<u>Πτυχιακή εργασία</u>

Υπολογιστική Σχετικότητα και εφαρμογές σε αστροφυσικούς πίδακες

> του Νίκου Τσακίρη

Φοιτητή του τμήματος Φυσικής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Επιβλέπων καθηγητής Νικόλαος Στεργιούλας

Επίκουρος καθηγητής του τμήματος Φυσικής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Θεσσαλονίκη Σεπτέμβριος 2003

Ευχαριστίες

Η διπλωματική αυτή εργασία συνολικά χρειάστηκε ένα εξάμηνο για να ολοκληρωθεί. Καθ' όλη τη διάρκεια αυτού του εξαμήνου η συμβολή του επιβλέποντα καθηγητή κ. Νικόλαου Στεργιούλα υπήρξε καθοριστική. Θέλω λοιπόν να τον ευχαριστήσω θερμά για τις ώρες που αφιέρωσε στο να με καθοδηγεί και να με βοηθάει, τόσο με τις συμβουλές του, όσο και με την αμέριστη συμπαράστασή του.

(Ευχαριστίες στον καθηγητή Jose-Antonio Font του Πανεπιστημίου της Valencia για τις συζητήσεις που είχαμε σχετικά με τη μέθοδο HLLE).

<u>Περίληψη</u>

Η εργασία αυτή διαπραγματεύεται κατά κύριο λόγο τη μελέτη και την εφαρμογή υπολογιστικής σχετικότητας διάφορων μεθόδων της σε αστροφυσικά προβλήματα. Γίνεται μία εκτενής αναφορά στο θεωρητικό υπόβαθρο σύγχρονων μεθόδων της υπολογιστικής ρευστομηχανικής στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας και στη συνέχεια με τη βοήθεια της γλώσσας C, δημιουργούνται τα αντίστοιχα υπολογιστικά προγράμματα, με σκοπό την εξαγωγή των απαραίτητων αποτελεσμάτων και ασφαλώς τη σύγκρισή τους. Το πεδίο δοκιμής των αριθμητικών μεθόδων είναι ένα κλασικό πρόβλημα της ρευστοδυναμικής, γνωστό ως σωλήνας δημιουργίας κρουστικών κυμάτων (shock tube). Τέλος γίνεται μία αναφορά σε ένα από τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα της σύγχρονης αστροφυσικής, τους πίδακες.



Κρουστικό κύμα το οποίο διαδίδεται στο εσωτερικό ενός αστροφυσικού πίδακα (προσομοίωση με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή)

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	 7

Αριθμητικές μέθοδοι στη Νευτώνεια Ρευστοδυναμική	
1.1 Εξισώσεις ρευστοδυναμικής	9
1.2 Το πρόβλημα των αρχικών τιμών του Riemann	10
1.2.1 Το φυσικό πρόβλημα	10
1.2.2 Το μαθηματικό πρόβλημα	13
1.3 Σφάλματα αριθμητικών μεθόδων	14
1.4 Κεντρικές διαφορές	15
1.4.1 Σωλήνας κρουστικών κυμάτων και κεντρικές διαφορές	17
1.4.2 Αποτελέσματα προγράμματος κεντρικών διαφορών	18
1.5 Η μέθοδος των Lax–Wendroff	21
1.5.1 Σωλήνας κρουστικών κυμάτων και Lax–Wendroff	21
1.5.2 Αποτελέσματα προγράμματος Lax-Wendroff	22
1.6 Η μέθοδος του Godunov	27
1.7 Αλγόριθμος αναδόμησης-επίλυσης-μέσου όρου	29
1.7.1 Περιορισμοί κλίσεων	30
Περιορισμός κλίσης Minmod	31
Περιορισμός κλίσης ΜC	32
Περιορισμός κλίσης Van Leer	33 22
1.7.2 Subwords to use to construct which the	33
1.8 Decomposition by an a second rate to the feature of the second se	35
1.8.1 Η μέθοδος ΗLLE	35
1.9 Εφαριμονή αριθυμτικών μεθόδων στο σωλήνα κρομστικών	
κυμάτων	37
1.9.1 Η μέθοδος του Godunov	38
1.9.2 Χωρίς περιορισμό κλίσης	39
1.9.3 Περιορισμός κλίσης Minmod	40
1.9.4 Περιορισμός κλίσης ΜC	41
	 Αριθμητικές μέθοδοι στη Νευτώνεια Ρευστοδυναμική 1.1 Εξισώσεις ρευστοδυναμικής

2	Αριθμητικές μέθοδοι στην Ειδική Σχετικότητα	
	2.1 Σχετικιστικές εξισώσεις ρευστοδυναμικής	45
	2.1.1 Μονοδιάστατες εξισώσεις ρευστοδυναμικής	46
	2.1.2 Μετασχηματισμός των συστημάτων συντεταγμένων	48
	2.2 Το πρόβλημα του σωλήνα κρουστικών κυμάτων	50
	2.3 Η σχετικιστική μέθοδος HLLE	52
	2.3.1 Εφαρμογές του σχετικιστικού HLLE	56
	A. Με περιορισμό κλίσης minmod	56

