Διπλωματική Εργασία

Μοντέλα Ταχέως Περιστρεφόμενων Αστέρων Νετρονίων

Πασχαλίδης Βασίλειος
Α.Ε.Μ.: 10188

Κατεύθυνση Αστρονομίας – Αστροφυσικής
Επιβλέποντες Καθηγητές: Κ. Κόκκοτας, Ν. Στεργιούλας

8 Ιουλίου 2003

Πλάνο Παρουσίασης

- Ιστορική Αναδρομή
- Βασική Θεωρία Περιστρεφόμενων Αστέρων
- Ανάπτυξη της Μεθόδου Αυτοσυνεπούς Πεδίου του Izumi Hachisu (Hachisu Self-Consistent Field Method, HSCF)
- Παρουσίαση Αποτελεσμάτων
- Επεκτάσεις της Μεθόδου

Ιστορική Αναδρομή

- (1687) Isaac Newton: *"Μαθηματικές Αρχές Φυσικής Φιλοσοφίας"* - Πρώτες συζητήσεις Σφαιροειδών
- (1737-1743) Alexis-Claude Clairaut & Colin Maclaurin: Πρώτες σωστές υποθέσεις για συνθήκες ισορροπίας
- (1755) Leonard Euler: Γενικές εξισώσεις κίνησης ρευστού χωρίς ιξώδες
- (1773-1793)
- Andrieu-Marie Legendre: Εισαγωγή του βαρυτικού δυναμικού,
- Marquis Pierre-Simon de Laplace: Εισαγωγή βαρότροπων και λύση σφαιρικού πολύτροπου με δείκτη N=1. $P = K\rho^2$
- (1829) Denis Poisson: Εξίσωση Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$

Ιστορική Αναδρομή

- (1834) Karl Jacobi: Καταστάσεις ισορροπίας αποτελούν όχι μόνο τα σφαιροειδή αλλά και τα τριαξονικά ελλειψοειδή
- (1854-1912)
- Henri Poincare: Θεμελίωση της θεωρίας ισορροπίας και ευστάθειας των ελλειψοειδών δομών
- Alexandr Mikhailovich Liapunov: Ύπαρξη δομών με σχήμα αχλαδιού (pear-shaped configurations)
- (1896-1949)
- Rolin Wavre: Βασικά θεωρήματα και τεχνικές ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων
- Pierre Dive: Πρώτες μελέτες της διαφορικής περιστροφής

Θεωρία Περιστρεφόμενων Αστέρων

<u>Βασικές Υποθέσεις</u>

- Ο αστέρας είναι απομονωμένος στο χώρο και περιστρέφεται γύρω από ένα καθορισμένο άξονα με κάποια ακαθόριστη γωνιακή ταχύτητα.
- Το σύστημα είναι στατικό όταν παρατηρείται από αδρανειακό σύστημα αναφοράς και η πυκνότητα της κάθε στοιχειώδους μάζας (mass-element) παραμένει σταθερή καθώς ακολουθούμε την κίνησή της.
- Τα φαινόμενα ιξώδους είναι αμελητέα
- Τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα είναι αμελητέα
- Ο αστέρας βρίσκεται σε κατάσταση <u>Μόνιμης Περιστροφής</u>

Μόνιμη Περιστροφή=> Αξονική Συμμετρία

Κυλινδρικές Συντ/νες: ϖ, φ, z

Ταχύτητα: $\upsilon_\varpi = 0,\ \upsilon_\phi = \Omega\varpi,\ \upsilon_z = 0 \quad (1)$

Εξίσωση συνέχειας: $\left\{\begin{aligned} &\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, div\vec{\upsilon} = 0 \\ &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\upsilon}\cdot grad\rho + \rho\, div\vec{\upsilon} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\frac{D\rho}{Dt} = 0 \\ &\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &div\vec{\upsilon} = 0 \\ &\vec{\upsilon}\cdot grad\rho = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\Omega}{\partial\phi} = 0 \\ &\Omega\frac{\partial\rho}{\partial\phi} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\Omega = \Omega(\varpi, z) \\ &\rho = \rho(\varpi, z) \end{aligned}\right.$$

