h_{\mu\nu}$ μπορούν να χωριστούν σε ένα κομμάτι που περιορίζεται στο \mathbf{M}^2 κι ένα κομμάτι περιορισμένο στη σφαίρα \mathbf{S}^2 , της οποίας η μετρική είναι $\gamma_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{r^2} = \text{diag}(1, \sin^2 \theta)$ και όπου τα μ, ν παίρνουν για τιμές τις μεταβλητές θ και ϕ . Δηλαδή οι διαταραχές $h_{\mu\nu}$ θα χωριστούν σε ένα κομμάτι που εξαρτάται μόνο από τα t και r κι ένα γωνιακό κομμάτι που εξαρτάται από τα θ και ϕ . Είναι γνωστό από τη θεωρία των ορθογωνίων συναρτήσεων πως κάθε συνάρτηση των θ και ϕ μπορεί να αναλυθεί σε ένα άθροισμα σφαιρικών αρμονικών. Μία τέτοια ανάλυση διευκολύνει τη λύση του προβλήματος, αφού πλέον οι ιδιότητες του γωνιακού μέρους του $h_{\mu\nu}$ θα είναι γνωστές.

Εφαρμόζοντας μία περιστροφή του συστήματος αναφοράς μας γύρω από την αρχή του, οι δέκα συνιστώσες του διαταραγμένου τανυστή $h_{\mu\nu}$ μετασχηματίζονται ως 3 βαθμωτά ($h_{00}; h_{01}; h_{11}$), 2 διανύσματα ($h_{02}, h_{03}; h_{12}, h_{13}$) κι ένας τανυστής δευτέρας τάξης ($h_{22}, h_{23}, h_{32}, h_{33}$), όταν θεωρηθούν συναλλοίωτες ποσότητες στη σφαίρα. Μία βαθμωτή συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε σφαιρικές αρμονικές ως εξής:

$$\phi_l^m = \text{σταθερά} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.9)$$

Ο παραπάνω όρος ανήκει σε κύμα με parity $(-1)^l$ και στροφορμής l , με συνιστώσα στον άξονα z , m . Στη (2.9) εννοείται άθροισμα ως προς l και m , το σύμβολο όμως της άθροισης παραλύπεται για λόγους συντομογραφίας.

Τα διανύσματα, όπως και οι τανυστές, μπορούν να έχουν δύο καταστάσεις parity, ανάλογα με το πως συμπεριφέρονται σε μετασχηματισμούς της parity όπου $(\theta, \phi) \rightarrow (\pi - \theta, \pi + \phi)$. Όσα μετασχηματίζονται ως $(-1)^{l+1}$ ονομάζονται περιττά(odd) ή ακτινικά(radial), ενώ όσα μετασχηματίζονται ως $(-1)^l$ ονομάζονται άρτια(even) ή πολικά(polar). Έτσι ανάλογα με την parity του, ένα διάνυσμα αναλύεται σε σφαιρικές αρμονικές ως εξής:

$$\begin{aligned} \psi_{l,\mu}^m &= \text{σταθερά} \frac{\partial}{\partial x^\mu} Y_l^m(\theta, \phi) \quad , \text{parity } (-1)^l \\ \phi_{l,\mu}^m &= \text{σταθερά} \epsilon_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} Y_l^m(\theta, \phi) \quad , \text{parity } (-1)^{l+1} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Οι δείκτες μ, ν παίρνουν τις τιμές 2, 3, όπου $x^2 = \theta, x^3 = \phi$. Οι ποσότητες ϵ_μ^ν δίνονται από τις σχέσεις $\epsilon_\theta^\theta = \epsilon_\phi^\phi = 0; \quad \epsilon_\theta^\phi = -\frac{1}{\sin \theta}, \epsilon_{\phi\theta}^\theta = \sin \theta$. Και τα δύο είδη των διανυσμάτων έχουν στροφορμή l . Ανάλογα ισχύουν και για τους τανυστές

$$\psi_{l\mu\nu}^m = \text{σταθερά} Y_{l;\mu\nu}^m \quad , \text{parity } (-1)^l \quad (2.11)$$

$$\phi_{l\mu\nu}^m = \text{σταθερά} \gamma_{\mu\nu} Y_l^m \quad , \text{parity } (-1)^l \quad (2.12)$$

$$\chi_{l\mu\nu}^m = \frac{\text{σταθερά}}{2} [\epsilon_\mu^\lambda \psi_{l\lambda\nu}^m + \epsilon_\nu^\lambda \psi_{l\lambda\mu}^m] \quad , \text{parity } (-1)^{l+1} \quad (2.13)$$

Να σημειώσουμε ότι ένας ταυστής με parity $(-1)^l$ είναι το άθροισμα των (2.10) και (2.11). Καθένας από αυτούς τους όρους μπορεί να πολλαπλασιαστεί με μια αυθαίρετη συνάρτηση των (t, r) , χωρίς να αλλάξουν οι ιδιότητες του κάτω από περιστροφές.

Έτσι για μία γενική διαταραχή δοσμένης στροφορμής l, m και parity $(-1)^{l+1}$ έχουμε

$$h_{00} = h_{01} = h_{11} = 0 \quad (2.14)$$

$$h_{02} = \epsilon_2^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} Y_l^m = \epsilon_2^2 \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m + \epsilon_2^3 \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} h_{22} &= \frac{1}{2} [\epsilon_2^\lambda \psi_{l\lambda 2}^m + \epsilon_2^\lambda \psi_{l\lambda 2}^m] = \epsilon_2^\lambda Y_{l;\lambda 2}^m \\ &= \epsilon_2^3 Y_{l;32}^m = -\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \theta \partial \phi} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

όπου θεωρήσαμε τη σταθερά ίση με μονάδα. Ομοίως υπολογίζονται και οι υπόλοιπες συνιστώσες. Έτσι η γενική διαταραχή \mathbf{h} γίνεται

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_0(t, r) \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m \frac{1}{\sin \theta} & h_0(t, r) \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m \\ 0 & 0 & -h_1(t, r) \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m \frac{1}{\sin \theta} & h_1(t, r) \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m \\ * & * & h_2(t, r) \left(\frac{\partial^2}{\sin \theta \partial \theta \partial \phi} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_l^m & * \\ * & * & \frac{1}{2} h_2(t, r) \left(\frac{\partial^2}{\sin \theta \partial \theta \partial \phi} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) Y_l^m & -h_2(t, r) \left(\sin \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_l^m \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Οι στήλες και οι γραμμές αριθμούνται με τη σειρά $0, 1, 2, 3(t, r, \theta, \phi)$. Το σύμβολο $*$ δείχνει ότι αυτές οι συνιστώσες του ταυστή \mathbf{h} βρίσκονται από το γεγονός ότι ο ταυστής είναι συμμετρικός, $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$.

Οι όροι άρτιας parity μας δίνουν τις άρτιες διαταραχές:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{2M}{r}) H_0 Y_l^m & H_1 Y_l^m & h_0 \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m & h_0 \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m \\ * & (1 - \frac{2M}{r})^{-1} H_2 Y_l^m & h_1 \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m & h_1 \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m \\ * & * & r^2 [K + G \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi}] Y_l^m & * \\ * & * & r^2 G \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} - \cos \theta \frac{\partial}{\sin \theta \partial \phi} \right) Y_l^m & r^2 [K \sin^2 \theta + G \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)] Y_l^m \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Οι συναρτήσεις $H_0(t, r), H_1(t, r), H_2(t, r), h_0(t, r), h_1(t, r), G(t, r), K(t, r)$ είναι όλες συναρτήσεις των (t, r) μόνο. Επίσης οι συναρτήσεις $h_0(t, r), h_1(t, r)$ είναι διαφορετικές από τις αντίστοιχες της (2.17) για περιττές διαταραχές.

2.3 Ανάλυση Συχνοτήτων:Ειδίκευση για $M = 0$

Εξ' αιτίας της σφαιρικής συμμετρίας της αδιατάρακτης μετρικής, οι εξισώσεις (2.6) και (2.7) δεν μπορούν να αναμίξουν όρους διαφορετικού l και parity. Εφαρμόζοντας «κβαντική γλώσσα» σε ένα κλασικό πρόβλημα, μπορούμε να πούμε ότι τα l , m και η parity είναι σταθερές της κίνησης. Η ύπαρξη μίας ακόμα σταθεράς έπεται από το γεγονός ότι η μετρική (2.1) είναι ανεξάρτητη του ιδιοχρόνου t . Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να θεωρήσουμε μία διαταραχή μίας δεδομένης συχνότητας, $\omega = k$, έτσι ώστε κάθε συνιστώσα του ταυστή $h_{\mu\nu}$ να έχει μία χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{-i\omega t} = e^{-ikt}$. Στη συνέχεια θα προσδιοριστεί απόλυτα η μορφή της ατομικής λύσης συγκεκριμένης parity, τιμών l , m και συχνότητας. Η γενική λύση θα αποτελεί μία υπέρθεση αυτών των συγκεκριμένων λύσεων με σταθερές προσαρμοσμένες ώστε να ικανοποιούν τις κατάλληλες οριακές συνθήκες και αρχικές τιμές.

Η ανάλυση στις σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις Y_l^m κατέστησε δυνατό να μην ασχοληθούμε άλλο με τη γωνιακή εξάρτηση αφού αυτή προσδιορίστηκε πλήρως από τις (2.17) και (2.18). Μία ακόμα απλοποίηση αποτελεί το γεγονός ότι για κάθε συγκεκριμένη επιλογή των l , k και όλων των τιμών του m ($m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l$) θα οδηγήσει στις ίδιες ακτινικές εξισώσεις. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε την περίπτωση όπου $m = 0$, με αποτέλεσμα η γωνία ϕ να εξαφανιστεί τελείως από τις εξισώσεις.

2.4 Μετασχηματισμοί Βαθμίδας

Οι προηγούμενες απλοποιήσεις που έγιναν δεν είναι οι μόνες δυνατές για τις διαταραχές $h_{\mu\nu}$. Η ελευθερία επιλογής του συστήματος συντεταγμένων από τη Γενική Σχετικότητα εισάγει κι άλλες απλουστεύσεις που «συμαζεύουν» ακόμα περισσότερο τις εκφράσεις των $h_{\mu\nu}$.

Έστω ο απειροστός μετασχηματισμός συντεταγμένων (μετασχηματισμός βαθμίδας)

$$x'^a = x^a + \xi^a \quad (\xi^a \ll x^a) \quad (2.19)$$

Οι απειροστές μετατοπίσεις ξ^a μετασχηματίζονται ως διανύσματα. Στις νέες συντεταγμένες, όπως δείχτηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα είναι

$$g'_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu} \quad (2.20)$$

Εφ' όσον τα $h_{\mu\nu}$ ορίζονται ως η διαφορά της διαταραγμένης μετρικής από τη μετρική Schwarzschild σε σφαιρικές συντεταγμένες, θα είναι

$$h_{\mu\nu}^{\text{νέο}} = h_{\mu\nu}^{\text{παλαιό}} - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu} \quad (2.21)$$

Δηλαδή το $h_{\mu\nu}$ έχει υποστεί ένα μετασχηματισμό βαθμίδας. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε αυτό το γεγονός για να απλοποιήσουμε την περιγραφή της διαταραχής και να την κάνουμε μοναδική, να διαλέξουμε δηλαδή ένα καθορισμένο σύστημα αναφοράς.

Η συνάρτηση ξ^a δεν μπορεί να επιλεγεί τελείως τυχαία. Κι αυτό γιατί, παρ' όλο που ο μετασχηματισμός μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε ξεχωριστό κύμα, μόνο για νέα κύματα που ανήκουν στις αρχικές ιδιοτιμές θα έχει νόημα η απλοποίηση που φέρνει ο μετασχηματισμός.

Επομένως το διάνυσμα ξ^a πρέπει να είναι ίδιου l και parity, όπως και η διαταραχή(κύμα). Έτσι για περιττές διαταραχές η γενική μορφή ενός ακτινικού(περιττού) διανύσματος είναι

$$\xi^a = \Lambda(t, r)[0, 0, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m, -\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m] \quad (2.22)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.21) και (2.22) οι Regge και Wheeler διάλεξαν μία βαθμίδα στην οποία $h_2(t, r) = 0$. Αυτή η βαθμίδα είναι γνωστή ως βαθμίδα Regge-Wheeler. Κατά συνέπεια η μορφή των ακτινικών διαταραχών για κύματα ολικής στροφορμής l και προβολής $m = 0$ γίνεται

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0(r) \\ 0 & 0 & 0 & h_1(r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \times e^{-ikt} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) \quad (2.23)$$

όπου $P_l(\cos \theta)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre.

Κατά αντιστοιχία για άρτιες διαταραχές, το πολικό(άρτιο) διάνυσμα με parity $(-1)^l$, έχει τη γενική μορφή

$$\xi^a = [M_0(t, r)Y_l^m, M_1(t, r)Y_l^m, M(t, r)\frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m, M(t, r)\frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m] \quad (2.24)$$

Με βάση τη μορφή του πολικού διανύσματος και της σχέσης (2.21), οι διαταραχές $h_{\mu\nu}$ μετασχηματίζονται ως

$$\begin{aligned} h'_{tt} &= h_{tt} - 2\xi_{t,t} + 2\Gamma_{tt}^\alpha \xi_\alpha = h_{tt} - 2\dot{M}_0 + \frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) M_1 Y_l^m \\ h'_{t\phi} &= h_{t\phi} - \xi_{t,\phi} - \xi_{\phi,t} + 2\Gamma_{t\phi}^\alpha \xi_\alpha = h_{t\phi} - M_0 \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} - \dot{M}_2 \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \\ h'_{t\theta} &= h_{t\theta} - \xi_{t,\theta} - \xi_{\theta,t} + 2\Gamma_{t\theta}^\alpha \xi_\alpha = h_{t\theta} - M_0 \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} - \dot{M}_2 \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \\ h'_{\phi r} &= h_{\phi r} - \xi_{r,\phi} - \xi_{\phi,r} + 2\Gamma_{r\phi}^\alpha \xi_\alpha = h_{\phi r} - M'_2 \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} - M_1 \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} + \\ &\quad + \frac{2}{r} M_2 \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ομοίως υπολογίζονται και οι υπόλοιποι όροι, όπως φυσικά έτσι υπολογίστηκαν και οι όροι για τις περιττές συνιστώσες. Ακολουθώντας και πάλι τους Regge και Wheeler διαλέγουμε έτσι τις συναρτήσεις M_0, M_1, M ώστε να απαλείφονται οι συναρτήσεις G, h_0 και h_1 από την έκφραση (2.18), με αποτέλεσμα να δίνεται η μορφή των αρτίων διαταραχών από την έκφραση

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} H_0(1 - \frac{2M}{r}) & H_1 & 0 & 0 \\ H_1 & H_2(1 - \frac{2M}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta K \end{pmatrix} \times e^{-ikt} P_l(\cos \theta) \quad (2.26)$$

Απλοποιήθηκε έτσι η μορφή των διαταραχών, ώστε οι περιττές να εξαρτώνται από δύο πλέον συναρτήσεις h_0 και h_1 και από τέσσερις, αντί για εφτά, οι άρτιες, τις H_0, H_1, H και K .

2.5 Ακτινικές Εξισώσεις

Η παραπάνω δουλειά έγινε για να απλοποιηθεί το πρόβλημα της λύσης της εξίσωσης (2.8). Επομένως αντικαθιστώντας τις τελικές εκφράσεις των (2.23) και (2.26) για τα $h_{\mu\nu}$, λύνοντας την (2.8) βρίσκουμε τις εκφράσεις για τις ακτινικές εξισώσεις των (2.23) και (2.26). Με βάση τη (2.6) η (2.8) γίνεται

$$\delta\Gamma_{\mu\nu;\beta}^{\beta} - \delta\Gamma_{\mu\beta;\nu}^{\beta} = 0 \quad (2.27)$$

Η μελέτη των δύο διαφορετικών διαταραχών, για τις δύο parity, θα γίνει χωριστά.

2.5.1 Περιπτώσεις Διαταραχές

Στην περίπτωση αυτή η (2.27) απλοποιείται ακόμα περισσότερο, αφού $\delta\Gamma_{\mu\beta;\nu}^{\beta} = 0$. Η απόδειξη είναι πολύ εύκολη. Από τη (2.7) είναι

$$\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\beta} = \frac{1}{2}g^{\beta\kappa}(h_{\kappa\mu;\beta} + k_{\kappa\beta;\mu} - h_{\mu\beta;\kappa})$$

Επειδή όμως η μετρική $g^{\beta\kappa}$ (μετρική του Schwarzschild) είναι διαγώνια, δηλαδή $\beta = \kappa$ θα είναι

$$h_{\kappa\mu;\beta} = h_{\mu\beta;\kappa}$$

και

$$h_{\kappa\beta;\mu} = 0$$

αφού η (2.23) δεν έχει διαγώνιους όρους. Επομένως και $\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\beta} = 0$. Άρα από τη (2.27)

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\nu;\beta}^{\beta} = 0 \quad (2.28)$$

Να σημειωθεί ότι παρ' όλο που τα σύμβολα Christoffel δεν είναι ταυσιστά, οι διαταραχές τους είναι. Άρα από τη (2.28) θα είναι

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\nu;\beta}^{\beta} = \delta\Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}\delta\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} = 0 \quad (2.29)$$

και όπου οι δείκτες μ, ν, α, β παίρνουν τις τιμές $\{0, 1, 2, 3\}$ που αντιστοιχούν στα $\{t, r, \theta, \phi\}$.

Αντικαθιστώντας τώρα τη (2.7) στη (2.29), μόνο τρεις εξισώσεις παίρνουμε, οι οποίες προκύπτουν από τις $\delta R_{23} = \delta R_{13} = \delta R_{03} = 0$, οι οποίες να μην είναι εκ ταυτότητος μηδέν.

Αυτές οι εξισώσεις είναι

$$\begin{aligned} (1 - \frac{2M}{r})^{-1}kh_0 + \frac{d}{dr}[(1 - \frac{2M}{r})h_1] &= 0 \quad , \quad \text{για } \delta R_{23} = 0 \\ (1 - \frac{2M}{r})^{-1}k(\frac{dh_0}{dr} - kh_1 - \frac{2h_0}{r}) + (l-1)(l+2)\frac{h_1}{r^2} &= 0 \quad , \quad \text{για } \delta R_{13} = 0 \\ \frac{d}{dr}[kh_1 - \frac{dh_0}{dr}] + 2k\frac{h_1}{r} &= r^{-2}(1 - \frac{2M}{r}) \cdot \\ [\frac{4Mh_0}{r} - l(l+1)h_0] &= 0 \quad , \quad \text{για } \delta R_{03} = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Η τελευταία εξίσωση δεν είναι ανεξάρτητη αλλά μπορεί να προκύψει από τις άλλες δύο.

Συνδυάζοντας τις δύο πρώτες εξισώσεις είναι δυνατόν να απαλειφθεί η μία άγνωστη συνάρτηση και να μείνει μία συνάρτηση μόνο σε μία εξίσωση.