	Β. Με περιορισμό κλίσης MC	62
2.	3.2 Σύγκριση σχετικιστικού HLLE με minmod και MC	65
3 Αστροφ	υσικοί πίδακες	67
Παράστημα	Α	72
Παράρτημα	В	74
Παράρτημα	Γ	78
Παράρτημα	Δ	84
Βιβλιογραφία	1	99

Εισαγωγή

Η εργασία αυτή αφορά τη μελέτη των αριθμητικών μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια με σκοπό την επίλυση των εξισώσεων που διέπουν τη συμπεριφορά των ρευστών. Η μελέτη των ρευστών είναι ένας ταχέως αναπτυσσόμενος κλάδος της σύγχρονης φυσικής καθώς βρίσκει εφαρμογές σε μία πληθώρα διαφορετικών φαινομένων, που δεν έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους. Τέτοια φαινόμενα μπορεί να είναι είτε η κίνηση ενός υγρού, όπως το νερό, είτε οι γαλαξιακοί πίδακες. Έχει αναπτυχθεί το κατάλληλο θεωρητικό πλαίσιο που επιτρέπει τη μελέτη αυτών των φαινομένων. Πρόκειται κυρίως για συστήματα διαφορικών εξισώσεων, που δεν είναι συχνά δυνατό να λυθούν αναλυτικά. Για το λόγο αυτό η μελέτη των ρευστών έχει συνδεθεί τόσο έντονα με την αριθμητική ανάλυση, καθώς η τελευταία με έμμεσο έστω τρόπο καταφέρνει να προσφέρει λύσεις σε ανάλογα προβλήματα.

Η εργασία αυτή λοιπόν αφορά τη μελέτη των ρευστών, κατά βάθος όμως επιχειρεί μία επισκόπηση των κυριότερων αριθμητικών μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί και δοκιμαστεί σε πολύ δυσκολότερα προβλήματα, από αυτά που παρατίθενται εδώ, με σημαντική επιτυχία.

Αρχικά λοιπόν επιχειρείται η εφαρμογή συγκεκριμένων αριθμητικών μεθόδων σε ένα κλασικό πρόβλημα της ρευστοδυναμικής, αυτό του shock tube, στο πλαίσιο της Νευτώνειας μηχανικής. Στη συνέχεια οι ίδιες αριθμητικές μέθοδοι δοκιμάζονται στο ίδιο πάντα πρόβλημα, στο πλαίσιο όμως πλέον της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Σε κάθε περίπτωση παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των μεθόδων, σχολιάζονται και ασφαλώς συγκρίνονται μεταξύ τους, με σκοπό την εύρεση της πλέον κατάλληλης, για κάθε σκοπό, μεθόδου και την εξαγωγή ολοένα και πιο αξιόπιστων αποτελεσμάτων.

Σημαντικός αρωγός σε αυτή την προσπάθεια για την παρουσίαση των αριθμητικών μεθόδων είναι η επιστήμη της πληροφορικής. Η χρήση των υπολογιστών και κάποιας γλώσσας προγραμματισμού είναι απαραίτητα στοιχεία για την εκτέλεση των επαναληπτικών υπολογισμών και διαδικασιών που απαιτούν οι αριθμητικές μέθοδοι.

Κεφάλαιο 1

Αριθμητικές μέθοδοι στη Νευτώνεια Ρευστοδυναμική

Οι διαφορικές εξισώσεις κατέχουν κυρίαρχο ρόλο στην επιστήμη της Φυσικής από τη στιγμή που ο Νεύτωνας εισήγαγε το δεύτερο νόμο της κίνησης. Η μελέτη τους από την εποχή εκείνη είναι εντατική, αν και στις περισσότερες περιπτώσεις η ακριβής και αναλυτική τους λύση είναι δύσκολο να προσδιοριστεί. Οι φυσικοί σε ανάλογες περιπτώσεις αναζητούν προσεγγιστικές λύσεις, οι οποίες προκύπτουν με τη συνδρομή ενός ιδιαίτερου κλάδου των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, γνωστού ως Αριθμητική Ανάλυση, που ασχολείται με τη διακριτοποίηση συνεχών προβλημάτων. Τα διακριτά σχήματα ή αλλιώς αριθμητικές μέθοδοι επιτρέπουν την αντικατάσταση των διαφορικών τελεστών με μια σειρά από αλγεβρικές πράξεις. Επιπλέον η ανάπτυξη των υπολογιστών τις τελευταίες δεκαετίες έχει δώσει νέα ώθηση στην ανάπτυξη παρόμοιων μεθόδων και κατά συνέπεια στην ολοένα και συχνότερη εφαρμογή τους στη σύγχρονη Φυσική, αν και οι βασικές ιδέες χρονολογούνται αιώνες πριν. Ήδη το 1748 οι Clairaut, Lalande και Lapaute με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων επιχείρησαν να προβλέψουν επακριβώς την επιστροφή του κομήτη του Halley λαμβάνοντας υπόψη τους τις επιδράσεις του Δία και του Κρόνου στην τροχιά του. Ο Lalande έγραψε