Μερικοί Ορισμοί

- <u>Βαρότροπο: P=P(ρ)</u>
  <u>π.χ.</u> $P = K \rho^{1+1/N}$

- Βαροκλινές: P=P(ρ,T,α,β,γ,λ,μ,…)

- Ψεύδο-βαρότροπο: P=P(ρ,T,α,β,γ,λ,μ,…) και Ω=Ω(ϖ)

- Θα ασχοληθούμε με:
  βαρότροπο: P=P(ρ) και Ω=Ω(ϖ)

Δύο Βασικά Θεωρήματα

- **<u>Θεώρημα Poincaré-Wavre:</u>**
  Για έναν αστέρα σε κατάσταση μόνιμης περιστροφής κάθε μια από τις ακόλουθες προτάσεις συνεπάγεται τις άλλες τρείς:
  (i) η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή πάνω σε κυλινδρικές επιφάνειες με άξονα τον άξονα περιστροφής του αστέρα
  (ii) η ενεργός επιτάχυνση της βαρύτητας μπορεί να προέρχεται από δυναμικό
  (iii) η ενεργός επιτάχυνση της βαρύτητας είναι κάθετη στις ισόπυκνες επιφάνειες
  (iv) οι ισοβαρείς, ισόπυκνες και ισοδυναμικές επιφάνειες ταυτίζονται

- **<u>Θεώρημα Lichtenstein:</u>**
  <u>Ένας διαφορικά (ή μη) περιστρεφόμενος βαροτροπικός αστέρα θα έχει πάντοτε επίπεδο συμμετρίας κάθετο στον άξονα περιστροφής του, αν η γωνιακή του ταχύτητα είναι ανεξάρτητη από το z</u>

Τα μοντέλα μας για τους αστέρες νετρονίων

- Μόνιμη Περιστροφή
- Είναι βαρότροπα P=P(ρ)
- Η γωνιακή ταχύτητα είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης από τον άξονα περιστροφής Ω=Ω(ϖ)

- Επομένως

- Έχουν αξονική συμμετρία
- Παρουσιάζουν ισημερινό επίπεδο συμμετρίας

Καθορισμός Μοντέλου

- Από
- (i) Συνολική Μάζα
  (ii) Συνολική Στροφορμή ή
  (iii) Πεδίο Περιστροφής

$$\tau = \frac{T}{|W|}$$

- (i) Λόγος αξόνων
  (ii) Μέγιστη πυκνότητα
  (iii) Πεδίο Περιστροφής

Μερικές Ανισώσεις

- <u>Παράγων Ευστάθειας τ</u>
- Βαθμωτό Θεώρημα Virial: $2T - |W| + 3\int p\, d^3 r = 0$

Όμως $\int p\, d^3 r \geq 0$

Άρα $0 \leq \tau = \dfrac{T}{|W|} \leq 0.5$

- <u>Γωνιακή Ταχύτητα</u>
- Για τα σφαιροειδή Maclaurin αποδεικνύεται:
- Θεωρητικά από την εξίσωση Poisson: $\Omega^2 < \pi G \bar{\rho}$
- Αριθμητικά $\Omega^2 \leq \Omega^2_{\max} \approx 0.45\, G \bar{\rho}$

Δεν είναι το ολοκλήρωμα του Bernouli

μη Περιγραφή της Μεθόδου HSCF

- Από τις εξ ώσεις Euler $\dfrac{Du}{Dt} = f - \nabla p = -\nabla \Phi - \nabla p$

$$\boxed{\int \rho^{-1} dP + \Phi - \int \Omega^2 \varpi d\varpi = C, \qquad H = \int \rho^{-1} dP}$$