Ξεκινώντας από την πρώτη εξίσωση επιλύουμε ως προς h_0

$$kh_0 = -\left[\frac{d}{dr}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]h_1\left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2\frac{dh_1}{dr}$$

και την αντικαθιστούμε στη δεύτερη, παίρνοντας έτσι μία διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς h_1 :

$$\begin{aligned} -\left[\frac{d^2}{dr^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]h_1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{d^2h_1}{dr^2} - 3\left[\frac{d}{dr}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]\frac{dh_1}{dr} - h_1\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{d}{dr}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}k^2h_1 + \frac{2h_1}{r}\frac{d}{dr}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \\ + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{2}{r}\frac{dh_1}{dr} + l(l+1)\frac{h_1}{r^2} - \frac{2h_1}{r^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ορίζοντας την ποσότητα Q ως

$$Q(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{h_1}{r} \quad (2.32)$$

και με χρήση μίας ακόμα σχέσεως ορισμού

$$\begin{aligned} dr_* &\equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr \\ \Rightarrow r^* &= r + 2M \ln\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

η (2.31) γίνεται

$$\frac{d^2Q}{dr_*^2} + k_{\text{eff}}^2(r)Q = 0 \quad (2.34)$$

όπου

$$k_{\text{eff}}^2 = k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{6M}{r^3}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (2.35)$$

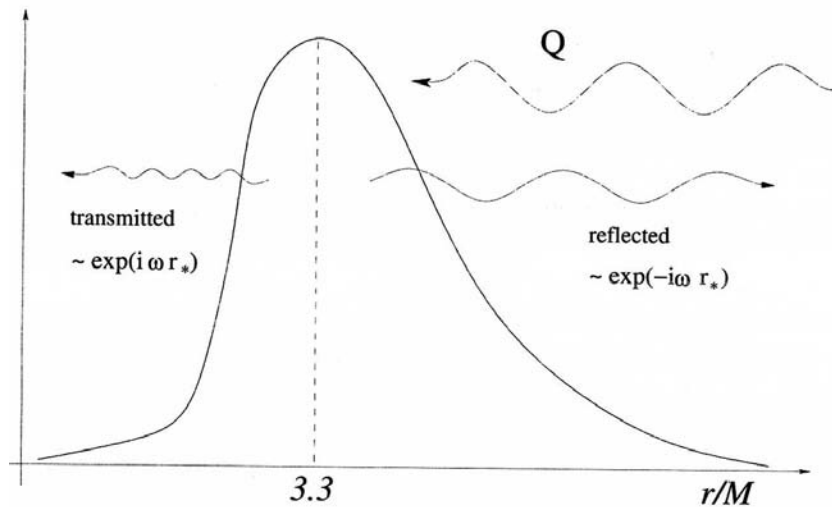
Η εξίσωση (2.34) μπορεί να πάρει και μία πιο γενική μορφή ώστε να ισχύει και για πιο γενικές χρονικές εξαρτήσεις, όχι μόνο για e^{-ikt} , αλλά γενικώς για μία $h_1(r, t)$. Τότε η (2.32) γίνεται

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial r_*^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3}\right]Q = 0 \quad (2.36)$$

και γίνεται φανερό ότι για τη συγκεκριμένη περίπτωση της χρονικής εξάρτησης e^{-ikt} , έχουμε $\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -k^2$.

Ο όρος

$$V(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3}\right] \quad (2.37)$$



Σχήμα 2.1: Αναπαράσταση του δυναμικού Regge-Wheeler V και της επίδρασης του σε ένα εισερχόμενο βαρυτικό κύμα.

ονομάζεται «δυναμικό Regge-Wheeler», αφού η (2.32) και (2.36) είναι κυματικές εξισώσεις, όπου το $V(r)$ εκφράζει το δυναμικό σκέδασης. Το δυναμικό $V(r)$ έχει μέγιστο λίγο έξω από τον ορίζοντα γεγονότων, σε απόσταση $r \sim 3.3M$ σε συντεταγμένες Schwarzschild, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1 (Η εικόνα είναι από την εργασία [16], σελίδα 17).

Να αναφερθεί ότι η χρήση της συντεταγμένης r^* είναι πολύ βολική, έναντι της r . Κι αυτό γιατί για $r \rightarrow \infty, r^* \rightarrow r$ και $r \rightarrow 2M^+, r^* \rightarrow -\infty$, καθιστά αυτές τις συντεταγμένες κατάλληλες για μελέτη της διάδοσης της διαταραχής κοντά στον ορίζοντα γεγονότων μίας μεανής οπής, αφού αυτός τοποθετείται στο $-\infty$, εξαλείφοντας το πρόβλημα της ιδιομορφίας των συντεταγμένων Schwarzschild.

Η εξίσωση (2.30) ή (2.34) ονομάζεται εξίσωση των Regge-Wheeler και η συνάρτηση Q , συνάρτηση Regge-Wheeler.

Μαζί με την εξίσωση (2.30) από το σύστημα των εξισώσεων (2.28) μπορεί να προκύψει και η εξίσωση

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r^*}(r^*Q) \quad (2.38)$$

η οποία όμως δε χρησιμοποιείται ιδιαίτερα, για λόγους που θα γίνουν εμφανείς στο επόμενο κεφάλαιο.

Η εξίσωση Regge-Wheeler περιέχει όλες τις ιδιότητες μίας κυματικής εξίσωσης σε σκεδάζον δυναμικό και όλα τα αποτελέσματα που έχουν βρεθεί για τέτοιου είδους εξισώσεις (π.χ. εξίσωση του Schrödinger) μπορούν να εφαρμοστούν στη διάδοση των διαταραχών του χωροχρόνου μίας μελανής οπής Schwarzschild.

Ως παράδειγμα, μία διαταραχή της μετρικής η οποία πλησιάζει τη μελανή οπή από άπειρη απόσταση μπορεί να θεωρηθεί σαν κυματοπακέτο που θα σκεδαστεί στο φράγμα δυναμικού V . Όπως στην κβαντομηχανική, ένα μόνο μέρος του κυματοπακέτου θα φτάσει στη μελανή οπή και

ένα άλλο μέρος, που εξαρτάται από τις ιδιότητες του ίδιου του κυματοπακέτου, θα ανακλαστεί πίσω στο άπειρο. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει τη διαφορά στη συμπεριφορά των βαρυτικών κυμάτων έναντι υλικών σωμάτων, όπως για παράδειγμα ένα σφαιρικό υλικό κέλυφος που πέφτει ακτινικά προς τη μελανή οπή. Αυτή η σημαντική διαφορά τονίζει τη σημασία μίας ανάλυσης των διαταραχών του χωροχρόνου μίας μελαής οπής.

Όλη η ανάλυση που έγινε μέχρι τώρα αφορούσε ταυσιτικές διαταραχές, αφού τα διαταραγμένα μεγέθη ήταν ταυσιτικά μεγέθη. Παρ' όλα αυτά η εξίσωση των Regge-Wheeler παρουσιάζει μία πολύ ενδιαφέρουσα συμπεριφορά, αφού παρουσιάζεται με την ίδια μορφή τόσο για βαθμωτές όσο και για διανυσματικές διαταραχές. Η μόνη διαφορά εμφανίζεται στο δυναμικό V της (2.37), όπου ο όρος $p = -\frac{6M}{r^3}$ είναι $p = \frac{2M}{r^3}$ και $p = 0$ για βαθμωτές και διανυσματικές διαταραχές αντίστοιχα.

2.5.2 Άρτιες Διαταραχές

Για τις πολικές διαταραχές η εξίσωση (2.8) γίνεται

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= \delta\Gamma_{\mu\nu;\beta}^{\beta} - \delta\Gamma_{\mu\beta;\nu}^{\beta} = 0 \\
\Rightarrow \delta\Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\beta} - \delta\Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} - \\
&\quad - \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}\delta\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} = 0 \\
\Rightarrow \delta\Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\beta} - \delta\Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} + \\
&\quad + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} = 0
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Από τη (2.37) τρεις εξισώσεις είναι εκ ταυτότητας ίσες με μηδέν

$$\begin{aligned}
\delta R_{03} &= 0 \\
\delta R_{13} &= 0 \\
\delta R_{23} &= 0
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Από τις υπόλοιπες εφτά εξισώσεις προκύπτουν μία αλγεβρική σχέση, τρεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως και τρεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως:

$$H_2 = H_0 \equiv H$$

και χρησιμοποιώντας αυτή οι άλλες έξι γίνονται

$$\begin{aligned}
\frac{dK}{dr} + r^{-1}(K + H) - l(l+1)\frac{H_1}{2kr^2} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{MK}{r^2} &= 0 \\
\frac{d}{dr}\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)H_1\right] &= k(K - H) \\
kH_1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{d}{dr}(K + H) - \frac{2M}{r^2}H &= 0 \\
\frac{d}{dr}\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(2rH + \frac{d}{dr}(r^2K)\right)\right] - l(l+1)K -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2krH_1 + k^2r^2(1 - \frac{2M}{r})^{-1}K = 0 \\
& 2k(1 - \frac{2M}{r})\frac{dH_1}{dr} + 2kM\frac{H_1}{r^2} + k^2H - \\
& -(1 - \frac{2M}{r})^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dH}{dr}) + \frac{2}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dK}{dr})\right] - \\
& -(1 - \frac{2M}{r})\left[l(l+1)\frac{H}{r^2} + \frac{4M}{r^2}\frac{dH}{dr} + \frac{2M}{r^2}\frac{dK}{dr}\right] = 0 \\
& (1 - \frac{2M}{r})^2\frac{d^2H}{dr^2} + \frac{2}{r}(1 - \frac{2M}{r})\frac{dH}{dr} - k^2H - l(l+1)(1 - \frac{2M}{r})\frac{H}{r^2} - \frac{2kMH_1}{r^2} - \\
& -2k(1 - \frac{2M}{r})\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2H_1) + 2k^2K + 2(1 - \frac{2M}{r})\frac{M}{r^2}\frac{dK}{dr} = 0 \tag{2.41}
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν ένα σύστημα έξι εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Παρατηρώντας τις εξισώσεις θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι οι τρεις πρωτοβάθμιες διαφορικές εξισώσεις της (2.41) αρκούν για τη λύση του συστήματος, δοθέντων των κατάλληλων οριακών συνθηκών. Οι τρεις δευτεροβάθμιες εξισώσεις όμως εμπεριέχουν ένα πρόσθετο κομμάτι πληροφορίας για τη λύση, που είναι σύμφωνο με τις τρεις πρώτες. Συγκεκριμένα, μια πιο προσεκτική έρευνα δείχνει ότι οι τρεις δευτεροβάθμιες εξισώσεις μπορούν να εξαχθούν όλες από τις τρεις πρωτοβάθμιες, συν την αλγεβρική σχέση:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{6M}{r} + (l-1)(l+2)\right]H + \left[2kr - l(l+1)\frac{M}{r^2}K\right]H_1 + \\
& + \left[\frac{2M}{r} + (l-1)(l+2) - 2(1 - \frac{2M}{r})^{-1}(\frac{M^2}{r^2} + k^2r^2)\right]K \equiv F = 0 \tag{2.42}
\end{aligned}$$

και αντιστρόφως, οι τρεις τελευταίες της (2.41) μπορούν να δώσουν τις τρεις πρωτοβάθμιες (τρεις πρώτες της (2.41)) συν την σχέση (2.42), με την προϋπόθεση η συχνότητα $k \neq 0$.

Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι η (2.42) είναι μία αλγεβρική σχέση σε συμφωνία με τις διαφορικές εξισώσεις της (2.41). Θα μπορούσε να ονομαστεί ως «πρώτο ολοκλήρωμα». Έστω ότι K', H', H_1' είναι λύσεις των τριών πρώτων διαφορικών εξισώσεων της (2.41) και F' η συνάρτηση της (2.42) που αντιστοιχεί στις λύσεις K', H', H_1' . Αποδεικνύεται ότι η F' υπακούει στην παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{dF'}{dr} + \frac{M}{r^2}(1 - \frac{2M}{r})^{-1}F' = 0 \tag{2.43}$$

Αν η F' εξαφανίζεται σε κάποιο σημείο (με κατάλληλη εκλογή των αυθαιρέτων σταθερών) τότε η F' είναι μηδέν παντού.

Μπορούμε και για τις άρτιες διαταραχές να κατασκευάσουμε μία κυματική εξίσωση ανάλογη της (2.34) [3]. Ορίζουμε μία νέα συνάρτηση Z , γνωστή ως συνάρτηση του Zerilli, η οποία συνδέεται με τις H, H_1 και K με τις σχέσεις

$$K = \frac{q(q+1)r^2 + 3qMr + 6M^2}{r^2(qr + 3M)}Z + \frac{r - 2M}{r}\frac{dZ}{dr}$$

$$\begin{aligned}
H_1 &= -ik \frac{qr^2 - 3qMr - 3M}{(r - 2M)(qr + 3M)} Z - ikr \frac{dZ}{dr} \\
H &= \frac{qr(r - 2M) - k^2 r^4 + M(r - 3M)}{(r - 2M)(qr + 3M)} K + \frac{M(q + 1) - k^2 r^3}{ikr(qr + 3M)} H_1 - \tilde{B}_{lm}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

όπου

$$q = \frac{1}{2}(l - 1)(l + 2) \tag{2.45}$$

και

$$\tilde{B}_{lm} = \frac{8\pi r^2(r - 2M)}{qr + 3M} \left\{ A_{lm} + \left[\frac{1}{2}l(l + 1) \right]^{-\frac{1}{2}} B_{lm} \right\} - \frac{4\pi\sqrt{2}}{qr + 3M} \frac{Mr}{k} A_{lm}^{(1)} \tag{2.46}$$

όπου οι ποσότητες A_{lm} , B_{lm} και $A_{lm}^{(1)}$ θα οριστούν λίγο παρακάτω. Το μόνο που αρκεί να πούμε τώρα είναι πως οι ποσότητες αυτές είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος ενός τανυστή δευτέρας τάξης σε σφαιρικές αρμονικές. Η ακριβής μορφή της συνάρτησης του Zerilli θα δωθεί στο επόμενο κεφάλαιο, καθώς η εξαγωγή της θα γίνει πιο εύκολα. Με βάση όλες τις παραπάνω σχέσεις και τις τρεις πρώτες εξισώσεις της (2.41), παίρνουμε την κυματική εξίσωση για πολικές διαταραχές

$$\frac{d^2 Z}{dr^*} + [k^2 - \tilde{V}]Z = 0 \tag{2.47}$$

γνωστή κι ως εξίσωση του Zerilli. Η (2.47) έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση των Regge-Wheeler, είναι δηλαδή μία κυματική εξίσωση σε σκεδάζον φράγμα δυναμικού \tilde{V} , το οποίο ορίζεται ως

$$\tilde{V} \equiv (1 - 2Mr) \left[\frac{2q(q + 1)r^3 + 6q^2 r^2 M + 18qM^2 r + 18M^3}{r^3(qr + 3M)^2} \right] \tag{2.48}$$

Είναι ενδιαφέρον πως οι εξισώσεις Regge-Wheeler και Zerilli συνδέονται στενά και είναι δυνατόν να μετασχηματίσουμε την πρώτη για περιπτές διαταραχές στη δεύτερη για άρτιες διαταραχές με τη βοήθεια κατάλληλων διαφορικών τελεστών [16].

2.6 Εναλλακτική Έκφραση σε Σφαιρικές Αρμονικές

Η πρώτη εργασία που δημοσιεύτηκε πάνω στις διαταραχές της μετρικής Schwarzschild ήταν αυτή των Regge-Wheeler το 1957, της οποίας το φορμαλισμό ακολουθήσαμε μέχρι στιγμής. Ένας νέος φορμαλισμός εισήχθει το 1970 (αρχικά χρησιμοποιήθηκε το 1962 από τον Mathews) από τους Mathews και Zerilli [3], ο οποίος χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα, με μερικές αλλαγές. Η διαφορά των δύο φορμαλισμών οφείλεται στον τρόπο ανάπτυξης ενός τανυστή σε σφαιρικές αρμονικές και στην ονοματολογία που χρησιμοποιείται για τις δύο διαφορετικές καταστάσεις της parity. Έτσι στο φορμαλισμό των Mathews και Zerilli οι περιπτές διαταραχές (odd) ονομάζονται μαγνητικές και οι άρτιες (even) διαταραχές ηλεκτρικές. Με βάση αυτόν το φορμαλισμό

ένας γενικός συναλλοίωτος συμμετρικός ταυστής T δευτέρας τάξης μπορεί να αναπτυχθεί σε σφαιρικές αρμονικές με βάση τον τύπο

$$T = \sum_{l,m} \left[A_{lm}^{(0)} a_{lm}^{(0)} + A_{lm}^{(1)} a_{lm}^{(1)} + A_{lm} a_{lm} + B_{lm}^{(0)} b_{lm}^{(0)} + B_{lm} b_{lm} + \right. \\ \left. + Q_{lm}^{(0)} c_{lm}^{(0)} + Q_{lm} c_{lm} + G_{lm} g_{lm} + D_{lm} d_{lm} + F_{lm} f_{lm} \right] \quad (2.49)$$

όπου

$$a_{lm}^{(0)} = \begin{pmatrix} Y_{lm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{lm}^{(1)} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & Y_{lm} & 0 & 0 \\ Y_{lm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{lm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{lm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_{lm}^{(0)} = ir \left[2l(l+1) \right]^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm} & \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{lm} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_{lm} = r \left[2l(l+1) \right]^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm} & \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{lm} \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{lm}^{(0)} = r \left[2l(l+1) \right]^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{lm} & -\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{lm} = ir \left[2l(l+1) \right]^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{lm} & -\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm} \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_{lm} = -ir^2 \left[2l(l+1)(l-1)(l+2) \right]^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sin \theta} X_{lm} & \sin \theta W_{lm} \\ 0 & 0 & * & \sin \theta X_{lm} \end{pmatrix}$$

$$g_{lm} = \frac{r^2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} Y_{lm}$$

$$f_{lm} = r^2 [2l(l+1)(l-1)(l+2)]^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_{lm} & X_{lm} \\ 0 & 0 & * & \sin^2 \theta W_{lm} \end{pmatrix}$$
(2.50)

όπου

$$X_{lm} = 2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \right) Y_{lm}$$

$$W_{lm} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) Y_{lm}$$

Το παραπάνω σετ των ταυσιτών είναι ορθοκανονικό στο εσωτερικό γινόμενο

$$(T, S) \equiv \iint T^* : S d\Omega$$

όπου

$$T : S \equiv \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\kappa} T_{\mu\nu} S_{\lambda\kappa}$$

και $\eta_{\mu\nu}$ η μετρική του Minkowski. Οι συντελεστές του αναπτύγματος δίνονται από τις σχέσεις: $A_{lm}^{(0)} = (a_{lm}^{(0)}, T)$, $B_{lm}^{(0)} = (b_{lm}^{(0)}, T)$ κ.τ.λ. Τώρα γίνεται σαφές από την προηγούμενη παράγραφο ποια η σημασία των A_{lm} , $A_{lm}^{(1)}$, B_{lm} της σχέσης (2.46).