Για έξη μήνες υπολογίζαμε από το πρωί έως το βράδυ, μερικές φορές ακόμα και κατά τη διάρκεια των γευμάτων. Ως συνέπεια αυτής της κατάστασης αρρώστησα σοβαρά και η κατάσταση της υγείας μου ποτέ πια δεν ήταν ίδια με πριν. Η βοήθεια που μας προσέφερε η κυρία Lapaute ήταν καταλυτική, αφού χωρίς τη συνδρομή της δεν θα είχαμε ποτέ τολμήσει να αναλάβουμε ένα τόσο μεγαλεπήβολο έργο. Ήταν απαραίτητο να υπολογίσουμε την απόσταση καθενός από τους δύο πλανήτες, το Δία και τον Κρόνο, από τον κομήτη, ξεχωριστά για κάθε διαδοχική μοίρα, για 150 χρόνια.

Η πρόβλεψή τους για το περιήλιο του κομήτη στις 13 Απριλίου του 1749 απείχε μόνο 31 μέρες από την πραγματική ημερομηνία. Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται ευρύτατα για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων υπερβολικού τύπου. Παρουσιάζονται χαρακτηριστικές μέθοδοι, οι οποίες διακρίνονται τόσο για τη διαφορετική τους φιλοσοφία, όσο και για την ακρίβειά τους. Ενδεικτικά αναφέρονται η μέθοδος των κεντρικών διαφορών, η μέθοδος Lax-Wendroff και η μέθοδος TVD. Κάθε μία από αυτές εφαρμόζεται στο πρόβλημα του μονοδιάστατου σωλήνα κρουστικών κυμάτων (shock tube), οπότε υπάρχει η δυνατότητα της άμεσης σύγκρισής τους.

1.1 Εξισώσεις ρευστοδυναμικής

Εξίσωση ορμής

Η κίνηση του ρευστού περιγράφεται με τη βοήθεια ενός συστήματος νόμων διατήρησης της μάζας (εξίσωση συνέχειας), της ορμής (εξισώσεις του Euler) και της ενέργειας. Η διαφορική μορφή των εξισώσεων αυτών σε καρτεσιανές συντεταγμένες (t, x₁, x₂, x₃), είναι

Eξίσωση συνέχειας
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0$$
 (3.1)

$$\frac{\partial \left(\rho v_{j}\right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{i}} \left(\rho v_{i} v_{j} + p \delta_{ij}\right) = 0$$
(3.2)

Estowon evéryeus
$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(e+p) v_i \right] = 0$$
 (3.3)

Η φυσική κατάσταση λοιπόν ενός ρευστού καθορίζεται από την πυκνότητά του ρ, την μακροσκοπική ταχύτητά του ν και την πυκνότητα ολικής ενέργειας,

$$e = \frac{1}{2}\rho v^2 + \varepsilon \tag{3.4}$$

όπου ε είναι η πυκνότητα εσωτερικής θερμοδυναμικής ενέργειας. Για ένα ιδανικό αέριο, η πίεση p, συνδέεται με την πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας μέσω της καταστατικής εξίσωσης

$$p = (\Gamma - 1)\varepsilon, \qquad (3.5)$$

όπου Γ είναι ο λόγος των θερμοχωρητικοτήτων. Μία άλλη θερμοδυναμική μεταβλητή ιδιαίτερης σημασίας είναι η ταχύτητα του ήχου c_s, η οποία δίνεται από τη σχέση (ισχύει για ισεντροπικές μεταβολές ιδανικού αερίου)

$$c_s^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\Gamma P}{\rho}$$
(3.6)

Πρέπει να διευκρινίσουμε ότι οι εξισώσεις του Euler, με τη μορφή που παρατίθενται, είναι ιδιαίτερα απλουστευμένες καθώς έχουν αφαιρεθεί όροι που περιγράφουν φαινόμενα όπως η βαρύτητα, η θέρμανση και η ψύξη.

Οι παραπάνω νόμοι διατήρησης σε διαφορική μορφή δεν καταφέρνουν να αποδώσουν πιστά ασυνέχειες, καθώς οι παράγωγοι των φυσικών ποσοτήτων απειρίζονται. Λύσεις με ασυνέχειες ονομάζονται *ασθευείς* λύσεις των εξισώσεων στη διαφορική μορφή. Είναι ενδεικτικό ότι η διαφορική μορφή περιγράφει πλήρως τη ροή σε ομαλές περιοχές, όμως η ολοκληρωτική μορφή είναι απαραίτητη για την περιγραφή ασυνεχειών.