- Καταστατική Εξίσωση Πολυτροπική: $P = K \rho^{1+1/N}$

- Σχέση πυκνότητας ενθαλπίας

$$\boxed{\rho = \left(\frac{H}{K(N+1)} \right)^N}$$

Σύντομη Περιγραφή της Μεθόδου HSCF

- Νόμοι Περιστροφής
- (i) περιστροφή ως στερεο

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 \ (= \sigma\tau\alpha\theta\ .)$$

- (ii) Διαφορική υ-σταθερή Περιστροφή

$$\Omega^2 = \frac{\upsilon_0^2}{d^2 + \varpi^2}$$

- Ο ολοκληρωτικός όρος στην εξίσωση ισορροπίας γράφεται
- $-\int \Omega^2 \varpi d\varpi = h_0^2 \Psi(\varpi)$, όπου

$$\Psi(\varpi) = \begin{cases} -\varpi^2/2, & (\sigma\tau\varepsilon\rho\varepsilon\acute{o}) \\ -(1/2)\ln(1+\varpi^2/d^2), & (\upsilon-\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}) \end{cases}, \quad h_0^2 = \begin{cases} \Omega_0^2, & (\sigma\tau\varepsilon\rho\varepsilon\acute{o}) \\ \upsilon_0^2, & (\upsilon-\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}) \end{cases}$$

- Τελικά η εξίσωση ισορροπίας γράφεται:

$$\boxed{H = C - \Phi - h_0^2 \Psi(\varpi)}$$

Συνοριακές συνθήκες

- Στην επιφάνεια P=ρ=0 άρα και H=0. Τότε για το επιφανειακό ισημερινό σημείο A και πολικό σημείο B του αστέρα θα ισχύει

$$\mathrm{H(A)=0=C-\Phi(A)-h_0^2\Psi(A)} \quad \text{και}$$

$$\mathrm{H(B)=0=C-\Phi(B)-h_0^2\Psi(B)}$$

- Αν λύσουμε το παραπάνω σύστημα προκύπτει

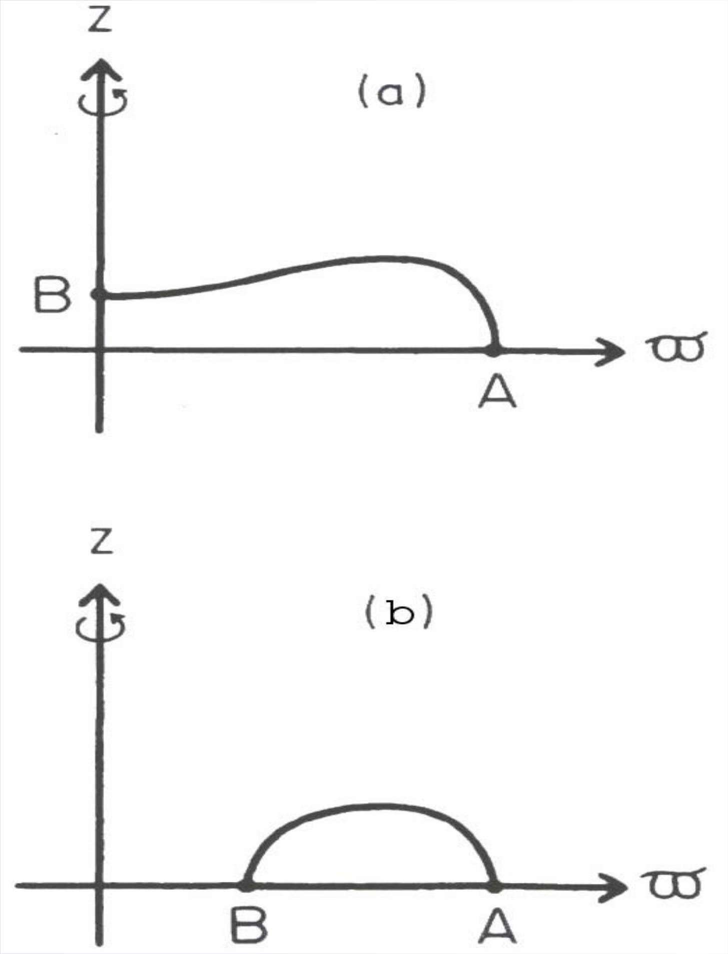
$$\mathrm{h_0^2=-\frac{\Phi(A)-\Phi(B)}{\Psi(A(-\Psi(B)}}$$