Οι πρώτοι πέντε και οι δύο τελευταίοι όροι της (2.49) «οδηγούν» το ηλεκτρικό κομμάτι (even parity) και οι τρεις εναπομείναντες όροι το μαγνητικό (odd parity). Έτσι ο ταυσιτής \mathbf{h} αναπτύσσεται ως

$$\mathbf{h} = \sum_{l,m} (h_{lm}^{(e)} + h_{lm}^{(m)}) \quad (2.51)$$

όπου οι δείκτες (e) , (m) δηλώνουν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό μέρος της διαταραχής αντίστοιχα. Οι μαγνητικοί όροι $(-1)^{l+1}$ parity της (2.51) δίνονται από τη σχέση

$$h_{lm}^{(m)} = \frac{i}{r} [2l(l+1)]^{1/2} \left[i h_0(r, t) c_{lm}^{(0)}(\theta, \phi) + h_1(r, t) c_{lm}(\theta, \phi) - \frac{i}{2r^2} [(l-1)(l+2)]^{1/2} h_2(r, t) d_{lm}(\theta, \phi) \right] \quad (2.52)$$

και οι ηλεκτρικοί όροι $(-1)^l$ parity

$$h_{lm}^{(e)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) H_0 a_{lm}^{(1)} - \sqrt{2} i H_1 a_{lm}^{(1)} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} H_2 a_{lm} - \frac{1}{r} [(l-1)(l+2)]^{1/2} (i h_0 b_{lm}^{(0)} - h_1^{(e)} b_{lm}) + \left[\frac{1}{2} l(l+1)(l-1)(l+2)\right]^{1/2} G f_{lm} + \sqrt{2} \left[K - \frac{1}{2} l(l+1)G\right] g_{lm} \quad (2.53)$$

Η όλη δουλειά από εδώ και πέρα σε αυτόν τον φορμαλισμό είναι ίδια με πριν. Μετά και την επιλογή της βαθμίδας Regge-Wheeler καταλήγουμε στο ότι οι μαγνητικοί όροι του h γίνονται

$$h_{lm}^{(m)} = \frac{i}{r} [2l(l+1)]^{1/2} (ih_0 c_{lm}^{(0)} + h_1 c_{lm}) \quad (2.54)$$

και ο ηλεκτρικός όρος

$$h_{lm}^{(e)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) H_0 a_{lm}^{(0)} - \sqrt{2} i H_1 a_{lm}^{(1)} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} H_2 a_{lm} + \sqrt{2} K g_{lm} \quad (2.55)$$

όπου, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, οι (2.52), (2.53) ταυτίζονται με τις (2.17), (2.18) και οι (2.54), (2.55) με τις (2.13) και (2.15) αντίστοιχα, όπως και αναμενόταν. Τέλος η άθροιση $\sum_{l,m}$ σημαίνει ότι $(l = 0, 1, \dots)$ και $(m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l)$.

Ένας ακόμα φορμαλισμός, που θα φανεί πολύ χρήσιμος στο επόμενο κεφάλαιο, βασίζεται στη λεγόμενη «3+1» διάτμηση, στην οποία ο χωροχρόνος «τεμαχίζεται» σε μία οικογένεια χωρικών υπερεπιφανειών (συναρτήσεων του r, θ, ϕ) παραμετροποιημένη από μία συντεταγμένη $t = \text{σταθερό}$ [16]. Με αυτήν τη διάτμηση το γραμμικό στοιχείο παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} ds^2 &= -a^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt) (dx^j + \beta^j dt) \\ &= -(a^2 + \beta^j \beta_j) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j \end{aligned} \quad (2.56)$$

όπου a είναι η συνάρτηση χρονικής διάβασης (lapse function), που εκφράζει το ρυθμό στον οποίο ρολόγια σε διαφορετικές υπερεπιφάνειες «χτυπούν», και β^i είναι οι συνιστώσες του διανύσματος χωρικής μετατόπισης (shift vector), που συσχετίζει αλλαγές στις συντεταγμένες δύο διαφορετικών υπερεπιφανειών.

Με τη βοήθεια αυτής της διάτμησης, οι διαταραχές της μετρικής εκφράζονται σε όρους ενός καθαρά χρονικού τμήματος (h_{00}) (βαθμωτό μέγεθος), ενός καθαρά χωρικού (τανυστής) h_{ij} (όπου τα i, j παίρνουν τις τιμές r, θ, ϕ) κι ενός ανάμικτου χωροχρονικού τμήματος h_{0i} (διανυσματικό μέγεθος)

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{i0} \\ h_{0i} & h_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Με βάση τα παραπάνω, οι συνιστώσες της (2.57) για περιττές (μαγνητικές) διαταραχές δίνονται από τη σχέση

$$\begin{aligned} h_{00} &= 0 \\ h_{0i} &= h_0(t, r) \left[0, -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\phi}, \sin\theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} \right] \\ h_{ij} &= h_1(t, r) (\hat{e}_1)_{ij} + h_2(t, r) (\hat{e}_2)_{ij} \end{aligned} \quad (2.58)$$

όπου

$$(\hat{e}_1)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\phi} & \sin\theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

και

$$(\hat{e}_2)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin\theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} - \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) Y_{lm} & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \right] Y_{lm} \\ 0 & * & - \left[\sin\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right] Y_{lm} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Στην περίπτωση άρτιων (ηλεκτρικών) διαταραχών είναι

$$\begin{aligned} h_{00} &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} H_0(t, r) Y_{lm} \\ h_{0i} &= [H_1 Y_{lm}, h_0^{(e)} \frac{\partial}{\partial\theta} Y_{lm}, h_0^{(e)} \frac{\partial}{\partial\phi} Y_{lm}] \\ h_{ij} &= h_1^{(e)} (\hat{f}_1)_{ij} + \frac{H_2}{1 - \frac{2M}{r}} (\hat{f}_2)_{ij} + r^2 K (\hat{f}_3)_{ij} + r^2 G (\hat{f}_4)_{ij} \end{aligned} \quad (2.61)$$

όπου

$$(\hat{f}_1)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} & \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\phi} \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

$$(\hat{f}_2)_{ij} = \begin{pmatrix} Y_{lm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

$$(\hat{f}_3)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{lm} & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\theta Y_{lm} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

$$(\hat{f}_4)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\theta^2} & \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} - \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) Y_{lm} \\ 0 & * & \left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \sin\theta \cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) Y_{lm} \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Χρήση αυτού του φορμαλισμού θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα δούμε πως προχωράει ακόμα παραπέρα η μελέτη των διαταραχών του χωροχρόνου μίας μελανής οπής, δηλαδή του χωροχρόνου Schwarzschild.

Κεφάλαιο 3

Αναλλοίωτες Βαθμίδας του Χωροχρόνου Schwarzschild

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήθηκε η συμπεριφορά του χωροχρόνου Schwarzschild όταν αυτός διαταραχτεί για κάποιο λόγο. Η μελέτη έγινε σε ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς, το οποίο καθορίζεται από τη βαθμίδα των Regge-Wheeler. Είναι όμως δυνατό να μελετηθεί το ίδιο πρόβλημα χωρίς να χρησιμοποιήσουμε κάποιο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς, αλλά με τη βοήθεια αναλλοίωτων ποσοτήτων οι οποίες είναι ανεξάρτητες από κάθε σύστημα αναφοράς (από εδώ και στο εξής θα αναφέρονται απλά ως αναλλοίωτες).

Η σημασία της χρήσης αναλλοίωτων ποσοτήτων φαίνεται από το γεγονός ότι ακόμα κι αν το σύστημα συνταταγμένων του αδιατάραχτου χωροχρόνου έχει καθοριστεί, η ελευθερία συντεταγμένων της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας εισάγει ένα πρόβλημα όταν προσθέτουμε στο χωροχρόνο γραμμικές διαταραχές. Πιο συγκεκριμένα, *δεν είναι δυνατό να ξεχωρίσουμε μία απειροστή «φυσική» διαταραχή από μία που προκύπτει ως αποτέλεσμα ενός απειροστού μετασχηματισμού συντεταγμένων* (μετασχηματισμού βαθμίδας) [9]. Αυτή η δυσκολία μπορεί να εξαληφθεί είτε με το να καθορίσουμε μία βαθμίδα (όπως έγινε στη δουλειά των Regge-Wheeler που είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο) είτε εισάγοντας γραμμικά αναλλοίωτες ποσότητες από μετασχηματισμούς βαθμίδας (όπως πρώτος πρότεινε ο Moncrief [2] και υιοθετήθηκε από πολλούς άλλους).

Πιο συγκεκριμένα, δοθέντος ενός τανυστικού πεδίου \mathbf{X} σε μία αδιατάρακτη μετρική \check{g} και $\delta\mathbf{X}$ η απειροστή διαταραχή του, ένας απειροστός μετασχηματισμός συντεταγμένων, της μορφής $x^\mu \rightarrow x^{\mu'} \equiv x^\mu + \xi^\mu$, με $\xi^\mu \ll 1$, θα διεγείρει ένα νέο τανυστικό πεδίο

$$\delta\mathbf{X} \rightarrow \delta\mathbf{X}' = \delta\mathbf{X} + \mathcal{L}_\xi\mathbf{X}$$

όπου \mathcal{L}_ξ η παράγωγος Lie κατά μήκος του $\vec{\xi}$ στη μετρική \check{g} . Το $\delta\mathbf{X}$ τότε θα θεωρείται αναλλοίωτο (gauge-invariant) αν και μόνο αν $\mathcal{L}_\xi\mathbf{X} = 0$. Αυτό σημαίνει, με βάση τις ιδιότητες της παραγωγής Lie, ότι η ικανότητα να κατασκευάσουμε αναλλοίωτες διαταραχές της μετρικής, εξαρτάται από την ύπαρξη συμμετριών της αδιατάρακτης μετρικής. Στην περίπτωση ενός γενικά σφαιρικά συμμετρικού αδιατάραχτου χωροχρόνου και ο οποίος έχει αναλυθεί σε ανάπτυγμα πολυπόλων (όπως έγινε με τις διαταραχές της μετρικής Schwarzschild), η κατασκευή ποσοτήτων αναλλοίωτων σε μετασχηματισμούς βαθμίδας είναι δυνατή για πολύπολλα τάξεως $l \geq 2$ μόνο. Στην

πράξη, το πλεονέκτημα της χρήσης αναλλοίωτων ποσοτήτων είναι ότι συνδέονται φυσιολογικά με βαθμωτά μετρήσιμα μεγέθη, όπως η ενέργεια και η ορμή των βαρυτικών κυμάτων. Ταυτόχρονα, αυτή η επιλογή εγκυάται ότι πιθανές εξαρτώμενες από τη βαθμίδα ποσότητες αποκλείονται εκ κατασκευής [9].

3.1 Αρχή Μεταβολών στη Θεωρία Διαταραχών

Τα προβλήματα της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας μπορούν να λυθούν είτε απ' ευθείας από τις εξισώσεις πεδίου, $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$, είτε ξεκινώντας από μία αρχή μεταβολών στην οποία διαλέγουμε μία κατάλληλη Λαγκρασιανή. Στη συνέχεια, ακολουθώντας τον Moncrief [2], θα θεμελιώσουμε τη θεωρία των βαρυτικών κυμάτων μέσω της θεωρίας των μεταβολών.

Εστω $\mathcal{L}(\varphi^A; \varphi_{,\mu}^A)$ μία βαθμωτή ποσότητα που σχηματίζεται από τα βαθμωτά ή τανυστικά πεδία φ^A και τις μερικές παραγώγους τους $\varphi_{,\mu}^A$ ($\mu = 0, 1, 2, 3; A = 1, \dots, N$). Η απαίτηση το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\varphi^A; \varphi_{,\mu}^A) \quad (3.1)$$

να είναι στάσιμο σε αυθαίρετες μεταβολές του φ^A , οι οποίες εξαφανίζονται στο σύνορο $\partial\Omega$ του χώρου Ω , καταλήγει σε ένα σύστημα εξισώσεων στο εσωτερικό του Ω , γνωστές ως εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}^A} \right] = 0 \quad (3.2)$$

Οι εξισώσεις (3.2) αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης του δυναμικού συστήματος. Εφαρμόζοντας τώρα τη μέθοδο του Jacobi της δεύτερης μεταβολής μπορούμε να πάρουμε μία ακόμα αρχή μεταβολών, της οποίας οι εξισώσεις Euler-Lagrange περιγράφουν τις μικρές διαταραχές των λύσεων στο αρχικό πρόβλημα.

Θεωρούμε μία μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

$$\varphi^A(e) \equiv \varphi^A(x^\mu; e)$$

και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα (3.1) για τις συναρτήσεις αυτές:

$$I(e) = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\varphi^A(e); \varphi_{,\mu}^A(e)) \quad (3.3)$$

Παραγωγίζοντας το $I(e)$ ως προς e παίρνουμε

$$\frac{dI(e)}{de} \equiv I'(e) = \int_{\Omega} d^4x [F_A(e) \varphi'^A(e)] + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}^A} \varphi'^A(e) \right] \quad (3.4)$$

όπου

$$F_A(e) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}^A} \right] = 0 \quad (3.5)$$

και $\varphi'^A(e) \equiv \frac{\partial \varphi^A}{\partial e}(x^\mu; e)$.

Μία δεύτερη παραγωγή του $I(e)$ δίνει

$$I''(e) = \int_{\Omega} d^4x [F_A(e)\varphi''^A(e)] + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}^A} \varphi''^A(e) \right] + 2J(e) \quad (3.6)$$

όπου

$$J(e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \varphi^A \partial \varphi^B} \varphi'^A \varphi'^B + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \varphi^A \partial \varphi_{,\mu}^B} \varphi'^A \varphi'_{,\mu}{}^B + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}^A \partial \varphi_{,\nu}^B} \varphi'_{,\mu}{}^A \varphi'_{,\nu}{}^B \right] \quad (3.7)$$

Η απαίτηση ότι

$$I'(0) \equiv I'(e)|_{e=0} = 0 \quad (3.8)$$

για αυθαίρετο $\varphi'^A(0) \equiv \frac{\partial \varphi^A}{\partial e}|_{e=0}$, το οποίο εξαφανίζεται στο όριο $\partial\Omega$, υποδηλώνει ότι τα $\varphi^A(0)$ υπακούουν στις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$F_A(0) = 0$$

Υπολογίζοντας το $I''(0) \equiv \frac{d^2 I(e)}{de^2}|_{e=0}$ στην περίπτωση που τα $\varphi^A(0)$ υπακούουν στις εξισώσεις Euler-Lagrange, παίρνουμε από την (3.6)

$$I''(0) = 2J(0) + \int_{\Omega} d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}^A} \varphi''^A(0) \right] \quad (3.9)$$

Το ολοκλήρωμα $J(0)$ είναι δευτέρου βαθμού ως προς τις συναρτήσεις $\varphi'^A(x^\mu; 0)$ με συντελεστές ανάλογους των $\varphi^A(x^\mu; 0)$. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange των μικρών διαταραχών θα προκύψουν από την απαίτηση το $I''(0)$ να είναι στάσιμο για αυθαίρετες μεταβολές του $\varphi'^A(x^\mu; 0)$, οι οποίες εξαφανίζονται στο $\partial\Omega$, και είναι

$$\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \varphi^A \partial \varphi^B} \varphi'^B + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \varphi^A \partial \varphi_{,\mu}^B} \varphi'_{,\mu}{}^B - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}^A \partial \varphi^B} \varphi'^B + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}^A \partial \varphi_{,\nu}^B} \varphi'_{,\nu}{}^B \right) \right]_{e=0} = 0 \quad (3.10)$$

Οι εξισώσεις (3.10) είναι ισοδύναμες με

$$\frac{\partial F_A(e)}{\partial e}|_{e=0} = 0 \quad (3.11)$$

Εφ' όσον οι εξισώσεις (3.10) είναι αυτές που δίνουν τις μικρές διαταραχές των λύσεων $\varphi^A(x^\mu; 0)$, το $I''(0)$ αποτελεί το «ολοκλήρωμα μεταβολών» αυτών.

Με βάση τα παραπάνω είναι εύκολο τώρα να γίνει η μετάβαση από το Λαγκρασιανό φορμαλισμό, στον Χαμιλτονιανό. Το ολοκλήρωμα (3.1) έτσι γίνεται

$$I = \int_{\Omega} d^4x [\pi_A \varphi_{,0}^A - \mathcal{H}(\pi_A, \pi_{A,i}; \varphi^A, \varphi_{,i}^A)] \quad (3.12)$$

όπου $\pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,0}^A}$ η γενικευμένη ορμή, συζυγής της γενικευμένης συντεταγμένης φ^A , και $x^0 = t$ η χρονική συντεταγμένη και $x^i (i = 1, 2, 3)$ οι χωρικές συντεταγμένες. Η απαίτηση και πάλι το I

να είναι στάσιμο οδηγεί στις εξισώσεις Hamilton

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi^A}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_A} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{A,i}} \right) \\ \frac{\partial \pi_A}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi^A} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_{,i}^A} \right)\end{aligned}\quad (3.13)$$

που είναι ισοδύναμες των εξισώσεων Euler-Lagrange, με τη διαφορά ότι έχουμε N διαφορικές εξισώσεις 2^{00} βαθμού στο Λαγκρανζιανό φορμαλισμό ενώ εδώ έχουμε $2N$ διαφορικές εξισώσεις πρώτου βαθμού. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και στην περίπτωση του Λαγκρανζιανού φορμαλισμού, θεωρώντας την μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων $\pi_A(x^\mu; e), \varphi^A(x^\mu; e)$ υπολογίζοντας τα $I'(0)$ και $I''(0)$ παίρνουμε από τη συνθήκη $I'(0) = 0$ της (3.13) και από την $I''(0)$ να είναι στάσιμο τις εξισώσεις Hamilton των μικρών διαταραχών

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi'^A(0)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial e} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_A} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{A,i}} \right) \right] \Big|_{e=0} \\ \frac{\partial \pi'_A(0)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial e} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi^A} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_{,i}^A} \right) \right] \Big|_{e=0}\end{aligned}\quad (3.14)$$

3.2 Διαταραχές των Κενών και Στατικών Μετρικών

Οι Arnolitt, Deser και Misner (ADM) βρήκαν μία μορφή του ολοκληρώματος μεταβολών στην Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, το οποίο είναι

$$I = \int d^4x [\pi^{ij} \gamma_{ij,0} - N \mathcal{H} - N_i \mathcal{H}^i] \quad (3.15)$$

όπου

$$\mathcal{H} = \gamma^{-1/2} [\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} (\pi_i^i)^2] - \gamma^{1/2} R^{(3)} \quad (3.16)$$

$$\mathcal{H}^i = -2\pi_{|j}^{ij} \quad (3.17)$$

και στο οποίο θα εφαρμοστούν τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου για τη μελέτη των μικρών διαταραχών. Η \mathcal{H} είναι η υπερχαμιλτονιανή, μία γενίκευση της χαμιλτονιανής και \mathcal{H}^i η υπερρομή. Η εξαγωγή της σχέσης (3.15) βασίστηκε στην ανάλυση της «3+1» διάτμησης που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στην παράγραφο (2.6) [12]. Η «3+1» διάτμηση εισήχθη από τους Arnolitt, Deser και Misner ως η πλέον λειτουργική μέθοδος για τη λύση των εξισώσεων Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Η συμβατική ερμηνεία της πάνω εξίσωσης είναι ότι δοθήςας της κατανομής της μάζας – ενέργειας στο χωροχρόνο μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση Einstein και να βρούμε τη γεωμετρία του χωροχρόνου. Η θεωρία όμως της γεωμετροδυναμικής προσεγγίζει διαφορετικά την

παραπάνω εξίσωση. Δίνουμε τα πεδία που παράγουν την κατανομή της μάζας -ενέργειας και τις χρονικές μεταβολές τους και δίνουμε την 3-γεωμετρία του χώρου και της χρονικής μεταβολής του, όλα για μία στιγμή, και λύνουμε για την 4-γεωμετρία του χωροχρόνου εκείνη τη χρονική στιγμή. Και μόνο τότε προβλέπουμε με τις εξισώσεις της γεωμετροδυναμικής για κάθε χρονική στιγμή τόσο τη γεωμετρία του χωροχρόνου όσο και τη ροή της ενέργειας -μάζας για εκείνο το χωροχρόνο.