1.2 Πρόβλημα των αρχικών τιμών του Riemann

1.2.1 Το φυσικό πρόβλημα

Θεωρούμε ένα ιδανικό ρευστό (π.χ. αέριο) με αδιαβατικό δείκτη Γ, το οποίο κινείται σε ένα χώρο όπου απουσιάζει (ή αγνοούμε) το βαρυτικό πεδίο. Το ρευστό βρίσκεται μέσα σε ένα μονοδιάστατο σωλήνα ουσιαστικά, ο οποίος χωρίζεται σε δύο τμήματα με τη βοήθεια ενός διαφράγματος απειροστού πάχους. Σε κάθε τμήμα του σωλήνα οι συνθήκες πίεσης και η πυκνότητα του ρευστού διαφέρουν. Και στα δύο τμήματα όμως η ταχύτητα του ρευστού είναι αρχικά ίση προς μηδέν. Το πρόβλημα του Riemann συνίσταται στη μελέτη της εξέλιξης του ρευστού στο εσωτερικό του σωλήνα για διαφορετικές αρχικές συνθήκες, από τη στιγμή που απομακρύνεται το διάφραγμα. Γενικά το πρόβλημα των αρχικών τιμών του Riemann προϋποθέτει την ύπαρξη ενός νόμου διατήρησης της μορφής

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \tag{3.7}$$

με αρχικές συνθήκες $u=u(\rho,v,p)$

$$u(x,0) = \begin{cases} u^l & \gamma l \alpha \ x < x_1 \\ u^r & \gamma l \alpha \ x > x_1 \end{cases},$$
(3.8)

Τη χρονική στιγμή λοιπόν t=0, δύο περιοχές του ρευστού με πιέσεις p₁, p₅ και πυκνότητες ρ_1, ρ_5 αντίστοιχα, χωρίζονται με ένα διάφραγμα. Για t=0 το διάφραγμα απομακρύνεται απότομα. Ο Riemann απόδειξε ότι με την απομάκρυνση του διαφράγματος έχουμε το σχηματισμό κρουστικών κυμάτων, μίας ασυνέχειας επαφής καθώς και κυμάτων αραίωσης. Κατά την εξέλιξη του αερίου στο εσωτερικό του σωλήνα διαμορφώνονται τέσσερις διαφορετικές καταστάσεις, ανάμεσα στις οποίες ξεχωρίζουν ο σχηματισμός των κρουστικών κυμάτων, των κυμάτων αραίωσης και της συμπαγούς ασυνέχειας. Στην περίπτωση που μελετάμε θεωρούμε ότι η λύση του προβλήματος του σωλήνα κρουστικών κυμάτων (ή πρόβλημα των αρχικών συνθηκών του Riemann) έχει την εξής δομή: ένα κύμα αραίωσης που κινείται προς τα αριστερά, ένα κρουστικό κύμα που κινείται προς τα δεξιά και το οποίο ακολουθείται από μία ασυνέχεια επαφής. Η κατάσταση αυτή σκιαγραφείται στο σχήμα (1.1).



Σχήμα 1.1: Αναπαράσταση της λύσης του προβλήματος των αρχικών τιμών του Riemann στη ρευστοδυναμική.

Η αρχική κατάσταση τη χρονική στιγμή t=0 παριστάνεται στο πρώτο διάγραμμα, το οποίο αποτελείται από δύο σταθερές καταστάσεις (1) και (5) με $p_1 > p_5$, $\rho_1 > \rho_5$ και $v_1 = v_5 = 0$,που χωρίζονται με ένα διάφραγμα. Με την απομάκρυνση αυτού του διαχωριστικού σημειώνεται εξέλιξη της ροής του ρευστού, όπως αυτή παρουσιάζεται στο δεύτερο σχήμα. Συγκεκριμένα με ανοικτό μπλε χρώμα παριστάνεται η εξέλιξη της πυκνότητας, με κόκκινο η μεταβολή της ταχύτητας, με πράσινο η ροή της πυκνότητας και με σκούρο μπλε χρώμα η ενέργεια. Το σχήμα αυτό είναι ένα στιγμιότυπο της εξέλιξης των παραπάνω μεταβλητών, όπως προκύπτει από τη λύση του προβλήματος των αρχικών τιμών του Riemann.

Υπάρχουν οι εξής διαφορετικές καταστάσεις

- I. στην περιοχή (1) οι τιμές των μεταβλητών είναι ίσες με τις αρχικές (ρ₁,p₁,v₁).
- II. η περιοχή (2) παριστάνει τα όρια κίνησης του κύματος αραίωσης
- III. στα τμήματα (3) και (4) υπάρχει μία σταθερή περιοχή τιμών, η οποία διακόπτεται από μία ασυνέχεια επαφής. Η ύπαρξή της γίνεται κυρίως αντιληπτή στα διαγράμματα της πυκνότητας και της ενέργειας.
- IV. στην περιοχή (5), όμοια με την περιοχή (1), οι τιμές των μεταβλητών είναι όμοιες με τις αρχικές (ρ₅, p₅, v₅).

Το κρουστικό κύμα που σχηματίζεται είναι η διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα στις περιοχές (4) και (5). Το τρίτο σχήμα είναι ένα χωροχρονικό διάγραμμα, όπου παριστάνονται το κρουστικό κύμα (συνεχής γραμμή) και η ασυνέχεια επαφής (διακεκομμένη γραμμή), που κινούνται προς τα δεξιά. Το πλήθος των συνεχών γραμμών παριστάνει ένα κύμα αραίωσης που κινείται προς τα αριστερά.