$$\mathrm{C=\Phi(A(-h_0^2\Psi(A)}$$

- Οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την ενθαλπία από την εξίσωση ισορροπίας.

Βήματα της Μεθόδου HSCF

- 1) Καθορισμός του μοντέλου: Δίνουμε τη μέγιστη πυκνότητα, το λόγο των αξόνων και το νόμο περιστροφής



Βήματα της Μεθόδου HSCF

- 2) Εισαγωγή δοκιμαστικής κατανομής πυκνότητας
- 3) Υπολογισμός του βαρυτικού δυναμικού

$$\Phi(\vec{r}) = -G\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3 r'$$

- 4) Υπολογισμός των C, h από τις συνοριακές συνθήκες και υπολογισμός της ενθαλπίας

$$h_0^2 = -\frac{\Phi(A) - \Phi(B)}{\Psi(A(- \Psi(B)}$$

$$C = \Phi(A(- h_0^2 \Psi(A)$$

$$H = C - \Phi - h_0^2 \Psi(\varpi)$$

- 5) Υπολογισμός της βελτιωμένης κατανομής πυκνότητας

$$\rho = \left(\frac{H}{K(N+1)} \right)^N$$

- 6) Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1-5 μέχρι επιθυμητής ακρίβειας

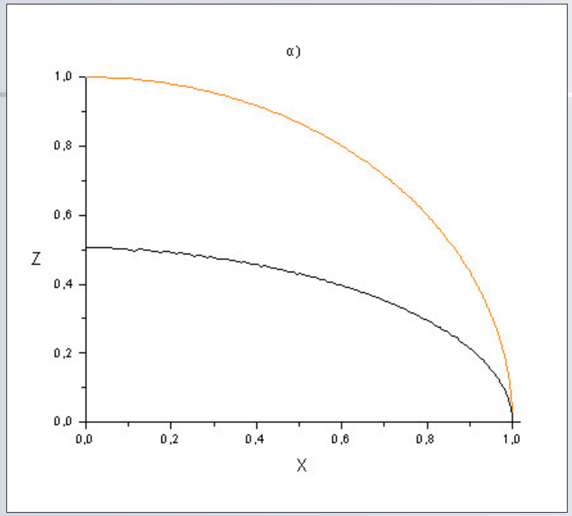
Αριθμητικά Αποτελέσματα

Περιστροφή ως στερεό

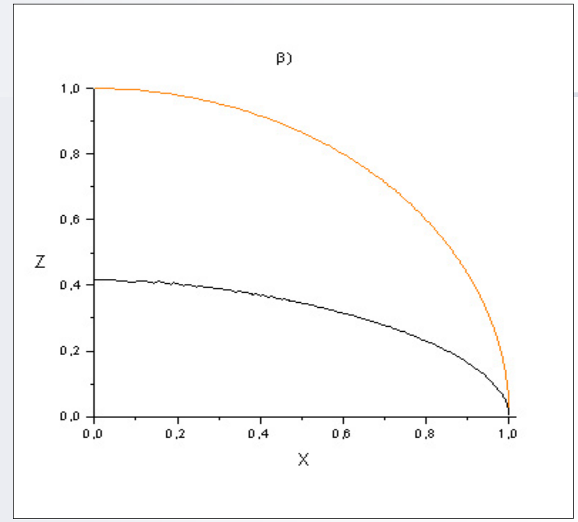
r_B	Ω_{0}^2	M	V	J	T	-W	3Π	Pmax
N=0.0								
1.000	0.000	4.17	4.18	0.000	0.000	10.47	10.77	2.187
0.500	1.369	2.07	2.07	0.924	0.540	3.163	2.112	0.892
0.333	1.460	1.34	1.30	0.608	0.368	1.433	0.708	0.497
0.250	1,324	0.912	0.906	0.383	0.220	0.709	0.271	0.308
0.167	0.238	0.090	0.439	0.033	0.008	0.008	0.005	0.100
0.083	0.139	0.057	0.319	0.022	0.004	0.003	0.001	0.020
0.000	0.022	0.031	0.216	0.005	0.000	0.001	0.001	0.093