Επιστρέφοντας στην εξίσωση (3.15) οι μεταβλητές (γ_{ij}, N, N_i) σχετίζονται με την τετραδιάστατη μετρική $g_{\mu\nu}^{(4)}$ με τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &\equiv g_{ij}^{(4)} \\ N &\equiv (-g_{00}^{(4)})^{-1/2} \\ N_i &\equiv g_{0i}^{(4)} \quad i, j = (1, 2, 3)\end{aligned}\quad (3.18)$$

Έτσι η μετρική γ_{ij} είναι η μετρική του τρισδιάστατου χώρου που πέρνουμε από την «3+1» διάτμηση και $R^{(3)}$ το βαθμωτό Ricci που κατασκευάζεται από τη μετρική αυτή. Το N είναι η συνάρτηση χρονικής διάβασης (lapse function), που εκφράζει τη μεταβολή του ιδιοχρόνου μεταξύ της κατώτερης και της ανώτερης υπερεπιφάνειας (τρισδιάστατος χώρος) που χωρίσαμε τον τετραδιάστατο χωροχρόνο. Το N_i είναι το διάνυσμα χωρικής μετατόπισης (shift vector) και συσχετίζει τις αλλαγές των συντεταγμένων ανάμεσα στις υπερεπιφάνειες. Τα π_{ij} είναι η «ορμή» του γεωμετροδυναμικού πεδίου, που είναι η συζυγής ορμή των «γενικευμένων συντεταγμένων» g_{ij} του γεωμετροδυναμικού πεδίου, κι εκφράζει την αλλαγή της δράσης ανά στοιχειώδη μεταβολή της 3-γεωμετρίας των υπερεπιφανειών του χώρου. Συνδέεται με την κανονική μορφή K_{ij} , την καμπυλότητα δηλαδή της εξωγενούς γεωμετρίας (όπως ο τανυστής του Riemann εκφράζει την καμπυλότητα της ενδογενούς γεωμετρίας) με τη σχέση

$$\pi^{ij} = -\gamma^{1/2}[K^{ij} - \gamma^{ij}K^l_l] \quad (3.19)$$

Η αναβίβαση και καταβίβαση των λατινικών δεικτών γίνεται με τη μετρική γ_{ij} και η κάθετη γραμμή εκφράζει συναλλοίωτη παραγωγή ως προς την ίδια μετρική.

Ανεξάρτητες μεταβλητές του ολοκληρώματος (3.15) είναι οι π^{ij} , γ^{ij} , N και N^i , ως προς τα οποία παίρνουμε τις μεταβολές και δίνουν ένα σύστημα εξισώσεων ισοδύναμο με τις εξιδώδεις πεδίου του Einstein. Πιο συγκεκριμένα, μεταβολή ως προς N και N_i δίνει τους παρακάτω περιορισμούς

$$\mathcal{H} = 0 \quad , \quad \mathcal{H}_i = 0 \quad (3.20)$$

οι οποίοι επιβάλλονται πάνω στις αρχικές τιμές των π^{ij} και γ^{ij} . Συνεχής ικανοποίηση της (3.20) μακριά από την αρχική υπερεπιφάνεια τηρείται από τις ταυτότητες Bianchi.

Η δεύτερη μεταβολή του I δίνει τις εξισώσεις των μικρών διαταραχών. Για να μελετήσουμε τις διαταραχές μίας στατικής, αδιατάρακτης μετρικής (η οποία ικανοποιεί τις εξισώσεις πεδίου του Einstein στο κενό) μπορούμε να θέσουμε, αφού πάρουμε τη δεύτερη μεταβολή,

$$\pi^{ij} = 0 \quad , \quad N_i = 0 \quad (3.21)$$

Οι συναρτήσεις N και γ^{ij} είναι ανεξάρτητες της χρονικής συντεταγμένης και υπακούουν στις εξισώσεις

$$N_{|ij} = NR_{ij}^{(3)} \quad , R^{(3)} = 0 \quad (3.22)$$

Η δεύτερη μεταβολή του I , υπολογισμένη σε μία στατική λύση στο κενό, δίνει

$$J = \int d^4x \left[p^{ij} \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} - N \mathcal{H}^* - N'_i \mathcal{H}^i - N' \mathcal{H}' \right] \quad (3.23)$$

όπου

$$\begin{aligned} h_{ij} &\equiv \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial e} \Big|_{e=0} \\ p^{ij} &\equiv \frac{\partial \pi^{ij}}{\partial e} \Big|_{e=0} \\ N' &\equiv \frac{\partial N}{\partial e} \Big|_{e=0} \\ N'_i &\equiv \frac{\partial N_i}{\partial e} \Big|_{e=0} \end{aligned} \quad (3.24)$$

και

$$\mathcal{H}^i = -2p^{ij} \quad (3.25)$$

$$\mathcal{H}' = -\gamma^{1/2} [h^{ij} - h^i - h_{ij} R^{ij(3)}] \quad (3.26)$$

Επίσης ισχύει

$$\begin{aligned} \int d^3x N \mathcal{H}^* &\equiv H \\ &= \int d^3x \left(N \gamma^{1/2} [p^{ij} p_{ij} - \frac{1}{2} p^2] + \frac{1}{2} N \gamma^{1/2} \left[\frac{1}{2} h_{ij|k} h^{ij|k} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - h_{ij|k} h^{ik|j} - \frac{1}{2} h_{|i} h^i + 2h_{|i} h_j^{ij} + h h_{|ij}^{ij} - h h_{ij} R^{ij(3)} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Στις εξισώσεις (3.25)-(3.27) έχουμε ορίσει

$$p = \gamma_{ij} p^{ij} \quad , h = \gamma^{ij} h_{ij} \quad (3.28)$$

Μεταβολή του J ως προς τη διαταραγμένη συνάρτηση ολίσθησης N' και το διαταραγμένο-διάλυμα αλλαγής N'_i δίνει τις περιοριστικές συνθήκες

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}^i = 0 \quad (3.29)$$

Μεταβολή του J ως προς τα p^{ij} και h^{ij} δίνει τις εξισώσεις του Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} &= \frac{\delta H_T}{\delta p^{ij}} \\ \frac{\partial p_{ij}}{\partial t} &= -\frac{\delta H_T}{\delta h^{ij}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

όπου

$$H_T = H + \int d^3x [N' \mathcal{H}' + N'_i \mathcal{H}'^i] \quad (3.31)$$

και $\frac{\delta \langle \rangle}{\delta \langle \rangle}$ εκφράζει τη συναρτησιοειδή παραγωγή. Οι περιορισμοί (3.29) πρέπει να επιβάλλονται στις αρχικές τιμές των p^{ij} και h^{ij} .

Στις επόμενες παραγράφους θα θεωρήσουμε διαταραχές με περιττή και άρτια parity της μετρικής Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.32)$$

όπου θα θέσουμε

$$x^0 = t, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi.$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου θα εξάγουμε τις εξισώσεις των Regge-Wheeler και Zerilli, δίνοντας τους όμως μία διαφορετική σημασία.

3.3 Περιττές Διαταραχές

Ξεκινάμε με τη μορφή των Regge-Wheeler για τις περιττές διαταραχές. Η διαταραχή τάξεως (l, m) είναι

$$h_{ij} = h_1(r, t) (\hat{e}_1)_{ij} + h_2(r, t) (\hat{e}_2)_{ij} \quad (3.33)$$

την οποία δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο στη σχέση (2.58). Τα $(\hat{e}_1)_{ij}$ και $h_2(r, t) (\hat{e}_2)_{ij}$ δίνονται από τις σχέσεις (2.59) και (2.60) αντίστοιχα. Οι περιττές διαταραχές της συνάρτησης χρονικής διάβασης N' είναι μηδέν και το διαταραγμένο διάνυσμα χωρικής μετατόπισης εκφράζεται από τη σχέση

$$[N'_i] = h_0(r, t) \left[0, -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}, \sin \theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \right] \quad (3.34)$$

όπου συγκρίνοντας με τις (2.58) παρατηρούμε ότι όντως $N' = h_{00}$ και $N'_i = h_{0i}$, σύμφωνα με τη θεωρία. Στο ολοκλήρωμα μεταβολών μόνο τα πραγματικά μέρη των (3.33) και (3.34) θα χρησιμοποιηθούν. Όμως, αφού οι εξισώσεις για τα h_0, h_1 και h_2 είναι ανεξάρτητες του m , μπορούμε να θέσουμε $m = 0$ και να κάνουμε τις συναρτήσεις h_0, h_1 και h_2 καθαρά πραγματικές. Τότε και οι (3.33) και (3.34) είναι καθαρά πραγματικές.

Όπως έχουμε ήδη δει οι μετασχηματισμοί βαθμίδας της γραμμικοποιημένης θεωρίας δίνονται από τη σχέση

$$\delta h_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} \quad (3.35)$$

όπου $\delta h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{\text{παλιό}} - h_{\mu\nu}^{\text{νέο}}$ και ξ_μ ένα αυθαίρετο διάνυσμα και με το (\cdot) συμβολίζεται η συναλλοίωτη παράγωγος ως προς την τετραδιάστατη, αδιατάρακτη μετρική $g_{\mu\nu}^{(4)}$. Όταν η αδιατάρακτη μετρική είναι στατική, για τα δh_{ij} ισχύει

$$\begin{aligned} \delta h_{ij} &= \xi_{i;j} + \xi_{j;i} \\ &= \xi_{ij} + \xi_{ji} \end{aligned} \quad (3.36)$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο για στατική μετρική. Οι μόνοι μετασχηματισμοί βαθμίδας που επηρεάζουν τις περιττές διαταραχές, είναι αυτοί που παράγονται από περιττής parity διανυσματικά πεδία κι έχουν (όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο) τη μορφή

$$[\xi_i] = \xi(r, t) \left[0, -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}, \sin \theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \right] \quad (3.37)$$

Συνδιάζοντας την (3.36) με την (3.37) παίρνουμε, για τη μετρική του Schwarzschild, για τις μεταβολές βαθμίδας των h_1, h_2

$$\begin{aligned} \delta h_1 &= \xi_{,r} - \frac{2}{r} \xi \\ \delta h_2 &= -2\xi \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ορίζοντας δύο νέες συναρτήσεις διαταραχών k_1, k_2 με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} k_1 &= h_1 + \frac{1}{2} [h_{2,r} - \frac{2}{r} h_2] \\ k_2 &= h_2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

παρατηρούμε ότι κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας (3.38)

$$\begin{aligned} \delta k_1 &= 0 \\ \delta k_2 &= -2\xi \end{aligned} \quad (3.40)$$

Δηλαδή η k_1 είναι μία αναλλοίωτη. Επιπλέον, εφ' όσον όλες οι περιττές διαταραχές ικανοποιούν την περιοριστική συνθήκη (3.26), η k_1 είναι μία μη-περιορισμένη, αναλλοίωτη ποσότητα της διαταραγμένης 3-γεωμετρίας.

Για να πάρουμε όμως τις εξισώσεις Hamilton των μικρών διαταραχών, πρέπει να βρούμε και την έκφραση των διαταραγμένων ορμών p_{ij} . Εφ' όσον τα p_{ij} μετασχηματίζονται ως οι συνιστώσες μίας ταυσιτικής πυκνότητας, μπορούμε να εκφράσουμε το $\gamma^{-1/2} p_{ij}$ ως ανάπτυγμα σφαιρικών αρμονικών περιττής parity, όπως ακριβώς και με τα h_{ij} . Έτσι

$$\gamma^{-1/2} p_{ij} = \hat{p}_1(r, t) (\hat{e}_1)_{ij} + \hat{p}_2(r, t) (\hat{e}_2)_{ij} \quad (3.41)$$

Ορίζοντας τις ποσότητες

$$\begin{aligned} p_1 &= 2l(l+1) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \hat{p}_1 \\ p_2 &= \frac{1}{2} \frac{l(l+1)(l-1)(l+2)}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}} \hat{p}_2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \Theta &\equiv \int d^3x \left[p_{ij} \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right] \\ &= \int d^3x \left[p_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} + p_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

Η αντικατάσταση στη σχέση (3.43) των συντεταγμένων h_1, h_2 με τις k_1, k_2 , απαιτεί και την αντικατάσταση των p_1, p_2 με τις συζυγείς ορμές των k_1, k_2 , ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$\Theta = \int d^3x \left[\pi_1 \frac{\partial k_1}{\partial t} + \pi_2 \frac{\partial k_2}{\partial t} \right] \quad (3.44)$$

Με βάση τις (3.43) και (3.39), ο μετασχηματισμός

$$\begin{aligned} p_1 &= \pi_1 \\ p_2 &= \pi_2 - \frac{1}{2}\pi_{1,r} - \frac{1}{r}\pi_1 \end{aligned} \quad (3.45)$$

επαληθεύει την (3.44). Άρα τα π_1, π_2 είναι οι συζυγείς ορμές των k_1, k_2 . Στις νέες μεταβλητές ($k_1, k_2; \pi_1, \pi_2$) οι περιοριστικές συνθήκες (3.29) γίνονται

$$p_{ij}^j = \frac{r^2 \sin \theta \pi_2}{l(l+1)} \left[0, -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}, \sin \theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (3.46)$$

ή απλούστερα

$$\pi_2 = 0 \quad (3.47)$$

Είναι τώρα δυνατόν να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα μεταβολών για περιττές διαταραχές αντικαθιστώντας τα h_{ij} και p^{ij} στις εξισώσεις (3.23) και (3.27). Ολοκληρώνοντας ως προς τις γωνιακές μεταβλητές και μετασχηματίζοντας τις αρχικές μεταβλητές με τις k_1, k_2, π_1 και π_2 με τη βοήθεια των σχέσεων (3.39), (3.42) και (3.45) παίρνουμε

$$J = \int dt \int dr \left[\pi_1 \frac{\partial k_1}{\partial t} + \pi_2 \frac{\partial k_2}{\partial t} - \mathcal{H} \right] \quad (3.48)$$

όπου

$$\begin{aligned} \int dr \mathcal{H} &\equiv H_T \\ &= \frac{1}{l(l+1)} \int dr \left\{ \frac{1}{2} \pi_1^2 + \frac{2r^2(1 - \frac{2M}{r})}{(l-1)(l+2)} \left[\pi_2 - \frac{1}{2}\pi_{1,r} - \frac{1}{r}\pi_1 \right]^2 \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} l(l+1) \int dr \left\{ \frac{(l-1)(l+2)}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) k_1^2 \right\} - 2 \int dr [h_0 \pi_0] \end{aligned} \quad (3.49)$$

Μεταβολή του J ως προς h_0 δίνει τον περιορισμό των αρχικών συνθηκών (3.47), οποίος διατηρείται στο χρόνο αφού η k_2 είναι κυκλική. Δουλεύοντας με τις εξισώσεις του Hamilton παίρνουμε μία κυματική εξίσωση για το k_1 η οποία μπορεί να γραφεί

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial r^{*2}} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right] Q = 0 \quad (3.50)$$

όπου

$$Q \equiv \frac{k_1}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (3.51)$$

και

$$r^* \equiv r + 2M \ln \left(\frac{2M}{r} - 1 \right) \quad (3.52)$$

Η (3.50) είναι η γνωστή μας εξίσωση των Regge-Wheeler. Αντικαθιστώντας το k_1 από την (3.39)

$$Q = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[h_1 + \frac{1}{2} (h_{2,r} - \frac{2}{r} h_2) \right] \quad (3.53)$$

Η (3.53) ταυτίζεται με την εξίσωση των Regge-Wheeler στη βαθμίδα Regge-Wheeler, δηλαδή για $h_2 = 0$, στην οποία

$$Q = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) h_1^* \quad (3.54)$$

όπου ο αστερίσκος δηλώνει ότι το h_1 (που εξαρτάται από τη βαθμίδα) είναι εδώ υπολογισμένο στη βαθμίδα Regge-Wheeler. Όμως η Q της (3.54) είναι εξαρτημένη από τη βαθμίδα. Αντιθέτως η Q της (3.51) είναι ανεξάρτητη της βαθμίδας, πράγμα που την κάνει πολύ πιο εύχρηστη, αφού ικανοποιεί την ίδια εξίσωση, (3.50), σε κάθε βαθμίδα.

3.4 Άρτιες Διαταραχές

Για τις Άρτιες διαταραχές, το ανάπτυγμα σε σφαιρικές αρμονικές δίνει

$$h_{ij} = h_1(\hat{f}_1)_{ij} + \frac{H_2}{1 - \frac{2M}{r}} (\hat{f}_2)_{ij} + r^2 K(\hat{f}_3)_{ij} + r^2 G(\hat{f}_4)_{ij} \quad (3.55)$$

με διαταραγμένη συνάρτηση χρονικής διάβασης και διάνυσμα χωρικής μετατόπισης

$$N' = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2} H_0(t, r) Y_l^m \quad (3.56)$$

$$[N'_i] = \left[H_1(t, r) Y_l^m, h_0(t, r) \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta}, h_0(t, r) \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \right] \quad (3.57)$$

και όπου τα $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3, \hat{f}_4$ δίνονται από τις (2.62)-(2.65) του κεφαλαίου 2. Επίσης να τονιστεί για μία ακόμα φορά ότι οι συναρτήσεις h_0, h_1 είναι διαφορετικές από αυτές των περιπτώσεων διαταραχών.