Η ροή στο εσωτερικό ενός σωλήνα με ανάλογα χαρακτηριστικά διακρίνεται για τις έντονες μεταβολές της σε ό,τι αφορά τις τιμές των καταστατικών σταθερών, όπως η θερμοκρασία. Συγκεκριμένα στην περιοχή της χαμηλής πίεσης μπορεί να αυξηθεί κατά μερικές εκατοντάδες βαθμούς Kelvin. Γενικότερα, οι καταστατικές σταθερές υπολογίζονται με τη βοήθεια της στατιστικής μηχανικής και με τις εξής υποθέσεις

- ότι υπάρχει θερμοδυναμική ισορροπία
- ότι η ροή στο εσωτερικό του σωλήνα είναι μονοδιάστατη
- ότι η επίδραση των τοιχωμάτων του σωλήνα μπορεί να αγνοηθεί
- ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες της στατιστικής Boltzmann
- ότι οι νέες τιμές των ποσοτήτων που μας ενδιαφέρουν μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια μίας προσεγγιστικής μεθόδου



Σχήμα 1.2: Πρότυπος πειραματικός σωλήνας για τη μελέτη του τρόπου σχηματισμού των κρουστικών κυμάτων

1.2.2 Το μαθηματικό πρόβλημα

Μαθηματικώς η κίνηση του αερίου στο εσωτερικό του σωλήνα μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια ενός συστήματος νόμων διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Η διαφορική μορφή των εξισώσεων αυτών σε μία διάσταση είναι

Eξίσωση συνέχειας
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0$$
 (3.9)

Εξίσωση ορμής

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v^2 + p \right) = 0 \tag{3.10}$$

Εξίσωση ενέργειας

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(e + p \right) v \right] = 0 \tag{3.11}$$

όπου $m = \rho v$ και $e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho v^2$.

Με βάση τις εξισώσεις αυτές είναι δυνατή η περιγραφή της εξέλιξης της κατάστασης ενός ρευστού στο εσωτερικό ενός σωλήνα κρουστικών κυμάτων.



Σχήμα 1.3: Κρουστικά κύματα στο εσωτερικό ενός σωλήνα μήκους

- 1. πυκνότητας (μπλε χρώμα)
- 2. πίεσης (κόκκινο χρώμα)
- 3. ταχύτητας (πράσινο χρώμα)
- 4. ενέργειας (γαλάζιο χρώμα)

1.3 Σφάλματα αριθμητικών μεθόδων

Τα σφάλματα που παρουσιάζονται στις αναλυτικές λύσεις οφείλονται στη χρήση προσεγγιστικών θεωρητικών μοντέλων καθώς και στην ατελή παρουσίαση των φυσικών διεργασιών. Όταν δημιουργείται ένα μοντέλο που προσομοιώνει μία φυσική διαδικασία, εμφανίζει σφάλματα που οφείλονται καταρχάς στις αδυναμίες των αναλυτικών λύσεων. Επιπλέον η χρησιμοποίηση των αριθμητικών μεθόδων προσθέτει νέα σφάλματα στη πορεία της προσομοίωσης, τα οποία οφείλονται στην ελλιπή υπολογιστική ακρίβεια και στη μη ικανοποιητική απόδοση συνεχών διαδικασιών, όπως οι παραγωγίσεις ως προς το χρόνο και τις χωρικές συντεταγμένες.

Κατά κύριο λόγο η χρήση αριθμητικών μεθόδων προκαλεί την εμφάνιση δύο κατηγοριών σφαλμάτων.

1. Σφάλματα διάχυσης (diffusive errors)

Οφείλονται στην ίδια τη φύση των εξισώσεων που χρησιμοποιούνται. Εμφανίζονται κυρίως σε περιοχές όπου αναμένονται ασυνέχειες και προκαλούν την ομαλότερη απόδοσή τους.



Σχήμα 1.4: Χαρακτηριστικό σφάλμα διάχυσης

2. Σφάλματα διαταραχών (fluctuation errors)

Σε μερικές περιπτώσεις η εμφάνιση ενός αριθμητικού λάθους, εφόσον το υπολογιστικό πρόγραμμα δε διαθέτει τις κατάλληλες "ασφαλιστικές δικλείδες", είναι δυνατό να μεταδίδεται σε κάθε βήμα, να διογκώνεται και να προκαλεί την εμφάνιση ταλαντώσεων (oscillations) και διαταραχών με αποτέλεσμα σε ορισμένες περιπτώσεις να καθίσταται δυσδιάκριτη ακόμα και η ίδια η φυσική διαδικασία.