Αστρικά Προφίλ

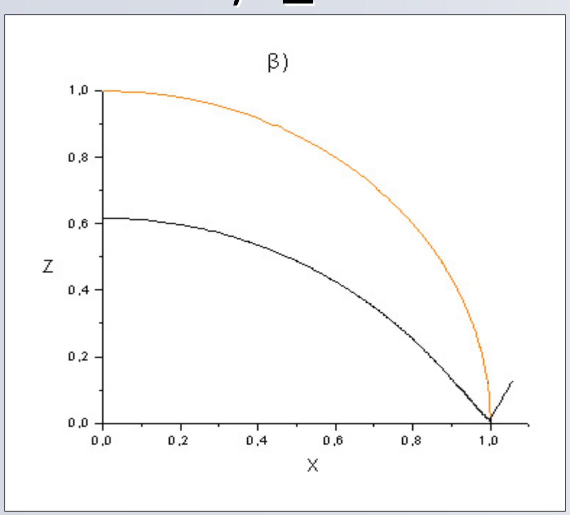
N=0.0, r_B=0.5



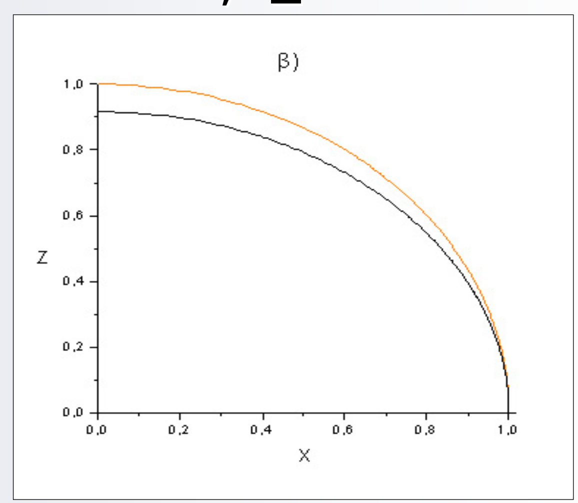
N=0.1, r_B=0.411



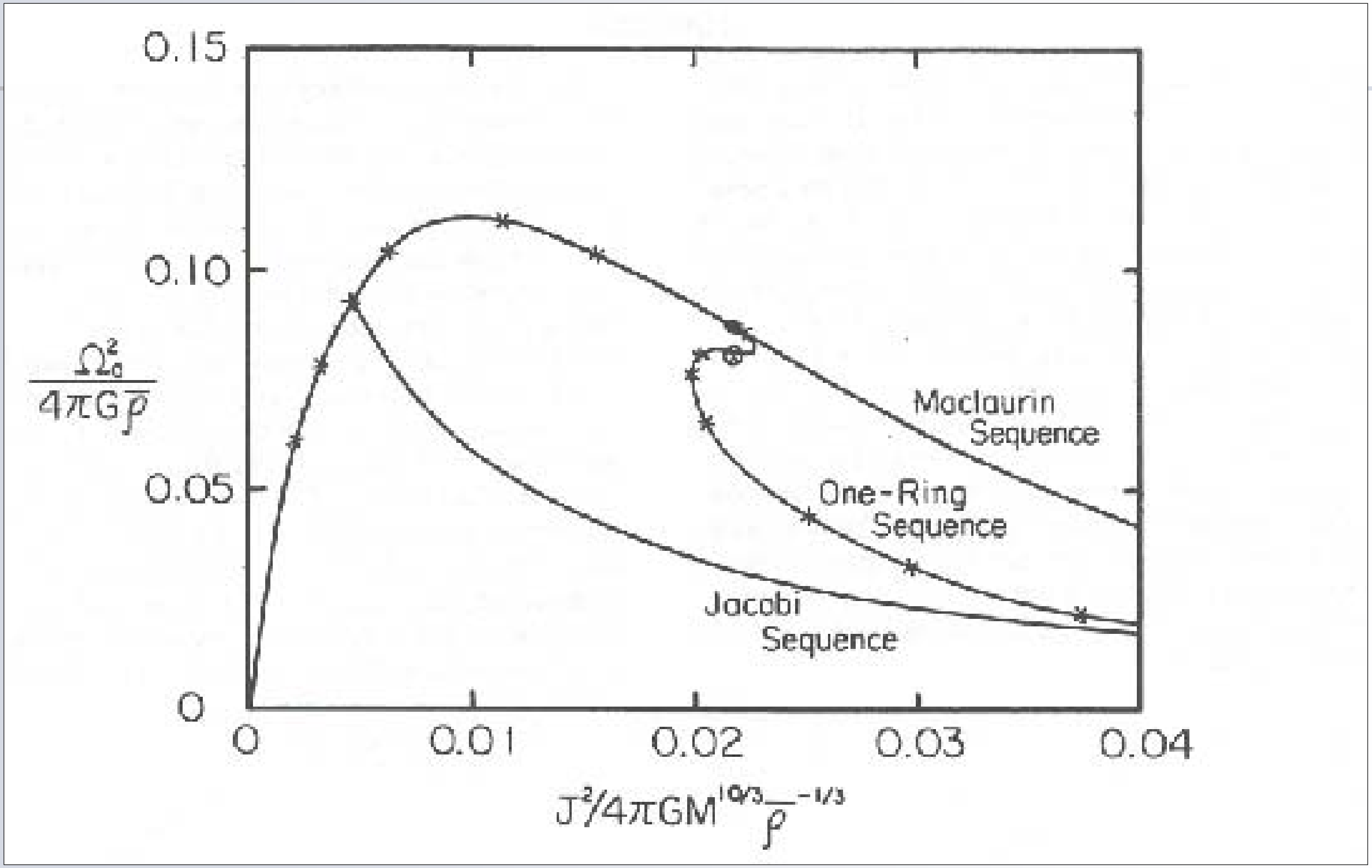
N=1.5, r_B=0.625



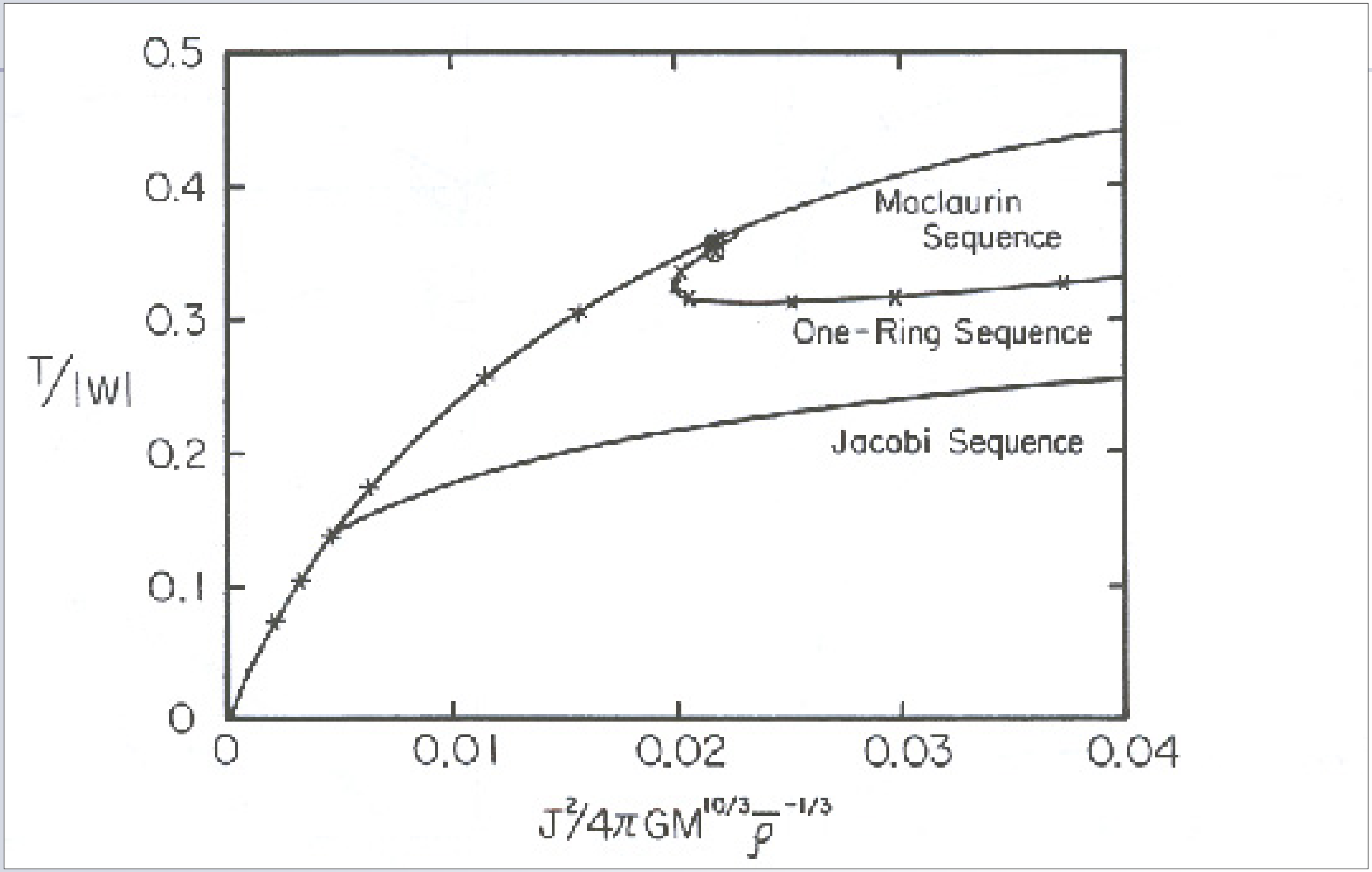
N=4.0, r_B=0.917



Διάγραμμα Ω-J



Διάγραμμα J-τ

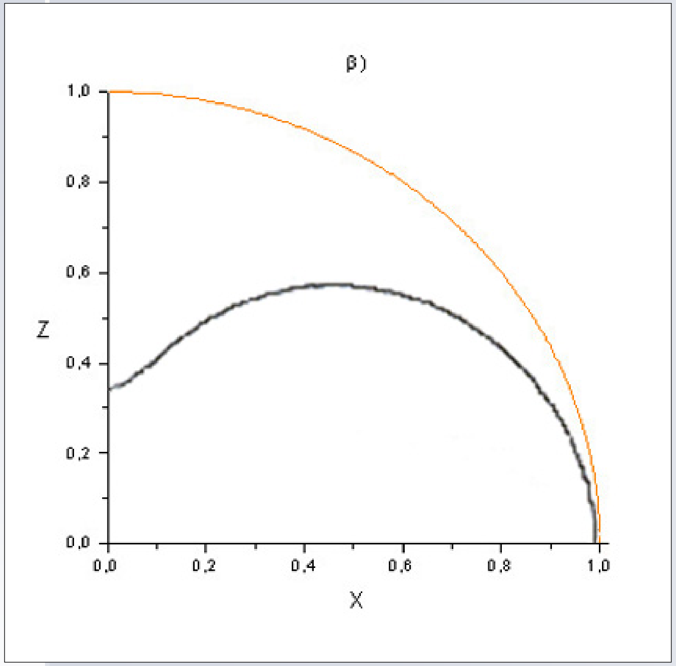


Διαφορική Περιστροφή

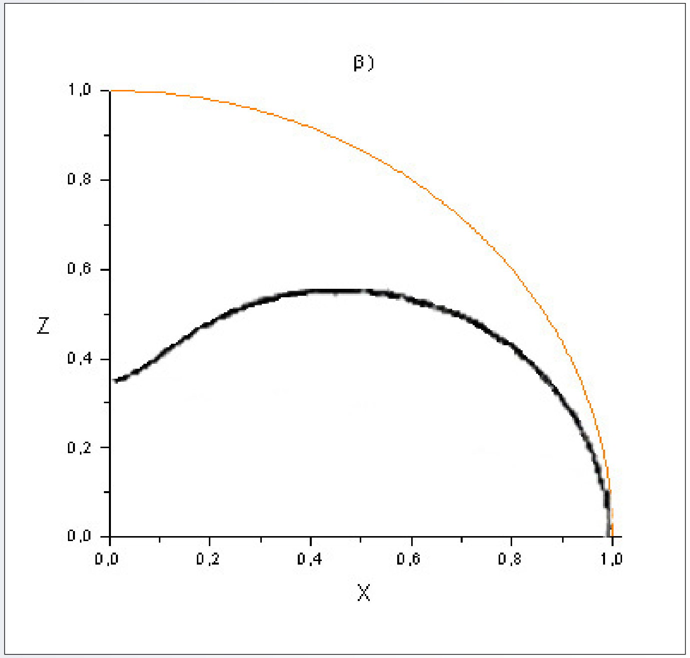