Οι μετασχηματισμοί βαθμίδας των h_{ij} δίνονται από τις (3.36) όπου μόνο διανύσματα με άρτια parity τα επηρεάζουν κι έχουν τη μορφή

$$[\xi_i] = \left[\xi_1 Y_l^m, \xi_0 \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta}, \xi_0 \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \right] \quad (3.58)$$

Δουλεύοντας όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να πάρουμε για τις αυθαίρετες συναρτήσεις ξ_1, ξ_2 αντίστοιχες σχέσεις για τις μεταβλητές των H_2, h_1, K, G , όπως στην (3.38), μόνο που η μορφή τους είναι αλγεβρικά πιο περίπλοκη. Εφ' όσον τώρα υπάρχουν δύο αυθαίρετες συναρτήσεις που εμπλέκονται στη βαθμίδα, θα είναι δυνατό να κατασκευαστούν δύο

μόνο συνδιασμοί από τις H_2, h_1, K και G , που να είναι αναλλοίωτοι σε μετασχηματισμούς βαθμίδας. Εισάγουμε αντί των τεσσάρων συναρτήσεων H_2, h_1, K και G τέσσερις νέες k_1, k_2, k_3, k_4 που ορίζονται

$$\begin{aligned} G &= k_3 \\ h_1 &= k_4 \\ K &= k_1 - \frac{1}{r}e^{-2\lambda}[r^2k_{3,r} - 2k_4] \\ H_2 &= 2e^{-2\lambda}k_2 + rk_{1,r} + (1 + r\lambda_{,r})k_1 - \\ &\quad - e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial r}[r^2e^{-\lambda}k_{3,r} - 2e^{-\lambda}k_4] \end{aligned} \quad (3.59)$$

όπου

$$e^{-2\lambda} \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

Οι μετασχηματισμοί (3.59) ορίστηκαν έτσι ώστε τα k_1 και k_2 να είναι αναλλοίωτες

$$\delta k_1 = \delta k_2 = 0 \quad (3.60)$$

Οι αλλαγές στη βαθμίδα των k_3 και k_4 είναι

$$\begin{aligned} \delta k_3 &= \frac{2\xi_0}{r^2} \\ \delta k_4 &= \xi_1 + r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\xi_0}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Ο περιορισμός $\mathcal{H}' = 0$, ο οποίος για μία στατική αδιατάρακτη μετρική απλοποιείται στον

$$[-\gamma^{1/2}R_{(3)}]' = 0$$

παίρνει τη μορφή

$$-\gamma^{1/2}[h_{ij}^{|ij} - h_{|i}^i - h_{ij}R^{ij(3)}] = 0 \quad (3.62)$$

Ο παραπάνω περιορισμός συναρτήσει των k_1, k_2, k_3, k_4 γίνεται

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\partial}{\partial r}[4re^{-4\lambda}k_2 + l(l+1)rk_1] + l(l+1)[2e^{-2\lambda}k_2 + \right. \\ &\left. + (1 + r\lambda_{,r})k_1] \right\} \left(\frac{Y_l^m}{r^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Η μορφή του περιορισμού οδηγεί σε μία τελευταία αλλαγή των μεταβλητών από k_1 και k_2 σε q_1, q_2 , που ορίζονται ως

$$\begin{aligned} q_1 &= 4re^{-4\lambda}k_2 + l(l+1)rk_1 \\ q_2 &= \frac{\partial}{\partial r}[4re^{-4\lambda}k_2 + l(l+1)rk_1] + l(l+1)[2e^{-2\lambda}k_2 + (1 + r\lambda_{,r})k_1] \end{aligned} \quad (3.64)$$

και για να υπάρχει ένας ομοιόμορφος συμβολισμός ορίζουμε

$$q_3 = k_3, \quad q_4 = k_4 \quad (3.65)$$

Με την αλλαγή αυτή πετύχαμε η μορφή του περιορισμού (3.63) να απλοποιείται στην

$$q_2 = 0 \quad (3.66)$$

όπου q_1 είναι η μόνη μη-περιορισμένη, αναλλοίωτη συνάρτηση που μπορεί κανείς να κατασκευάσει από τα h_{ij} στην περίπτωση των άρτιων διαταραχών. Οι μετασχηματισμοί (3.64) είναι αντιστρέψιμοι στην περιοχή του χώρου όπου $r > 2M$ και οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί είναι

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{\Lambda} \left[\frac{q_1}{r} - \frac{2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{l(l+1)} (q_2 - q_{1,r}) \right] \\ k_2 &= \frac{1}{2\Lambda \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \left[q_2 - q_{1,r} - \frac{q_1}{r} \frac{\left(1 - \frac{3M}{r}\right)}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \right] \end{aligned} \quad (3.67)$$

όπου

$$\Lambda \equiv l(l+1) - 2 + \frac{6M}{r}$$

Για τον υπολογισμό των ορμών p^{ij} , αναπτύσσουμε τον τανυστή πυκνότητας $\gamma^{1/2}p_{ij}$ στις σφαιρικές αρμονικές, ως εξής

$$\begin{aligned} \gamma^{1/2}p_{ij} &= P_h(r, t)(\hat{f}_1)_{ij} + P_H(r, t) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (\hat{f}_2)_{ij} + \\ &+ r^2 P_K(r, t)(\hat{f}_3)_{ij} + r^2 P_G(r, t)(\hat{f}_4)_{ij} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Από τις (3.55) και (3.68) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Theta &\equiv \int d^3x [p^{ij} \frac{\partial h_{ij}}{\partial t}] \\ &= \int dr \left[r^2 \left(1 - \frac{2M}{r^2}\right)^{-1/2} P_H H_{2,0} + 2l(l+1) \left(1 - \frac{2M}{r^2}\right)^{1/2} P_h h_{1,0} + \right. \\ &+ r^2 \left(1 - \frac{2M}{r^2}\right)^{-1/2} [2P_K - l(l+1)P_G] K_{,0} + \\ &\left. + l(l+1)[-P_K + (l(l+1) - 1)P_G] G_{,0} \right] \end{aligned} \quad (3.69)$$

Οι συζυγείς ορμές $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ των q_1, q_2, q_3, q_4 θα βρεθούν από την απαίτηση να ικανοποιούν τη σχέση

$$\Theta = \int dr [\pi_1 q_{1,0} + \pi_2 q_{2,0} + \pi_3 q_{3,0} + \pi_4 q_{4,0}] \quad (3.70)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.69) τους μετασχηματισμούς των (H_2, h_1, K, G) σε (q_1, q_2, q_3, q_4) (3.59) και (3.64) και εξισώνοντας αυτήν με τη (3.70) παίρνουμε τους μετασχηματισμούς που συνδέουν

τα δύο σεις των συναρτήσεων των ορμών $\{p_\alpha\}$ και $\{\pi_\alpha\}$. Στις νέες μεταβλητές ορμών, οι ανεξάρτητοι περιορισμοί των ορμών γίνονται

$$\pi_{rj}{}^{lj} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \pi_4 \sin \theta Y_l^m = 0 \quad (3.71)$$

και

$$\pi_{\theta j}{}^{lj} = \left[\frac{1}{2l(l+1)} (r^2 \pi_4)_{,r} - \frac{1}{l(l+1)} \pi_3 \right] \sin \theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} = 0 \quad (3.72)$$

ή πιο απλά

$$\pi_3 = \pi_4 = 0 \quad (3.73)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.55)-(3.57) και την (3.68) στη γενική σχέση (3.23) και επανεκφράζοντας το αποτέλεσμα συναρτήσει των νέων μεταβλητών (π_1, \dots, π_4) και (q_1, \dots, q_4) , παίρνουμε το ολοκλήρωμα μεταβολών για τις διαταραχές άρτιας parity

$$J = \int dt dr \left[\sum_{a=1}^4 \pi_a q_{a,0} - \mathcal{H} \right] \quad (3.74)$$

όπου

$$\begin{aligned} \int dr \mathcal{H} &\equiv H_T \\ &= \int dr \left\{ \frac{l(L+1)\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{2(l-1)(l+2)} \Lambda^2 \pi_1^2 + \frac{\pi_4^2}{2l(l+1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \pi_4 [r(\pi_1 - \pi_{2,r}) + (1 + r\lambda_{,r}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{r^2(l-1)(l+2)} \left[\frac{2\pi_3^2}{l(L+1)} + 2\pi_3 [r\Lambda\pi_1 + \pi_2(r\Lambda)_{,r}] \right] \right\} + \\ &\quad + \int dr \left\{ \frac{(l-1)(l+2)\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{2l(l+1)\Lambda^2} (q_2 - q_{1,r})^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(l-1)(l+2)}{2r\Lambda^2} q_1 q_2 + \frac{(l-1)^2(l+2)^2}{2r^2\Lambda^3} q_1^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{Mq_2(q_2 - q_{1,r})}{r\Lambda l(l+1)} - \frac{Mq_2}{2r} \left(r q_{3,r} - \frac{2}{r} q_4 \right) \right\} + \\ &\quad + \int dr \left\{ \frac{H_0 q_2}{2} + H_1 \pi_4 + h_0 \left[\frac{2\pi_3}{r^2} - \frac{1}{r^2} (r^2 \pi_4)_{,r} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Μεταβολή του J ως προς τις συναρτήσεις H_0, H_1 και h_0 δίνει τις περιοριστικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} q_2 &= 0 \\ \pi_4 &= 0 \\ 0 &= \frac{2\pi_3}{r^2} - \frac{1}{r^2} (r^2 \pi_4)_{,r} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Ενώ η χαμιλτονιανή έχει μία περίπλοκη μορφή, πολλοί όροι της εξαφανίζονται όταν οι περιορισμοί επιβάλλονται. Αποδεικνύεται ότι όταν οι περιορισμοί ικανοποιούνται, η χαμιλτονιανή είναι μία θετική συνάρτηση των q_1 και π_1 , η οποία μηδενίζεται μόνο όταν αυτές οι δύο συναρτήσεις μηδενίζονται.

Οι εξισώσεις του Hamilton για q_1 και π_1 δίνουν

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial r^{*2}} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \left[\frac{72M^3}{r^5} - \frac{12M}{r^3} (l-1)(l+2) \left(1 - \frac{3M}{r}\right) \right] + \frac{(l-1)(l+2)l(l+1)}{r^2 \Lambda} \right\} Q = 0 \quad (3.77)$$

όπου

$$Q \equiv \frac{q_1}{\Lambda} \quad (3.78)$$

και

$$r^* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)$$

Η εξίσωση (3.77) είναι η γνωστή εξίσωση του Zerilli. Έτσι η Q , που είναι αναλλοίωτη, υπακούει στην ίδια εξίσωση όπως η εξαρτημένη από τη βαθμίδα συνάρτηση Z του Zerilli.

Λύνοντας τις εξισώσεις του Hamilton $q_{A,0} = \frac{\delta H_T}{\delta \pi_A}$ για τη μεταβλητή π_4 κι εκφράζοντας το αποτέλεσμα στις μεταβλητές των Regge-Wheeler για τη βαθμίδα Regge-Wheeler (που συμβολίζεται με έναν αστερίσκο), προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\pi_4}{l(l+1)} &= -H_1^* + \frac{2}{l(l+1)} \frac{\partial}{\partial t} \left[r^2 K^*, r - r H_2^* + r \left(1 - \frac{3M}{r}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} K^* \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

Εκφράζοντας τη συνάρτηση Q στις μεταβλητές Regge-Wheeler προκύπτει

$$Q = \frac{rl(l+1)}{\Lambda} K^* - \frac{2r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{\Lambda} \left[K_{,r}^* + \frac{1}{r} K^* - \frac{MK^*}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - \frac{H_2^*}{r} \right] \quad (3.80)$$

Θεωρώντας μία λύση με χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$, συνδιάζοντας τις (3.79) και (3.80), προκύπτει

$$Q = \frac{1}{\Lambda} \left[-\frac{i}{\omega} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) l(l+1) H_1^* + rl(l+1) K^* \right] \quad (3.81)$$

που είναι ισοδύναμη με την ποσότητα για την οποία ο Zerilli εξήγαγε την εξίσωση του.

3.5 Ευστάθεια Μελανών Οπών

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα τόσο των εργασιών των Regge-Wheeler και Zerilli όσο και του Moncrief ήταν η κατάσταση της ευστάθειας των μελανών οπών. Σ' αυτήν την παράγραφο θα μελετηθεί η ευστάθεια των μελανών οπών, ακολουθώντας τον Moncrief, καθώς η μέθοδος του, αν και φτάνει στα ίδια συμπεράσματα με τους προηγούμενους είναι πιο κομψή, καθώς έχει και το πλεονέκτημα να βασίζεται σε ανναλλοιώτες κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Για τη μελέτη της ευστάθειας είναι χρήσιμο να εκφραστεί η χαμιλτονιανή συναρτήσει του Q και της συζυγούς ορμής του $P = \Lambda\pi_1$. Υιοθετώντας κάποιους αριθμητικούς παράγοντες απο τους επανορισμούς

$$P \rightarrow P \left[\frac{(l-1)(l+2)}{l(l+1)} \right]^{1/2}$$

$$Q \rightarrow Q \left[\frac{l(l+1)}{(l-1)(l+2)} \right]^{1/2}$$

και απαλοίφοντας έναν επιφανειακό όρο, που προκύπτει από την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, προκύπτει

$$\begin{aligned} \int dr \mathcal{H}^* &\equiv H^* \\ &= \frac{1}{2} \int dr \left\{ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) P^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (Q_{,r})^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{Q}{\Lambda}\right)^2 \left[\frac{72M^3}{r^5} + (l-1)(l+2) \left[\frac{36M^2}{r^4} + (l-1)(l+2) \frac{6M}{r^3} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{r^2} l(l+1)(l-1)(l+2) \right] \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.82)$$

όπου ο αστερίσχος δηλώνει ότι οι περιορισμοί και ο επιφανειακός όρος έχουν παραλειφθεί. Η χρονική παράγωγος της χαμιλτονιανής πυκνότητας \mathcal{H}^* είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{,0}^* &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 P Q_{,r} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial r} [Q_{,0} Q_{,r}] \end{aligned} \quad (3.83)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση από $r \rightarrow 2M$ έως $r \rightarrow \infty$

$$\frac{dH^*}{dt} = Q_{,0} Q_{,r^*} \Big|_{r^*=-\infty}^{r^*=\infty} \quad (3.84)$$

που εκφράζει το $\frac{dH^*}{dt}$ σε όρους μίας ροής στο σύνορο.

Οι λύσεις της εξίσωσης του Zerilli (3.77) που αντιστοιχού σε καθαρά εξερχόμενα κύματα για $r \rightarrow \infty$ και καθαρά εισερχόμενα για $r \rightarrow 2M$ έχουν την ασυμπτωτική μορφή

$$\begin{aligned} Q &= f(t - r^*), & r &\rightarrow +\infty \\ Q &= g(t + r^*), & r^* &\rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (3.85)$$

Από την (3.85) και (3.84) προκύπτει ότι για μία λύσει που υπακούει στις οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων, ισχύει $\frac{dH^*}{dt} \leq 0$.

Μία ασταθής λύση, κανονικών τρόπων ταλάντωσης, της εξίσωσης Zerilli (ή της εξίσωσης Regge-Wheeler) είναι μία που έχει χρονική εξάρτηση e^{ikt} και για την οποία η συχνότητα k έχει αρνητικό μιγαδικό μέρος. Τέτοιες λύσεις μεγαλώνουν εκθετικά με το χρόνο. Μία τέτοια λύση που υπακούει τις συνοριακές συνθήκες για εξερχόμενα κύματα (3.85) έχει την ασυμπτωτική μορφή

$$\begin{aligned} Q &= Ae^{(ikt-ikr^*)}, & r &\rightarrow +\infty \\ Q &= Be^{(ikt+ikr^*)}, & r^* &\rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (3.86)$$

όπου A και B σταθερές. Αφού το k έχει ένα αρνητικό μιγαδικό μέρος, η λύση πέφτει εκθετικά καθώς $r^* \rightarrow \pm\infty$. Υπολογίζοντας το H^* για τα πραγματικά μέρη των συναρτήσεων Q, P προκύπτει από την (3.84)

$$\frac{dH^*}{dt} = 0 \Rightarrow H^* = C = \text{σταθερά} \quad (3.87)$$

Παρ' όλα αυτά το H^* όπως δίνεται από την (3.82) είναι ένα άθροισμα μη-αρνητικών όρων, που για μία ασταθή λύση θα αυξανόταν εκθετικά με το χρόνο. Γι' αυτό η H^* δεν μπορεί να είναι σταθερή, εκτός κι αν μηδενίζεται κι αυτό γίνεται μόνο όταν και οι διαταραχές μηδενίζονται. Έτσι ασταθείς λύσεις που υπακούουν στις οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων δεν υπάρχουν. Ανάλογη απόδειξη μπορεί να δοθεί και για τις διαταραχές άρτιας parity.

Η όλη διαδικασία εύρεσης αναλλοίωτων ποσοτήτων σε μετασχηματισμούς βαθμίδας είναι δυνατή αν και μόνο αν η αδιατάρακτη μετρική έχει τις κατάλληλες συμμετρίες κάτω από τέτοιους μετασχηματισμούς συντεταγμένων (όπως συμβαίνει με το χωρόχρονο Schwarzschild) και ένας αναλλοίωτος από βαθμίδες φορμαλισμός των εξισώσεων Einstein για τις διαταραχές ενός γενικού χωροχρόνου, δεν είναι πιθανός. Ωστόσο, μιας και κάθε ασυμπτωτικά επίπεδος χωροχρόνος μπορεί γενικά να ταυτιστεί με έναν χωρόχρονο Schwarzschild σε αρκετά μεγάλες αποστάσεις, ένας αναλλοίωτος σε βαθμίδες φορμαλισμός μπορεί να είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την εξαγωγή φυσικών πληροφοριών για τα βαρυτικά κύματα που παράγονται σε ένα αριθμητικά εξελίξιμο, ασυμπτωτικά επίπεδο χωροχρόνο.

Κεφάλαιο 4

Βαρυτική Ακτινοβολία από Περιστρεφόμενους Αστέρες

Στα προηγούμενα αυτό που κάναμε ήταν να παραθέσουμε κάποια κομμάτια της θεωρίας των βαρυτικών κυμάτων, με σκοπό να τα εφαρμόσουμε αργότερα σε πραγματικά μοντέλα της υπολογιστικής σχετικότητας. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξάγουμε τα βαρυτικά κύματα που εκπέμπονται από αργά περιστρεφόμενους σχετικιστικούς αστέρες, όπως είναι οι λευκοί νάνοι, οι αστέρες νετρονίων και οι αστέρες πολύ μεγάλης μάζας (supermassive stars).

Το πρόβλημα διαφέρει από αυτά που αντιμετωπίστηκαν στα προηγούμενα δύο κεφάλαια, καθώς ο χωρόχρονος έξω από τέτοια αστέρια δεν είναι καθαρά Schwarzschild, αφού οι περιστροφές προσθέτουν και μη-σφαιρικά κομμάτια στη μετρική. Αρχικά θα αναλυθεί η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε για την εξαγωγή των βαρυτικών κυμάτων από τέτοιες μετρικές. Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο για να βρούμε τη συνεισφορά των μη σφαιρικών όρων στην εκπεμπόμενη βαρυτική ακτινοβολία των αργά περιστρεφόμενων αστέρων.