Σχήμα 1.5: Χαρακτηριστικό σφάλμα διαταραχών

1.4 Κεντρικές διαφορές

Πρόκειται για την απλούστερη αριθμητική μέθοδο που μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Παρά την ευκολία που παρουσιάζει της κυρίως στον προγραμματισμό και στην κατανόηση, διακρίνεται για τη χαμηλή της ακρίβεια και την έλλειψη σταθερότητας. Η φιλοσοφία της μεθόδου βασίζεται στον ορισμό της παραγώγου της πραγματικής συνάρτησης, f(x),

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
(3.12)

Στη μέθοδος των κεντρικών διαφορών (finite difference method) ουσιαστικά παραλείπουμε το όριο και θεωρούμε την ποσότητα h αρκετά μικρή, αλλά πεπερασμένη. Με τον τρόπο αυτό καταφέρνουμε να υπολογίσουμε της τιμές των παραγώγων σε διάφορες θέσεις x_0 αριθμητικά, γνωρίζοντας της τιμές της συνάρτησης f(x) εκατέρωθεν των θέσεων αυτών συμμετρικά. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
(3.13)

όπου είναι $h = \Delta x$. Οι προσεγγιστικές σχέσεις των κεντρικών διαφορών μπορούν ακόμα να προκύψουν με τη βοήθεια του θεωρήματος Taylor.

$$\begin{split} \partial_x f_i &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \\ \partial_x f_i &= \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \\ \partial_x f_i &= \frac{f_{i-1} - f_{i-1}}{h} + O(h^2) \\ \partial_x f_i &= \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2h} + O(h^2) \\ \partial_x f_i &= \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2h} + O(h) \\ \partial_x^2 f_i &= \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2} + O(h) \\ \partial_x^2 f_i &= \frac{f_i - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \\ \partial_x^3 f_i &= \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \\ \partial_x^3 f_i &= \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} + O(h^2) \\ \partial_x^2 f_i &= \frac{-f_{i+3} + 4f_{i+2} - 5f_{i+1} + 2f_i}{h^4} + O(h^2) \\ \partial_x^2 f_i &= \frac{-f_{i+3} + 4f_{i+2} - 5f_{i+1} + 2f_i}{h^2} + O(h^2) \\ \partial_x^2 f_i &= \frac{-f_{i+3} + 4f_{i+2} - 5f_{i+1} + 2f_i}{h^2} + O(h^2) \\ \partial_x^3 f_i &= \frac{-3f_{i+4} - 14f_{i+3} - 24f_{i+2} + 18f_{i+1} - 5f_i}{2h^3} + O(h^2) \\ \partial_x^3 f_i &= \frac{-3f_{i+4} - 14f_{i+3} - 24f_{i+2} - 14f_{i-3} + 3f_{i-4}}{2h^3} + O(h^2) \\ \partial_x f_i &= \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{2h^3} + O(h^4) \\ \end{split}$$

1.4.1 Σωλήνας κρουστικών κυμάτων και κεντρικές διαφορές

Οι εξισώσεις του Euler είναι δυνατό να λυθούν με τη βοήθεια των προσεγγιστικών τύπων που προβλέπει η θεωρία των κεντρικών διαφορών. Η προσέγγιση που εφαρμόζεται στην υπολογιστική φυσική των ρευστών έχει δύο συνιστώσες, τη διακριτοποίηση τόσο του χρόνου όσο και του χώρου. Η χρονική εξέλιξη λαμβάνει χώρα σε διακριτά βήματα ενώ ο χώρος διαιρείται σε στοιχειώδεις όγκους ή κελιά, όπου οι διατηρήσιμες ποσότητες αποθηκεύονται. Ουσιαστικά οι εξισώσεις λύνονται σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων προγραμματίζοντας υπολογιστικά τη ροή της μάζας, της ορμής και της ενέργειας στα όρια των κελιών και για καλά καθορισμένα χρονικά βήματα.

Γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις μετασχηματίζονται στο εξής σύστημα σε διαφορική μορφή, το οποίο περιγράφει ένα μονοδιάστατο νόμο διατήρησης

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0$$
(3.14)
όπου $u = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}$ οι διατηρήσιμες φυσικές ποσότητες και $F(u) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{bmatrix}$ οι ροές.

Σε ολοκληρωτική μορφή ο παραπάνω μονοδιάστατος νόμος διατήρησης γράφεται

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} u(x,t) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(u)}{\partial x} dx = 0$$
(3.15)

Η διαδικασία της διακριτοποίησης στη μέθοδο των κεντρικών διαφορών πραγματοποιείται με βάση την εξίσωση διατήρησης στη διαφορική της μορφή παρά στην ολοκληρωτική. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_n^{t+\Delta t} - u_n^t}{\Delta t}$$
(3.16)

$$\frac{\partial F(u)}{\partial t} = \frac{F_{n+1}^t - F_{n-1}^t}{2\Delta x}$$
(3.17)

Προκύπτει τελικά η σχέση

$$u_n^{t+\Delta t} = u_n^t - (\frac{F_{n+1}^t - F_{n-1}^t}{2\Delta x})\Delta t$$
(3.18)

και με βάση τη σχέση αυτή θα προσπαθήσουμε να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη του μονοδιάστατου προβλήματος του σωλήνα κρουστικών κυμάτων.