r_B	u_{0}^2	M	V	J	T	-W	3Π	Pmax
				N=0.0				
0.750	0.194	3.721	3.681	1.011	0.350	8.017	7.463	1.431
0.667	0.369	3.173	3.270	1.124	0.540	7.134	6.112	1.189
0.333	0.460	2.375	2.302	1.163	0.668	4.433	3.708	0.897
0.250	1,324	0.912	0.906	0.383	0.220	0.709	0.271	0.308
0.167	0.354	0.111	0.569	4.7E-2	1.6E-2	1.2E-2	8.5E-3	1.4E-1

Αστρικά Προφίλ

N=0.0, r_B=0.333



N=1.5, r_B=0.333



Επεκτάσεις της μεθόδου HSCF

- Λευκοί Νάνοι Μηδενικής Θερμοκρασίας
- Προσομοίωση δακτυλίων - ακολουθία Dyson-Wong
- Τρισδιάστατη μέθοδος HSCF => Μελέτη διπλών συστημάτων
- Μελέτη περιστρεφόμενου δίσκου προσαύξησης

ΤΕΛΟΣ

Συνθήκη Ισορροπίας

$$\boxed{H = C - \Phi - \frac{1}{2}\Omega_0^2 \varpi^2}$$

Κρίσιμη Περιστροφή

- Όταν στην επιφάνεια του αστέρα στο ύψος του ισημερινού η ανά μονάδα μάζας φυγόκεντρος δύναμη γίνει ίση με την ανά μονάδα μάζας βαρυτική δύναμη τότε φτάνουμε στο όριο της κρίσιμης περιστροφής.
- Παραγωγίζοντας τη συνθήκη ισορροπίας ως προς r

$$\Phi' = -H' + \Omega_0^2 r (1 - \mu^2)$$

- Κρίσιμη Περιστροφή $\Omega_C^2 = \dfrac{\Phi'(A)}{R_e} \Rightarrow$

$$\boxed{\Omega_C^2 = [\Omega_0^2 R_e - H'(A)] R_e}$$