4.1 Εξαγωγή Κυματομορφών σε μη-σφαιρικούς Χωροχρόνους

Υπάρχει ένα γενικό πρόβλημα στην υπολογιστική σχετικότητα όσον αφορά την εξαγωγή των εκπεμπόμενων βαρυτικών κυμάτων. Αυτό οφείλεται στο ότι με τους κώδικες μας προσπαθούμε να λύσουμε τις πλήρεις μη-γραμμικές εξισώσεις του Einstein για τις μετρικές συναρτήσεις των χωροχρόνων που δουλεύουμε, ενώ η βαρυτική ακτινοβολία μελετάται με τις γραμμικές εξισώσεις [6]. Αν κι έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι για την εξαγωγή κυματομορφών βαρυτικών κυμάτων στην υπολογιστική σχετικότητα, εμείς θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο που περιγράφεται από τους Abrahams, Bernstein, Hobill, Seidel και Smarr [6]. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί μία τεχνική εξαγωγής αναλλοίωτων από μετσηματισμούς βαθμίδας κυματομορφών (όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο) και μπορεί, θεωρητικά, να εφαρμοστεί σε κάθε χωροχρόνο που περιέχει μία απομονωμένη πηγή βαρυτικών κυμάτων. Η τεχνική αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι ο χωροχρόνος που περιβάλλει ένα διαταραγμένο αστέρι ή μελανή οπή, είναι βασικά σφαιρικός. Αν η μεταφερόμενη ενέργεια από τα βαρυτικά κύματα είναι μικρή σε σύγκριση με τη μάζα του αστέρα ή

της μελανής οπής, όπως συμβαίνει στο συγκεκριμένο πρόβλημα που θα μελετήσουμε, το όλο σύστημα μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα όπυ οι διαταραχές διαδίδονται σε ένα σφαιρικό αδιατάρακτο χωροχρόνο. Έτσι μπορούμε να εξετάσουμε το σύστημα από τη σκοπιά της θεωρίας διαταραχών των σφαιρικών χωροχρόνων, που είναι η γνωστή θεωρία από τα δύο προηγούμενα κεφάλαια.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το φορμαλισμό που προτείνουν οι Allen, Camarda, Seidel [15]. Θεωρούμε τη μετρική $g_{\alpha\beta}$ του χωροχρόνου να εκφράζεται σε ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων (t, η, θ, ϕ) , όπου η είναι η ακτινική συνιστώσα. Αυτή η μετρική μπορεί να προκύψει είτε από αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων Einstein, είτε από αριθμητικές προσομοιώσεις. Σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων μπορούμε πάντα να γράψουμε τη μετρική ως

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{\sigma\varphi} + h_{\alpha\beta} \quad (4.1)$$

όπου $g_{\alpha\beta}^{\sigma\varphi}$ είναι ο σφαιρικά συμμετρικός όρος $l = 0$, σε ένα ανάπτυγμα της $g_{\alpha\beta}$ σε σφαιρικές αρμονικές, και $h_{\alpha\beta}$ περιέχει τα ανώτερα πολύπολλα που περιγράφουν τις αποκλίσεις από τον σφαιρικά συμμετρικό όρο $l = 0$. Οι όροι $h_{\alpha\beta}$ ικανοποιούν, μέχρι και όρους δευτέρας τάξης, τις γραμμικές εξισώσεις πεδίου, γραμμικοποιημένες στην $g_{\alpha\beta}^{\sigma\varphi}$. Έτσι αν οι όροι $h_{\alpha\beta}$ είναι μικροί, δηλαδή αν $h_{\alpha\beta} \ll g_{\alpha\beta}^{\sigma\varphi}$, μπορούν να προσεγγιστούν ικανοποιητικά από μία λύση των γραμμικών εξισώσεων. Η μετρική του σφαιρικού μέρους δίνεται από τη σχέση

$$g_{\alpha\beta}^{\sigma\varphi} = \begin{pmatrix} -N^2(t, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2(t, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2(t, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2(t, \eta) \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Επόμενο βήμα είναι να περιγράψουμε τις διαταραχές $h_{\alpha\beta}$, που περιγράφουν την απόκλιση από τη σφαιρική συμμετρία, καθώς αυτές αντιπροσωπεύουν το μη-σφαιρικό μέρος της μετρικής και επομένως περιέχουν όλες τις πληροφορίες για κάθε βαρυτικό κύμα που υπάρχει στο σύστημα. Αυτό το κάνουμε αναπτύσσοντας σε σφαιρικές αρμονικές:

$$\begin{aligned} h_{tt} &= -N^2 H_0^{(lm)} Y_{lm} \\ h_{t\eta} &= H_1^{(lm)} Y_{lm} \\ h_{t\theta} &= h_0^{(lm)} Y_{lm,\theta} - c_0^{(lm)} Y_{lm,\phi} \sin \theta \\ h_{t\phi} &= h_0^{(lm)} Y_{lm,\phi} - c_0^{(lm)} \frac{Y_{lm,\theta}}{\sin \theta} \\ h_{\eta\eta} &= A^2 H_2^{(lm)} Y_{lm} \\ h_{\eta\theta} &= h_1^{(lm)} Y_{lm,\theta} - c_1^{(lm)} \frac{Y_{lm,\phi}}{\sin \theta} \\ h_{\eta\phi} &= h_1^{(lm)} Y_{lm,\phi} + c_1^{(lm)} \sin \theta Y_{lm,\theta} \\ h_{\theta\theta} &= R^2 K^{(lm)} Y_{lm} + R^2 G^{(lm)} Y_{lm,\theta\theta} + \\ &\quad + c_2^{(lm)} \frac{1}{\sin \theta} (Y_{lm,\theta\phi} - \cot \theta Y_{lm,\phi}) \\ h_{\theta\phi} &= R^2 G^{(lm)} (Y_{lm,\theta\phi} - \cot \theta Y_{lm,\phi}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{\phi\phi} = & -c_2^{(lm)} \frac{\sin \theta}{2} (Y_{lm,\theta\theta} - \cot \theta Y_{lm,\theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} Y_{lm}) \\
& + R^2 K^{(lm)} \sin^2 \theta Y_{lm} + \\
& + R^2 G^{(lm)} (Y_{lm,\phi\phi} + \sin \theta \cos \theta Y_{lm,\theta}) - \\
& - c_2^{(lm)} \sin \theta (Y_{lm,\theta\phi} - \cot \theta Y_{lm,\phi})
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Στα παραπάνω υπάρχουν εφτά συναρτήσεις άρτιας parity ($H_0^{(lm)}, H_1^{(lm)}, h_0^{(lm)}, h_1^{(lm)}, h_2^{(lm)}, K^{(lm)}, G^{(lm)}$) και τρεις περιττής parity ($c_0^{(lm)}, c_1^{(lm)}, c_2^{(lm)}$), οι οποίες είναι συναρτήσεις μόνο των t και η . Στις εξισώσεις (4.3) εννοείται άθροιση ως προς l, m ($l \geq 1, -l \leq m \leq l$).

Έχοντας το ανάπτυγμα της ολικής μετρικής $g_{\alpha\beta}$, χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των σφαιρικών αρμονικών, μπορούμε να γράψουμε τις συνιστώσες της αδιατάρακτης σφαιρικής μετρικής $g_{\alpha\beta}^{\sigma\varphi}$ με κατάλληλες ολοκληρώσεις στη 2-σφαίρα:

$$\begin{aligned}
N^2 &= -\frac{1}{4\pi} \int g_{tt} d\Omega \\
A^2 &= \frac{1}{4\pi} \int g_{\eta\eta} d\Omega \\
R^2 &= \frac{1}{8\pi} \int \left(g_{\theta\theta} + \frac{g_{\phi\phi}}{\sin^2 \theta} \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Μπορούμε να πάρουμε από τη γενική μετρική $g_{\alpha\beta}$ τις συναρτήσεις των διαταραχών ($c_0, c_1, c_2, H_0, h_1, h_2, h_0, h_1, K, G$). Οι ποσότητες αυτές βρίσκονται προβάλλοντας την ολική μετρική στην διαταραγμένη μετρική, με ολοκληρώσεις σε μία συντεταγμένη 2-σφαίρα που περιβάλλει την πηγή. Έτσι οι ποσότητες αυτές δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
c_0^{(lm)}(t, \eta) &= \frac{1}{l(l+1)} \int \frac{1}{\sin \theta} (g_{t\phi} Y_{lm,\theta}^* - g_{t\theta} Y_{lm,\phi}^*) d\Omega \\
c_1^{(lm)}(t, \eta) &= \frac{1}{l(l+1)} \int \frac{1}{\sin \theta} (g_{\eta\phi} Y_{lm,\theta}^* - g_{\eta\theta} Y_{lm,\phi}^*) d\Omega \\
c_2^{(lm)}(t, \eta) &= -\frac{2}{l(l+1)(l-1)(l+2)} \int \left\{ \left(-\frac{1}{\sin^2 \theta} g_{\theta\theta} + \frac{1}{\sin^4 \theta} g_{\phi\phi} \right) (\sin \theta Y_{lm,\theta\phi}^* - \right. \\
& \left. - Y_{lm,\phi}^*) + \frac{1}{\sin \theta} g_{\theta\phi} (Y_{lm,\theta\theta}^* - \cot \theta Y_{lm,\theta}^* - \frac{1}{\sin^2 \theta} Y_{lm,\phi\phi}^*) \right\} d\Omega \\
h_0^{(lm)}(t, \eta) &= \frac{1}{l(l+1)} \int \left\{ g_{t\theta} Y_{lm,\theta}^* + \frac{1}{\sin^2 \theta} g_{t\phi} Y_{lm,\phi}^* \right\} d\Omega \\
h_1^{(lm)}(t, \eta) &= \frac{1}{l(l+1)} \int \left\{ g_{\eta\theta} Y_{lm,\theta}^* + \frac{1}{\sin^2 \theta} g_{\eta\phi} Y_{lm,\phi}^* \right\} d\Omega \\
H_0^{(lm)}(t, \eta) &= \frac{1}{N^2} \int g_{tt} Y_{lm}^* d\Omega \\
H_1^{(lm)}(t, \eta) &= \int g_{t\eta} Y_{lm}^* d\Omega \\
H_2^{(lm)}(t, \eta) &= \frac{1}{A^2} \int g_{\eta\eta} Y_{lm}^* d\Omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{(lm)}(t, \eta) &= \frac{1}{R^2 l(l+1)(l-1)(l+2)} \int \left\{ \left(g_{\theta\theta} - \frac{g_{\phi\phi}}{\sin^2 \theta} \right) \left(Y_{lm, \theta\theta}^* - \cot \theta Y_{lm, \theta}^* - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\sin^2 \theta} Y_{lm, \phi\phi} \right) + \frac{4}{\sin^2 \theta} g_{\theta\phi} \left(Y_{lm, \theta\phi} - \cot \theta Y_{lm, \phi} \right) \right\} d\Omega \\
K^{(lm)}(t, \eta) &= \frac{l(l+1)}{2} G^{(lm)}(t, \eta) + \frac{1}{2R^2} \int \left(g_{\theta\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} g_{\phi\phi} \right) Y_{lm}^* d\Omega
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Οι συναρτήσεις (4.5) των διαταραχών της μετρικής, υπολογισμένες κατ' ευθείαν από τη μετρική, εξαρτώνται από τη βαθμίδα. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία διαταραχών αναλλοίωτων για σφαιρικούς χωροχρόνους, όπως αναπτύχθηκε από τον Moncrief [2] κ.α. και εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, με σκοπό να βρούμε άλλες συναρτήσεις διαταραχών στη θέση των (4.5), οι οποίες όμως μένουν ανεπηρέαστες από απειροστούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Έχει δειχθεί από τον Abrahams ότι ένας τέτοιος φορμαλισμός είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί στην υπολογιστική σχετικότητα για να απομονώσει τις άρτιες και περιττές parity αναλλοίωτες συναρτήσεις των βαρυτικών κυμάτων. Στην περίπτωση που το σφαιρικό μέρος της μετρικής είναι σε συντεταγμένες Schwarzschild, η κατασκευή των αναλλοίωτων συναρτήσεων θα δώσει δύο συναρτήσεις $Q_{lm}^{\times}(t, r)$, $Q_{lm}^{+}(t, r)$ οι οποίες υπακούουν τις εξισώσεις Regge-Wheeler και Zerilli αντίστοιχα, που περιγράφουν τη διάδοση βαρυτικών κυμάτων σε έναν αδιατάρακτο σφαιρικό χωροχρόνο Schwarzschild. Στην περίπτωση που το σφαιρικό μέρος της μετρικής μας δεν είναι στατικό, αλλά έχει μία χρονική εξάρτηση, μπορούν να κατασκευαστούν αναλλοίωτες συναρτήσεις πολύπολλα με $l \geq 2$ και στη συνέχεια να βρεθεί η εξέλιξη αυτών των συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τις αναλλοίωτες γραμμικοποιημένες εξισώσεις, που καταλήγουν σε γενικεύσεις των συναρτήσεων και εξισώσεων Regge-Wheeler και Zerilli.

Στην εφαρμογή που θα μελετήσουμε μπορούμε να ακολουθήσουμε τη συνταγή του Moncrief, όπως κάνουν οι Allen et al [15], και να ορίσουμε νέες αναλλοίωτες συναρτήσεις διαταραχών, οι οποίες για περιττές διαταραχές θα δώσουν τη συνάρτηση περιττής parity Q_{lm}^{\times}

$$Q_{lm}^{\times} = \sqrt{\frac{2(l+2)}{(l-2)}} \left[c_1^{(lm)} + \frac{1}{2} \left(\partial_r c_2^{(lm)} - \frac{1}{2} c_2^{(lm)} \right) \right] \frac{S}{r} \tag{4.6}$$

και για τις άρτιες διαταραχές την άρτιας parity συνάρτηση Q_{lm}^{+}

$$\begin{aligned}
Q_{lm}^{+} &= \frac{1}{\Lambda} \sqrt{\frac{2(l+2)(l-1)}{(l-2)}} \left(l(l+1) S (r^2 \partial_r G^{(lm)} - 2h_1^{(lm)}) + \right. \\
&\quad \left. + 2r S (H_2^{(lm)} - r \partial_r K^{(lm)}) + \Lambda r K^{(lm)} \right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Στις δύο παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιήσαμε τους ορισμούς

$$S = 1 - \frac{2M}{r}$$

και

$$\Lambda = (l-1)(l+2) + \frac{6M}{r}$$

Όπως αναφέραμε και παραπάνω οι δύο εξισώσεις Q_{lm}^\times και Q_{lm}^+ υπακούν στις εξισώσεις Regge-Wheeler και Zerilli αντίστοιχα, δηλαδή:

$$(\partial_t^2 - \partial_{r^*}^2)Q_{lm}^\times + V_{RW}(r)Q_{lm}^\times = 0 \quad (4.8)$$

$$(\partial_t^2 - \partial_{r^*}^2)Q_{lm}^+ + V_Z(r)Q_{lm}^+ = 0 \quad (4.9)$$

όπου $V_{RW}(r)$ είναι το δυναμικό Regge-Wheeler, που δίνεται από τη σχέση

$$V_{RW}(r) = S \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right] \quad (4.10)$$

και $V_Z(r)$ το δυναμικό Zerilli

$$V_Z = S \left[\frac{1}{\Lambda^2} \left(\frac{72M^3}{r^5} - \frac{12M}{r^3} (l-1)(l+2) \left(1 - \frac{3M}{r} \right) \right) + \frac{l(l-1)(l+1)(l+2)}{r^2 \Lambda} \right] \quad (4.11)$$

και

$$r^* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)$$

Η παραπάνω δουλειά μπορεί να χρησιμοποιηθεί με δύο τρόπους. Πρώτον, με τη μέθοδο αυτή μπορούμε να εξάγουμε κυματομορφές από μία αριθμητική προσομοίωση σε μία πεπερασμένη ακτίνα. Δεύτερον, χρησιμεύει στο να δώσει αρχικά δεδομένα για τις γραμμικοποιημένες κυματικές εξισώσεις που δώθηκαν αρχικά από τους Regge-Wheeler [1] και Zerilli [3] για περιττή και άρτια parity αντίστοιχα. Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη σύγκριση με αποτελέσματα που προκύπτουν με την πλήρη μη-γραμμική εξέλιξη των χωροχρόνων των μελανών οπών. Στην εφαρμογή μας θα ακολουθήσουμε τον πρώτο δρόμο.

4.2 Η Μετρική των Hartle-Thorne

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη συνεισφορά στη βαρυτική ακτινοβολία των μη-σφαιρικών όρων σε μία μετρική που περιγράφει αργά περιστρεφόμενους σχετικιστικούς αστέρες. Η μετρική αυτή εισήχθη το 1968 από τους James Hartle και Kip Thorne [8] για αστέρες που περιστρέφονται αργά και σαν στερεά σώματα (η έννοια του στερεού σώματος αφορά μόνο την περιστροφή του και όχι την κατάσταση της ύλης του). Η αργή περιστροφή αλλάζει τη μορφή της μετρικής, η οποία χωρίς την περιστροφή είναι η μετρική του Schwarzschild, προσθέτοντας όρους περιστροφής στις διαγώνιες συνιστώσες της μετρικής και προσθέτοντας μη διαγώνιους όρους στη μετρική. Η ανάλυση έγινε με ακρίβεια μέχρι και δευτέρας τάξης ως προς τη γωνιακή ταχύτητα. Έτσι το βαρυτικό πεδίο στο εξωτερικό ενός αργά περιστρεφόμενου αστέρα είναι

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{2J^2}{r^4} \right) \left\{ 1 + 2 \left[\frac{J^2}{Mr^3} \left(1 + \frac{M}{r} \right) + \frac{5Q - J^2/M}{M^3} Q_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1 \right) \right] P_2(\cos \theta) \right\} dt^2$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{2J^2}{r^4}\right)^{-1} \left\{1 - 2 \left[\frac{J^2}{Mr^3} \left(1 - \frac{5M}{r}\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{5Q - J^2/M}{8M^3} Q_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1\right)\right] P_2(\cos \theta)\right\} dr^2 \\
& + r^2 \left(1 + 2 \left\langle -\frac{J^2}{Mr^3} \left(1 + \frac{2M}{r}\right) + \frac{5Q - J^2/M}{8M^3} \left\{ \frac{2M}{[r(r-2M)]^{1/2}} \times \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \times Q_2^1 \left(\frac{r}{M} - 1\right) - Q_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1\right)\right\} \right\rangle P_2(\cos \theta)\right) \times \\
& \left. \times \left\{ d\theta^2 + \sin \theta \left[d\phi - \left(\frac{2J}{r^3}\right) dt \right]^2 \right\} \right. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Η παραπάνω μετρική είναι γνωστή με το όνομα μετρική των Hartle-Thorne. Σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο μπορούμε να γράψουμε τη μετρική (4.12) στη μορφή της σχέσης (4.1), όπου το στάσιμο σφαιρικό μέρος είναι η μετρική του Schwarzschild

$$g_{\alpha\beta}^{\sigma\varphi} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

συν τους όρους που ανήκουν στην περιστροφή και για αυτό θα αναφερόμαστε σε αυτούς ως το περιστροφικό μέρος, που είναι

$$\begin{aligned}
g_{tt}^{\text{περ}} & = -2 \frac{J^2}{r^4} - 2 \left(1 - \frac{2M}{r} + 2 \frac{J^2}{r^4}\right) \left[\frac{J^2}{Mr^3} \left(1 + \frac{M}{r}\right) + \right. \\
& \left. + \frac{5Q - J^2/M}{8M^3} Q_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1\right)\right] P_2(\cos \theta) + r^2 \frac{4J^2}{r^6} \sin^2 \theta + 2r^2 \left\langle -\frac{J^2}{Mr^3} \left(1 + \frac{2M}{r}\right) + \right. \\
& \left. + \frac{5Q - J^2/M}{8M^3} \left\{ \frac{2M}{[r(r-2M)]^{1/2}} Q_2^1 \left(\frac{r}{M} - 1\right) - Q_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1\right)\right\} \right\rangle \frac{4J^2}{r^6} \sin^2 \theta P_2(\cos \theta) \quad (4.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{rr}^{\text{περ}} & = -\frac{2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \frac{2M}{r} + 2 \frac{J^2}{r^4}\right)} \left\{ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{J^2}{Mr^3} \left(1 - \frac{5M}{r}\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{5Q - J^2/M}{8M^3} Q_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1\right)\right] P_2(\cos \theta) - \frac{J^2}{r^4} \right\} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{\theta\theta}^{\text{περ}} & = 2r^2 \left\langle -\frac{J^2}{Mr^3} + \frac{5Q - J^2/M}{8M^3} \left\{ \frac{2M}{[r(r-2M)]^{1/2}} Q_2^1 \left(\frac{r}{M} - 1\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - Q_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1\right)\right\} \right\rangle P_2(\cos \theta) \quad (4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{\phi\phi}^{\text{περ}} & = 2r^2 \left\langle -\frac{J^2}{Mr^3} + \frac{5Q - J^2/M}{8M^3} \left\{ \frac{2M}{[r(r-2M)]^{1/2}} Q_2^1 \left(\frac{r}{M} - 1\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - Q_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1\right)\right\} \right\rangle P_2(\cos \theta) \sin^2(\theta) \quad (4.17)
\end{aligned}$$

$$g_{t\phi}^{\text{περ}} = -\frac{4J}{r} \sin^2 \theta - \frac{8J}{r} \left\langle -\frac{J^2}{Mr^3} + \frac{5Q - J^2/M}{8M^3} \left\{ \frac{2M}{[r(r-2M)]^{1/2}} Q_2^1\left(\frac{r}{M} - 1\right) - Q_2^2\left(\frac{r}{M} - 1\right) \right\} \right\rangle P_2(\cos \theta) \sin^2(\theta) \quad (4.18)$$

όπου M, Q, J είναι η μάζα, η τετραπολική ροπή και η στροφορμή του αστέρα αντίστοιχα, $P_2(\cos \theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$ είναι τα πολυώνυμα Legendre τάξης 2 και Q_2^2, Q_2^1 είναι τα πολυώνυμα Legendre δευτέρου είδους

$$Q_2^1(x) = (x^2 - 1)^{1/2} \left[\frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} - \frac{3}{2} x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \right] \quad (4.19)$$

$$Q_2^2(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 1) \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \frac{3x^3 - 5x}{x^2 - 1} \quad (4.20)$$

και το $x = \left(\frac{r}{M} - 1\right)$ στην περίπτωση μας. Να σημειωθεί ότι $g_{\phi\phi}^{\text{περ}} = \sin^2 \theta g_{\theta\theta}^{\text{περ}}$.