1.4.2 Αποτελέσματα προγράμματος κεντρικών διαφορών

Θεωρούμε ένα μονοδιάστατο σωλήνα μήκους 10 μονάδων. Στο μέσο του (x=5) είναι τοποθετημένο το διάφραγμα (Σχήμα 1.1). Για να απλοποιήσουμε το πρόγραμμα υποθέτουμε ότι το κρουστικό κύμα, που θα δημιουργηθεί μετά την αφαίρεση του

διαφράγματος δεν θα αγγίξει τα άκρα της περιοχής προσομοίωσης. Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$\rho = \begin{cases} 1 & x \le 5 \\ 0.125 & x > 5 \end{cases}, \quad p = \begin{cases} 1 & x \le 5 \\ 0.1 & x > 5 \end{cases} \quad \text{kat} \quad v = 0. \tag{3.19}$$

Διαιρούμε το χώρο σε N = 1000 συνολικά σημεία, τα οποία ισαπέχουν μεταξύ τους απόσταση Δx και σχηματίζουν το μονοδιάστατο πλέγμα. Το Δx ορίζεται ως εξής

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N - 1} \tag{3.20}$$

Για την επιλογή του χρονικού βήματος θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τη συνθήκη των Courant - Friedrichs - Lewyor (CFL condition). Σύμφωνα με αυτή δεν μπορούμε να επιλέγουμε αυθαίρετες τιμές για το χρονικό και το χωρικό βήμα, παρά μόνο τις τιμές εκείνες που ικανοποιούν τον περιορισμό

$$v\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1 \tag{3.21}$$

όπου $v = c_s \equiv \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ είναι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου. Ασφαλώς στο πρόβλημα

του σωλήνα κρουστικών κυμάτων οι τιμές της πίεσης και της πυκνότητας που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του v είναι οι μικρότερες, δηλαδή αυτές που αντιστοιχούν στις αρχικές τιμές πίεσης 5 και πυκνότητας 5 κατά το σχήμα 1.1. Επιλέγουμε λοιπόν ως χρονικό βήμα $\Delta t = 0.004$. Ο αδιαβατικός δείκτης είναι Γ =1.4.

Το πρόγραμμα που αφορά τη μελέτη του προβλήματος του μονοδιάστατου σωλήνα κρουστικών κυμάτων με τη μέθοδο των κεντρικών διαφορών στη γλώσσα C.

Με τη βοήθεια του προγράμματος επιχειρούμε να μελετήσουμε τη χρονική εξέλιξη των παραμέτρων του συστήματός μας, δηλαδή της πυκνότητας, της ταχύτητας, της πίεσης και της ενέργειας. Στις γραφικές παραστάσεις (κατασκευάστηκαν με τη βοήθεια του προγράμματος γραφικών Origin), που ακολουθούν παριστάνονται οι ποσότητες αυτές όπως προκύπτουν για 10 χρονικά βήματα. Είναι ουσιαστικά στιγμιότυπα της εξέλιξης των κρουστικών κυμάτων στο εσωτερικό του μονοδιάστατου σωλήνα τη χρονική στιγμή t = 0.04 μετά την απομάκρυνση του διαφράγματος.

Οι γραφικές παραστάσεις επιβεβαιώνουν την έλλειψη ακρίβειας και σταθερότητας που εμφανίζει η μέθοδος των κεντρικών διαφορών. Παρατηρούμε σε καθένα από τα στιγμιότυπα ότι πρόκειται για μεθόδους που εμφανίζουν έντονες διαταραχές σε μικρό χρονικό διάστημα, με αποτέλεσμα η λύση σύντομα να τείνει στο άπειρο.

Προφανώς οι κεντρικές διαφορές, παρά τη χαρακτηριστική τους απλότητα, δεν είναι ικανές να οδηγήσουν σε αξιόπιστες λύσεις.

Σχήμα 1.6: Στιγμιότυπο της πυκνότητας τη χρονική στιγμή t=0.04. Παρατηρούμε το σχηματισμό διαταραχών, οι λεπτομέρειες των οποίων διακρίνονται στο μικρό διάγραμμα. Η αριθμητική μέθοδος των κεντρικών διαφορών σε σύντομο χρονικό διάστημα παύει να είναι αξιόπιστη.



Σχήμα 1.7: Στιγμιότυπο της πίεσης για t=0.04 και λεπτομέρεια των διαταραχών.



Σχήμα 1.8: Στιγμιότυπο της ταχύτητας για t=0.04 και λεπτομέρεια των διαταραχών.



Σχήμα 1.9: Στιγμιότυπο της ενέργειας για t=0.04 και λεπτομέρεια των διαταραχών.



1.5 Η μέθοδος των Lax-Wendroff

Η μέθοδος των Lax-Wendroff (Lax και Wendroff 1960) διακρίνεται για τη δεύτερης τάξης ακρίβειά της τόσο ως προς το χρόνο, όσο και ως προς το χώρο. Πρόκειται ουσιαστικά για μία βελτίωση της μεθόδου των κεντρικών διαφορών για την επίλυση υπερβολικών εξισώσεων, όπου οι εμπνευστές της κατάφεραν να εξαλείψουν κατά ένα μεγάλο ποσοστό τις αστάθειες που εμφανίζονταν στη μέθοδο που περιγράφηκε στο τμήμα 1.4.