4.3 Εύρεση των συναρτήσεων των διαταραχών

Επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις των διαταραχών (4.5) για τη μετρική των Hartle-Thorne. Από τη μορφή των (4.14)-(4.18) και τις (4.5) έχουμε αμέσως ότι $c_1^{(lm)} = h_1^{(lm)} = H_1^{(lm)} = 0$. Οι υπόλοιπες συναρτήσεις, για περιττή parity, δίνονται από τις σχέσεις:

$$c_0^{(lm)} = -\frac{1}{l(l+1)} \left[\frac{4J}{r} \int \sin \theta Y_{lm,\theta}^* d\Omega - \frac{4J}{r^3} T(r) \int \sin \theta P_2(\cos \theta) Y_{lm,\theta}^* d\Omega \right] \quad (4.21)$$

$$c_2^{(lm)} = c_2^{\sigma\varphi} + c_2^{\text{περ}} = \left[-\frac{2}{l(l+1)(l-1)(l+2)} \int \left(-\frac{r^2}{\sin^2 \theta} + \frac{r^2}{\sin^2 \theta} \right) (\sin \theta Y_{lm,\theta\phi}^* - Y_{lm,\phi}^*) d\Omega \right]_{\sigma\varphi} + \left[-\frac{2}{l(l+1)(l-1)(l+2)} \int \left(-\frac{T(r)}{\sin^2 \theta} + \frac{T(r)}{\sin^2 \theta} \right) (\sin \theta Y_{lm,\theta\phi}^* - Y_{lm,\phi}^*) d\Omega \right]_{\text{περ}} = 0 \quad (4.22)$$

όπου

$$T(r) = 2r^2 \left\langle -\frac{J^2}{Mr^3} \left(1 + \frac{2M}{r}\right) + \frac{5Q - J^2/M}{8M^3} \left\{ \frac{2M}{[r(r-2M)]^{1/2}} Q_2^1\left(\frac{r}{M} - 1\right) - Q_2^2\left(\frac{r}{M} - 1\right) \right\} \right\rangle$$

Το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $c_1^{(lm)}$ και $c_2^{(lm)}$ μηδενίζονται οδηγεί, σύμφωνα με τη (4.6), ότι η συνάρτηση περιττής parity $Q_{lm}^x = 0$. Οι υπόλοιπες πέντε συναρτήσεις άρτιας parity που

απομένουν είναι

$$h_0^{(lm)} = -\frac{1}{l(l+1)} \left[4\frac{J}{r} \int Y_{lm,\phi}^* d\Omega + \frac{4J}{r^3} T(r) \int P_2(\cos\theta) Y_{lm,\phi}^* d\Omega \right]_{\pi\epsilon\rho} \quad (4.23)$$

$$H_0^{(lm)} = \left[-\frac{1}{N^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \int Y_{lm}^* d\Omega \right]_{\sigma\varphi} + \left[\frac{1}{N^2} \frac{2J^2}{r^4} \int Y_{lm}^* d\Omega - \frac{K(r)}{N^2} \int P_2(\cos\theta) Y_{lm}^* d\Omega + \frac{1}{N^2} \frac{4J^2}{r^4} \int \sin^2\theta Y_{lm}^* d\Omega + \frac{T(r)}{N^2} \frac{4J^2}{r^6} \int \sin^2\theta P_2(\cos\theta) Y_{lm}^* d\Omega \right]_{\pi\epsilon\rho} \quad (4.24)$$

$$H_2^{(lm)} = \left[\frac{1}{A^2} \left(1 - 2Mr \right) \int Y_{lm}^* d\Omega \right]_{\sigma\varphi} + \left[-L(r) \int P_2(\cos\theta) Y_{lm}^* d\Omega - \frac{1}{A^2} \frac{2J^2/r^4}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{2J^2}{r^4} \right)} \int Y_{lm}^* d\Omega \right]_{\pi\epsilon\rho} \quad (4.25)$$

$$G^{lm} = 0 \quad (4.26)$$

$$K^{(lm)} = \left[\int Y_{lm}^* d\Omega \right]_{\sigma\varphi} + \left[\frac{T(r)}{r^2} \int P_2(\cos\theta) Y_{lm}^* d\Omega \right]_{\pi\epsilon\rho} \quad (4.27)$$

όπου οι συναρτήσεις $T(r)$ και $L(r)$ ορίζονται ως εξής

$$T(r) = 2r^2 \left\langle -\frac{J^2}{Mr^3} \left(1 + \frac{2M}{r} \right) + \frac{5Q - J^2/M}{8M^3} \left\{ \frac{2M}{[r(r-2M)]^{1/2}} Q_2^1\left(\frac{r}{M} - 1\right) - Q_2^2\left(\frac{r}{M} - 1\right) \right\} \right\rangle$$

$$L(r) = \frac{1}{A^2} \frac{2}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{2J^2}{r^4} \right)} \left(\frac{J^2}{Mr^3} \left(1 - \frac{5M}{r} \right) + \frac{5Q - J^2/M}{8M^3} Q_2^2\left(\frac{r}{M} - 1\right) \right)$$

και επίσης

$$N^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)$$

$$A^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}$$

Για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση Q_{lm}^+ χρειαζόμαστε τις συναρτήσεις H_2 και K . Τα ολοκληρώματα που εμπεριέχονται σε αυτές τις συναρτήσεις εξαρτώνται μόνο από τις γωνίες. Για τον υπολογισμό τους κάνουμε χρήση των σχέσεων ορθογωνιότητας των σφαιρικών αρμονικών [13][14]

$$\int Y_{lm} Y_{l'm'}^* d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (4.28)$$

Επίσης από τις σχέσεις

$$P_2(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \quad (4.29)$$

προκύπτει ότι

$$P_2(\cos \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \quad (4.30)$$

Γνωρίζοντας ακόμα ότι η σφαιρική αρμονική Y_{00} ισούται με μία σταθερά, για την ακρίβεια $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, γίνεται εμφανές ότι οι όροι που ανήκουν στο σφαιρικό κομμάτι των συναρτήσεων διαταραχών θα παραλειφθούν, αφού όλοι θα περιέχουν τον όρο

$$\int Y_{lm}^* d\Omega = \sqrt{4\pi} \int Y_{00} Y_{lm}^* d\Omega$$

δηλαδή αντιστοιχούν σε $l = m = 0$. Η ταλάντωση αυτή είναι μία καθαρά ακτινική ταλάντωση, η οποία όμως είναι στάσιμη και δε μεταδίδεται. Για το λόγο αυτό οι όροι αυτοί παραλείπονται αφού δεν παριστάνουν κύματα.

Άρα στην συνάρτηση Q_{lm}^+ θα εμφανίζονται μόνο οι όροι που οφείλονται στο περιστροφικό μέρος της μετρικής. Εδώ να σημειώσουμε ότι το πρόβλημα που μελετάμε ξεφεύγει λίγο από μία από τις απαιτήσεις της μεθόδου του Abrahams [6], που προϋποθέτει ότι α) το στάσιμο μέρος της μετρικής, οι όροι δηλαδή των μονοπόλων για $l = 0, l = 1$ που δεν αποτελούν διαδιδόμενες διαταραχές, είναι καθαρά σφαιρικό και β) οι διαδιδόμενοι όροι των πολυπόλων που περισσεύουν αποτελούν τις διαταραχές μας. Όμως το στάσιμο μέρος της μετρικής μας δεν είναι καθαρά σφαιρικό αφού περιέχει και τις περιστροφές. Αν προσθέταμε διαταραχές στη μετρική μας τότε οι εξισώσεις που θα παίρναμε θα έδιναν ως κύματα τις διαταραχές της μετρικής συν έναν στατικό όρο, εξαρτώμενο μόνο από την απόσταση, ο οποίος προέρχεται από μη σφαιρικό στατικό μας κομμάτι της μετρικής. Αυτό το ολικό κύμα είναι οι συναρτήσεις Q_{lm} . Αν τώρα δεν βάλουμε διαταραχές αλλά έχουμε σχέση τη μετρική μας (4.12), τότε οι εξισώσεις δίνουν ως Q μόνο τον στατικό όρο των περιστροφών. Στις προσωμειώσεις που κάνουμε ο στατικός αυτός όρος εμφανίζεται σαν ένα κατέβασμα ή ανέβασμα των κυματομορφών που παίρνουμε, γι' αυτό στην υπολογιστική είναι γνωστό ως στατικό σφάλμα και συμβολίζεται ως δQ_{lm} . Αυτό τον όρο ψάχνουμε κι εμείς να βρούμε, γιατί αν είναι γνωστός αυτός ο όρος, τότε από την ολική κυματομορφή Q_{lm}^+ που παίρνουμε από τις προσωμειώσεις μας για έναν διαταραγμένο περιστρεφόμενο αστέρα, μπορούμε να αναφερόμαστε το στατικό σφάλμα και να πάρουμε την καθαρή μορφή του κύματος που προκύπτει. Στα παρακάτω θα αναφερόμαστε λοιπόν στη συνάρτηση Q_{lm}^+ που δίνουν οι περιστροφές ως στάσιμο σφάλμα της συνάρτησης άρτιας parity και θα τη συμβολίζουμε δQ_{lm}^+ . Με βάση τις σχέσεις (4.25), (4.27) και (4.28) το μόνο στάσιμο σφάλμα δQ_{lm} που συνεισφέρει στη βαρυτική ακτινοβολία είναι αυτό που αντιστοιχεί στις τιμές $l = 2, m = 0$. Συνδιάζοντας τις σχέσεις (4.7), (4.25) και (4.27) παίρνουμε το σφάλμα δQ_{lm}^+ , για τις άρτιας parity συναρτήσεις διαταραχών, που αποτελεί τη συνεισφορά της περιστροφής στην εκπομπή βαρυτικών κυμάτων. Έτσι:

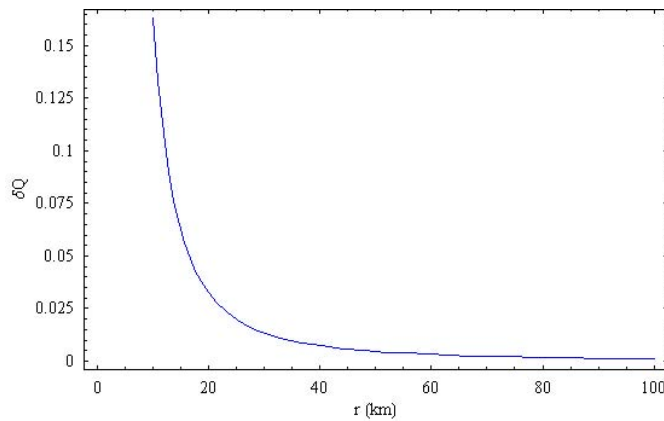
$$\begin{aligned} \delta Q_{lm}^+ &= \frac{1}{\Lambda} \sqrt{\frac{2(l-1)(l+2)}{l(l+1)}} 2r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \times \\ &\times \left\{ -2 \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{\left(1 - \frac{2M}{r} + 2\frac{J^2}{r^4}\right)} \left[Mr^3 \left(1 - \frac{5M}{r}\right) + \frac{5Q - J^2/M}{M^3} Q^2 \right] \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \delta_{2l} \delta_{0m} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -r \left[\frac{2J^2}{Mr^4} + \frac{8J^2}{r^5} + 5 \frac{MQ - J^2/M}{r M^3} \frac{1}{[r(r-2M)]^{1/2}} Q_2^1 + \right. \\
& + \frac{5Q - J^2/M}{2 M^3} \frac{M}{[r(r-2M)]^{1/2}} \frac{\partial Q_2^1}{\partial r} - \frac{5Q - J^2/M}{2 M^3} \frac{M}{[r(r-2M)]^{3/2}} (r-M) Q_2^1 - \\
& \left. \frac{5Q - J^2/M}{2 M^3} \frac{Q_2^2}{r} - \frac{5Q - J^2/M}{4 M^3} \frac{\partial Q_2^2}{\partial r} \right] \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \delta_{2l} \delta_{0m} + \\
& + 4 \left[-\frac{J^2}{Mr^3} \left(1 + \frac{2M}{r}\right) + \frac{5Q - J^2/M}{8 M^3} \left(\frac{2M}{[r(r-2M)]^{1/2}} Q_2^1 - Q_2^2 \right) \right] \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \delta_{2l} \delta_{0m} \} \\
& + \sqrt{\frac{2(l-1)(l+2)}{l(l+1)}} 2r \left[-\frac{J^2}{Mr^3} \left(1 + \frac{2M}{r}\right) + \right. \\
& \left. + \frac{5Q - J^2/M}{8 M^3} \left(\frac{2M}{[r(r-2M)]^{1/2}} Q_2^1 - Q_2^2 \right) \right] \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \delta_{2l} \delta_{0m} \quad (4.31)
\end{aligned}$$

όπου το σφάλμα δQ^+ είναι μία συνάρτηση των (r, M, J, Q) , $\delta Q_{20}^+(r, M, J, Q)$ και φυσικά $l = 2, m = 0$.

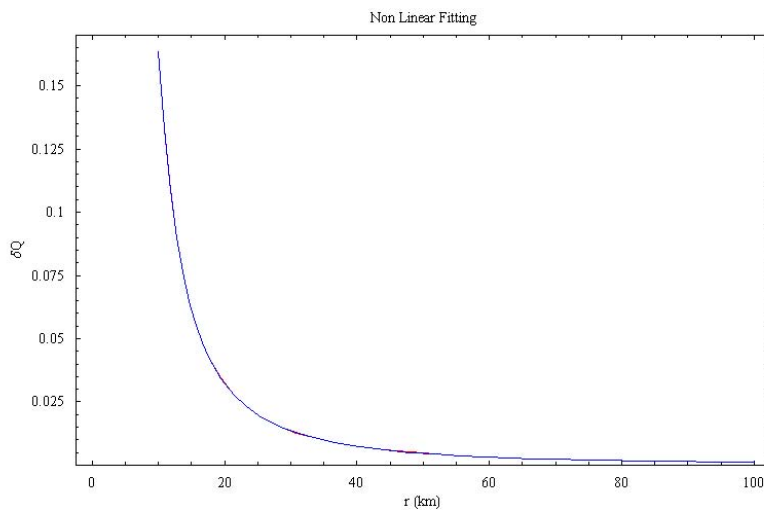
4.4 Πολυωνυμικό ανάπτυγμα του στατικού σφάλματος

Η μορφή της (4.32) είναι προφανώς δυσκολόχρηστη. Για το λόγο αυτό μελετήσαμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (4.31) με τη βοήθεια της *Mathematica* [20]. Η γραφική παράσταση έγινε για έναν περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων, ακτίνας λίγο μικρότερης από 10 km, για αποστάσης από 10 km, λίγο πιο έξω από τον αστέρα, έως τα 100 km. Τα χαρακτηριστικά αυτού του αστέρα φαίνονται στον πίνακα (4.1) (ο αστέρας που χρησιμοποιήσαμε είναι ο πρώτος αστέρας αυτού του πίνακα). Η γραφική παράσταση που παίρνουμε φαίνεται στο σχήμα 4.1. Η



Σχήμα 4.1: Γραφική παράσταση στάσιμου σφάλματος για έναν αστέρα μάζας 2.075 km και ακτίνας $r = 9.8 \text{ km}$.

μορφή της καμπύλης που παίρνουμε δείχνει μία ομαλά, φθίνουσα συνάρτηση χωρίς ακρότατα. Από τις προσωμειώσεις που κάνουμε, έχουμε την υποψία ότι αυτή η καμπύλη πρέπει να πέφτει καθώς μεγαλώνει το r ως μία συνάρτηση $\frac{1}{r^3}$ με $\frac{1}{r^4}$. Επομένως δοκιμάσαμε να κάνουμε ένα μη-γραμμικό fitting στη συνάρτηση μας για $\frac{1}{r^4}$ για 19 σημεία της καμπύλης που πήραμε με τον προηγούμενο αστέρα, από 10-100 km με διάστημα 5km. Δοκιμάσαμε και για $\frac{1}{r^3}$, όμως η $\frac{1}{r^4}$ μας έδωσε καλύτερα αποτελέσματα. Στο σχήμα 4.2 φαίνονται οι δύο καμπύλες, η αναλυτική μορφή του σφάλματος και αυτή που προκύπτει από το fitting. Όπως διαπιστώνουμε παίρνουμε μία σχεδόν



Σχήμα 4.2: Σύγκριση μεταξύ της αναλυτικής συνάρτησης του στάσιμου σφάλματος και αυτής που προκύπτει από το fitting. Με μπλε είναι η αναλυτική μορφή και με κόκκινο το fitting.

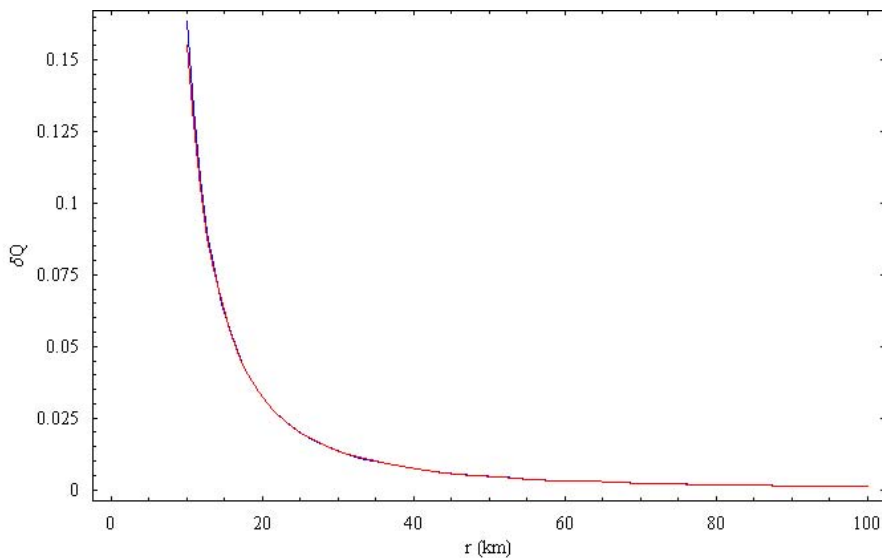
τέλεια ταύτιση. Το ευτυχές αυτό αποτέλεσμα μας οδηγεί στη δυνατότητα να αναπτύξουμε το στατικό σφάλμα σαν συνάρτηση Taylor ως προς $\frac{1}{r}$ μέχρι τετάρτης τάξης. Για τον υπολογισμό αυτό κάναμε έναν μετασχηματισμό μεταβλητών $\frac{1}{r} = x$, για να μπορέσει η *Mathematica* [20] να βρει αυτό το ανάπτυγμα. Βεβαίως για να αναπτύξουμε σε Taylor χρειαζόμαστε ένα σταθερό σημείο γύρω από το οποίο θα πάρουμε αυτό το ανάπτυγμα. Εφ' όσον οι υπολογισμοί που κάνουμε είναι για αποστάσεις πολύ μακρινές από τον αστέρα, πρακτικά μπορούμε να τις θεωρήσουμε άπειρες και με τη σκέψη αυτή να αναπτύξουμε στο $r = \infty$ ή $x = 0$. Υπολογίζοντας το ανάπτυγμα αυτό βρήκαμε

$$\begin{aligned} \delta Q_{\text{αναπτ}}^+ = & -\left[8\sqrt{\frac{3\pi}{5}}Q\right]\frac{1}{r^2} + \left[4\sqrt{\frac{\pi}{15}}[11J^2 - 4MQ]\right]\frac{1}{r^3} + \\ & \left[\frac{2M}{7}\sqrt{\frac{\pi}{15}}[114J^2 - 261MQ]\right]\frac{1}{r^4} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Από την εξίσωση (4.32) φαίνεται ότι ο επικρατέστερος όρος του αναπτύγματος είναι ο $1/r^2$, με συντελεστή $-8\sqrt{\frac{3\pi}{5}}Q$. Με βάση αυτό περιμένουμε ότι η κύρια μορφή του στατικού σφάλματος

θα εξαρτάται από τον όρο αυτό και επειδή αυτός ο όρος είναι ευθέως ανάλογος της τετραπολικής ροπής Q , αυτή είναι που στην ουσία θα επηρεάζει τα κύρια χαρακτηριστικά της συνάρτησης του στατικού σφάλματος.

Για να δούμε την ακρίβεια του αναπτύγματος, σχεδιάσαμε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική μορφή του στατικού σφάλματος και αυτήν που προκύπτει από το ανάπτυγμα. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.3 η ακρίβεια είναι εξαιρετική για 3 ακτίνες και πάνω. Ακόμα και για αποστάσεις αρκετά κοντά στον αστέρα, η απόκλιση του αναπτύγματος από την αναλυτική μορφή του στάσιμου σφάλματος είναι μέσα στα όρια σφάλματος που μπορούμε να έχουμε. Παρ' όλα αυτά στους υπολογισμούς που κάνουμε ποτέ δεν πλησιάζουμε κοντά στον αστέρα. Οι μετρήσεις μας ξεκινούν μετά τις 4 ακτίνες από τον αστέρα, όπου η μορφή του αναπτύγματος δεν διαφέρει καθόλου από την αναλυτική σχέση (4.31).



Σχήμα 4.3: Σύγκριση αναλυτικής συνάρτησης στάσιμου σφάλματος και του αναπτύγματος του. Με μπλε είναι η αναλυτική μορφή και κόκκινο το ανάπτυγμα.

4.5 Σύγκριση της καμπύλης στάσιμου σφάλματος για διαφορετικούς αστέρες

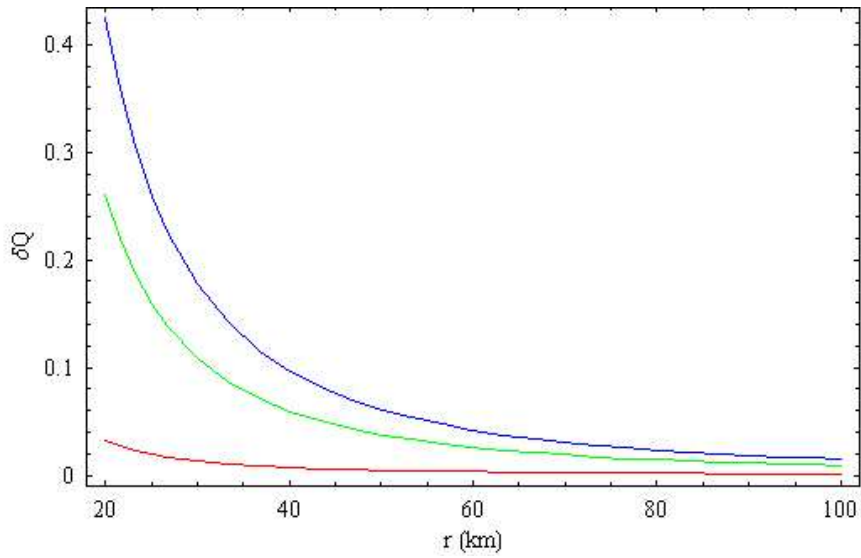
Τελικό στάδιο της εργασίας μας είναι να δούμε πως μεταβάλλεται η μορφή του στάσιμου σφάλματος από αστέρα σε αστέρα και τι καθορίζει την εξάρτηση αυτή. Οι αστέρες που χρησιμοποιήθηκαν είναι περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων, που τους πήραμε από την εργασία των Berti και Stergioulas [5]. Από αυτούς διαλέξαμε έναν συγκεκριμένο αριθμό, τα χαρακτηριστικά των οποίων δίνονται στον πίνακα (1).

EOS	M (M_{\odot})	r (km)	Q km^3	J km^2
EOS A	$M_B = 1.589M_{\odot}$			
	1.405	9.741	-1.001	0.8121
	1.424	11.12	-8.063	2.307
	1.435	12.64	-13.13	2.925
EOS A	$M_B = 2.038M_{\odot}$			
	1.742	8.892	-3.489	2.598
	1.751	9.633	-5.653	3.076
	1.782	11.76	-14.09	4.462
EOS L	$M_B = 1.510M_{\odot}$			
	1.404	15.14	-3.671	0.9726
	1.415	17.05	-21.42	2.466
	1.422	19.97	-34.06	3.179
EOS L	$M_B = 3.470M_{\odot}$			
	2.929	14.86	-24.16	8.839
	2.952	16.22	-38.85	10.44
	2.996	18.54	-69.78	13.32

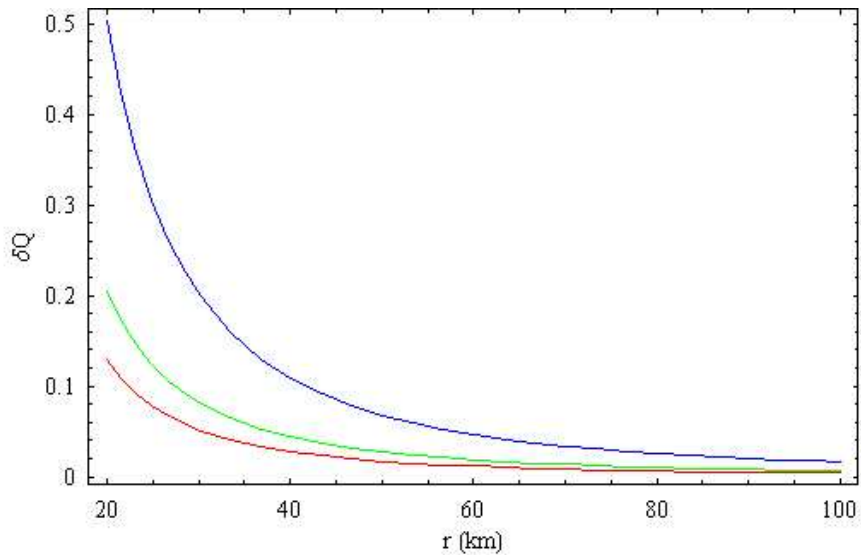
Πίνακας 4.1: Πίνακας τεσσάρων ακολουθιών αστέρων νετρονίων διαφορετικών βαρυονικών μαζών, όπου οι δύο πρώτες αντιστοιχούν στην EOS A και οι άλλες δύο στην EOS L.

Στον πίνακα αυτό βλέπουμε τέσσερις ακολουθίες αστέρων νετρονίων που ανά δύο υπακούουν στις ίδιες καταστατικές εξισώσεις (οι δύο πρώτες ακολουθίες υπακούουν στην καταστατική εξίσωση A και οι άλλες δύο στην καταστατική εξίσωση L (Για περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να δείτε την εργασία των Berti και Stergioulas [5])). Από τις ακολουθίες των αστέρων της εργασίας των Berti και Stergioulas [5] πήραμε μόνο τρεις αστέρες ως ενδεικτικούς για να κάνουμε τη μελέτη μας. Η κάθε ακολουθία χαρακτηρίζεται από τη βαρυονική μάζα M_B , που είναι το άθροισμα των μαζών ηρεμίας των βαρυονίων που αποτελούν τον αστέρα χωρίς να υπολογίζουμε την ενέργεια σύνδεσης, καθώς κάθε αστέρας καθώς χάνει ενέργεια και στροφορμή για διάφορους λόγους, όπως βαρυτική ακτινοβολία ή ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, θα πρέπει να εξελίσσεται διατηρώντας τον ολικό αριθμό βαρυονίων, κι επομένως την βαρυονική του μάζα.

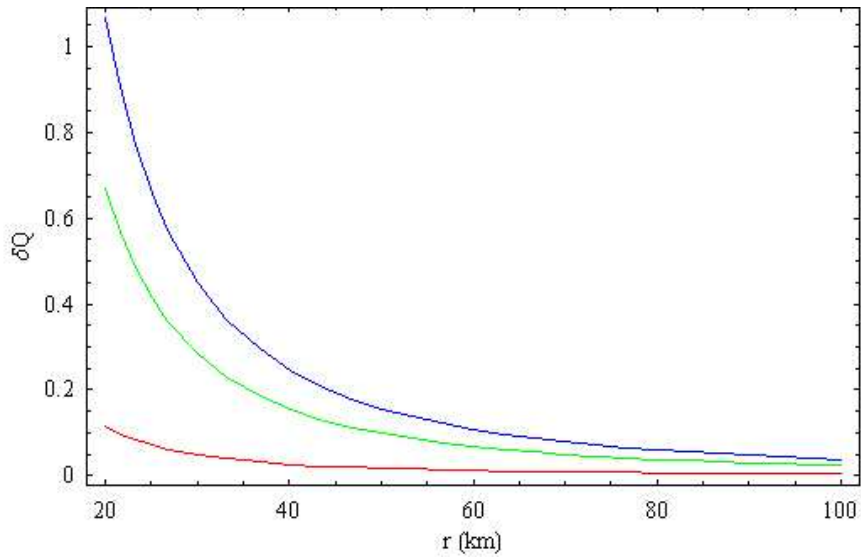
Σχεδιάσαμε τέσσερις γραφικές παραστάσεις, μία για κάθε ακολουθία, οι οποίες περιέχουν τρεις καμπύλες, μία για κάθε αστέρα. Από τις γραφικές παραστάσεις είναι εμφανής η επίδραση της τετραπολικής ροπής του αστέρα στο πόσο απέχει από τον άξονα των r , και από ποια απόσταση αρχίζει να γίνεται οριζόντια ως προς αυτόν. Φυσικά οι τιμές που παίρνουν οι καμπύλες εξαρτώνται και από τα μεγέθη της μάζας M και της στροφορμής Q . Τέλος το γεγονός ότι οι τιμές του στάσιμου σφάλματος είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με αυτές που παίρνουμε από τις προσωμειώσεις, μας εξασφαλίζει ακόμα περισσότερο ότι το αποτέλεσμα που πήραμε ήταν σωστό.



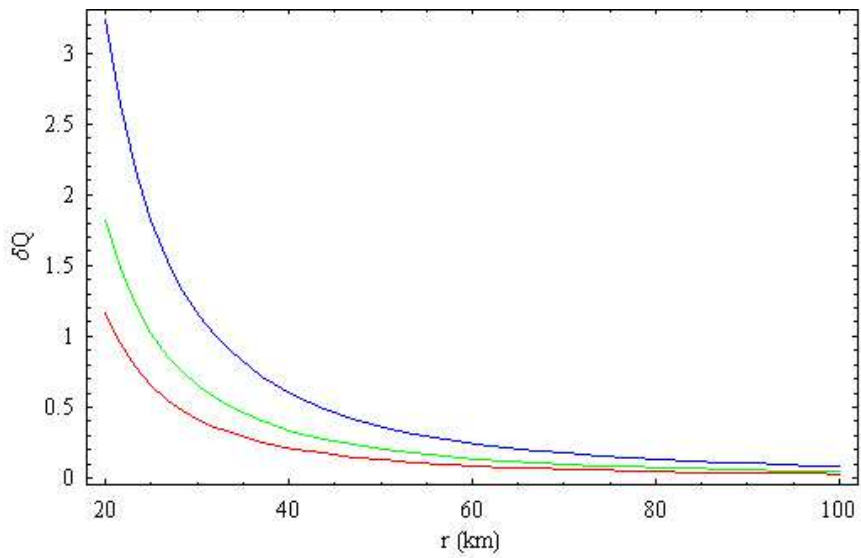
Σχήμα 4.4: Σύγκριση της καμπύλης στάσιμου σφάλματος για τους τρεις αστέρες της πρώτης ακολουθίας του πίνακα (4.1), για βαρυονικό αριθμό $M_B = 1.589M_\odot$. Η κόκκινη καμπύλη αντιστοιχεί στον πρώτο αστέρα της ακολουθίας, η πράσινη στο δεύτερο και η μπλε στον τρίτο (βαρύτερο) αστέρα της ακολουθίας.



Σχήμα 4.5: Ομοίως για την δεύτερη ακολουθία του πίνακα (4.1), για βαρυονικό αριθμό $M_B = 2.038M_\odot$. Η κόκκινη καμπύλη αντιστοιχεί στον πρώτο αστέρα της ακολουθίας, η πράσινη στο δεύτερο και η μπλε στον τρίτο (βαρύτερο) αστέρα της ακολουθίας.



Σχήμα 4.6: Ομοίως για την τρίτη ακολουθία του πίνακα (4.1), για βαρυονικό αριθμό $M_B = 1.510M_\odot$. Η κόκκινη καμπύλη αντιστοιχεί στον πρώτο αστέρα της ακολουθίας, η πράσινη στο δεύτερο και η μπλε στον τρίτο (βαρύτερο) αστέρα της ακολουθίας.



Σχήμα 4.7: Ομοίως για την τέταρτη ακολουθία του πίνακα (4.1), για βαρυονικό αριθμό $M_B = 3.470M_\odot$. Η κόκκινη καμπύλη αντιστοιχεί στον πρώτο αστέρα της ακολουθίας, η πράσινη στο δεύτερο και η μπλε στον τρίτο (βαρύτερο) αστέρα της ακολουθίας.

4.6 Συμπεράσματα

Το βασικότερο συμπέρασμα της εργασίας μας είναι ότι καταφέραμε να βρούμε έναν ακριβή τύπο που να υπολογίζει το στάσιμο σφάλμα των περιστροφών στην εκμπεμπόμενη βαρυτική ακτινοβολία ενός περιστρεφόμενου αστέρα. Αυτό το σφάλμα βρήκαμε ότι εξαρτάται από τη μάζα M του αστέρα, την τετραπολική του ροπή Q και τη στροφορμή του J . Επίσης επαληθεύσαμε την παρατήρηση που παίρναμε από τις προσωμειώσεις, ότι το στάσιμο σφάλμα πέφτει όσο απομακρυνόμαστε από την επιφάνεια του αστέρα ως $\frac{1}{r^4}$. Αναπτύσσοντας σε ένα πολυώνυμο τετάρτης τάξης ως προς $\frac{1}{r^4}$, διαπιστώσαμε ότι για μεγάλες αποστάσεις, στις αποστάσεις περίπου που μετράμε, ο κυρίαρχος όρος του αναπτύγματος είναι ο $\frac{1}{r^2}$. Καθώς ο όρος αυτός είναι ανάλογος της τετραπολικής ροπής, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η κύρια μορφή του στάσιμου σφάλματος ενός περιστρεφόμενου αστέρα εξαρτάται από την τιμή της τετραπολικής του ροπής.

Βιβλιογραφία

- [1] T. Regge, J. A. Wheeler, *Stability of a Schwarzschild Singularity*, Phys. Rev. 108, 1063 (1957).
- [2] V. Moncrief, *Gravitational Perturbations of Spherically Symmetric Systems.I.The Exterior Problem*, Annals of Physics, 88, 323 (1974)
- [3] F. J. Zerilli, *Gravitational Field of a Particle Falling in a Schwarzschild Geometry Analyzed in Tensor Harmonics*, Phys. Rev. D 2, 2141 (1970)
- [4] G. Allen, *Extracting Gravitational Waves and Other Quantities from Numerical Spacetimes*
- [5] E. Berti, N. Stergioulas, *Aproximate Matching of Analytic and Numerical Solutions for Rapidly Rotating Neutron Stars*, Mon. Not. R. Astron. Soc. 350, 1416 (2004)
- [6] A. Abrahams, D. Bernstein, D. Hobill, E. Seidel, L. Smarr, *Numerically Generated Black-Hole Spacetimes: Interactions with Gravitational Waves*, Phys. Rev. D 45, 3544 (1992)
- [7] M. Shibata, Y. Sekiguchi, *Three-dimensional Simulations of Stellar Core Collapse in Full General Relativity: Nonaxisymmetric Dynamical Instabilities*, Phys. Rev D 71, 024014 (2005)
- [8] J. B. Hartle, K. S. Thorne, *Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars*, The Astrophysical Journal 153, 807 (1968)
- [9] A. Nagar, L. Rezzolla, *Gauge-Invariant Non Spherical Metric Perturbations of Schwarzschild Spacetime* (2005)
- [10] J. B. Hartle, *Gravity:An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison-Wesley, San Francisco (2003)
- [11] R. D' Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, Oxford (1992)
- [12] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Frieman and Co, New York (1970)
- [13] Hobson, *Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Cambridge University Press (1951)

-
- [14] Mc Robert, *Spherical Harmonics*, Second Revised Edition, Dover Publications .Inc, New York (1948)
- [15] G. Allen, K. Camarda, E. Seidel, *Evolution of Distorted Black Holes: Perturbative Approach* (2004)
- [16] L. Rezzolla, *Gravitational Waves from Perturbed Black Holes and Relativistic Stars* (2002)
- [17] M. Kawamura, K. Oohara, *Gauge-Invariant Gravitational Wave Extraction from Coalescing Binary Neutron Stars* (2004)
- [18] B. F. Schutz, *Γενική Σχετικότητα*, Π. Τραυλός -Ε. Κωσταράκη (1997)
- [19] Ν. Κ. Σπύρου, *Εισαγωγή στη Γενική θεωρία της Σχετικότητας*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Θεσσαλονίκη (1989)
- [20] Σ. Τραχανάς, *Mathematica και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (2001)