Αναπτύσσουμε κατά Taylor

$$u(x,t+\Delta t) = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3)$$
(3.22)

και αντικαθιστούμε τις χρονικές παραγώγους με τις χωρικές παραγώγους, χρησιμοποιώντας τους νόμους διατήρησης. Προκύπτει λοιπόν

$$u(x,t+\Delta t) = u(x,t) - \frac{\partial F}{\partial x}\Delta t + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\Delta t^{2}}{2} + O(\Delta t^{3})$$
(3.23)

Χρησιμοποιώντας τις κεντρικές διαφορές παίρνουμε τελικά

$$u_n^{t+\Delta t} = u_n^t - \frac{F_{n+1}^t - F_{n-1}^t}{2\Delta x} \Delta t + \left[\left(\frac{F_{n+1}^t - F_n^t}{\Delta x} - \frac{F_n^t - F_{n-1}^t}{\Delta x} \right) \frac{v\Delta t^2}{2\Delta x} \right]$$
(3.24)

Παρατηρούμε ότι σε σχέση με τις κεντρικές διαφορές, έχει προστεθεί ένας επιπλέον όρος $\left[\left(\frac{F_{n+1}^{t}-F_{n}^{t}}{\Delta x}-\frac{F_{n}^{t}-F_{n-1}^{t}}{\Delta x}\right)\frac{v\Delta t^{2}}{2\Delta x}\right]$, ο οποίος ουσιαστικά λειτουργεί διορθωτικά με αποτέλεσμα η μέθοδος να παρέχει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα. Στη σχέση (3.24) ο όρος ν είναι η ιδιοτιμή της Ιακωβιανής $\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)$.

1.5.1 Σωλήνας κρουστικών κυμάτων και η μέθοδος των Lax-Wendroff

Η σχέση (3.24) παρουσιάζει δυσκολίες σε ότι αφορά την εφαρμογή της για τη μελέτη του προβλήματος του σωλήνα κρουστικών κυμάτων, καθώς απαιτεί επίπονους υπολογισμούς για τον υπολογισμό της Ιακωβιανής των ροών F. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί διάφορες παραλλαγές της.

Για τη μελέτη του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε μία ιδιαίτερη μορφή της μεθόδου των Lax-Wendroff, η οποία βασίζεται σε μία διαδικασία δύο βημάτων. Οι σχέσεις που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι εξής

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(u_{i+1}^{n} + u_{i}^{n} \right) - \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x} \right) \left(F_{i+1}^{n} - F_{i}^{n} \right)$$
(3.25)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \left(F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$$
(3.26)

Όπως ήδη αναφέρθηκε στην παράγραφο 1.4.1., η μεταβλητή *u* παριστάνει τις διατηρήσιμες φυσικές ποσότητες u=u(ρ,m,e) ή u=u(ρ,ρv,e) ενώ η μεταβλητή *F* παριστάνει τη ροή των παραπάνω ποσοτήτων.

Στις παραπάνω σχέσεις οι όροι $n+\frac{1}{2}$, n, n+1 παριστάνουν τις διάφορες χρονικές στιγμές, ενώ οι όροι $i+\frac{1}{2}$, i, i+1 τις αντίστοιχες κυψελίδες.

1.5.2 Αποτελέσματα προγράμματος Lax - Wendroff

Η μέθοδος των Lax-Wendroff είναι δεύτερης τάξης και σύμφωνα με τις σχέσεις (3.25), (3.26) χρειάζονται δύο ξεχωριστοί αριθμητικοί υπολογισμοί για να υπολογίσουμε ένα πλήρες χρονικό βήμα. Για το πρόγραμμα συνολικά χρησιμοποιήσαμε Ν=1000 χωρικά σημεία, ενώ ο μονοδιάστατος σωλήνας έχει μήκος 10 μονάδες. Οι αρχικές συνθήκες είναι όμοιες με του προγράμματος των κεντρικών διαφορών, σχέσεις (3.19). Σύμφωνα λοιπόν με τη σχέση (3.20) και με τη συνθήκη CFL (σχέση (3.21)) ορίζουμε τόσο το χωρικό βήμα Δx , όσο και το χρονικό Δt . Συγκεκριμένα επιλέγουμε $\Delta t=0.004$. Είναι Γ=1.4.Τα αποτελέσματα του προγράμματος παρουσιάζονται στα διαγράμματα που ακολουθούν στις επόμενες σελίδες. Πρέπει να επισημάνουμε ότι η προσομοίωση των κρουστικών κυμάτων με τη βοήθεια της μεθόδου των Lax-Wendroff προσεγγίζει με αρκετά μεγάλη ακρίβεια την αναλυτική λύση του προβλήματος. Μάλιστα η συμπεριφορά της μεθόδου στα σημεία εκείνα που έχουμε απότομες μεταβολές των τιμών των ποσοτήτων, κρίνεται εξαιρετική. Βέβαια υπάρχουν σε ορισμένα σημεία εμφανείς διαταραχές, οι οποίες οφείλονται σε αριθμητικά σφάλματα. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί αν στις σχέσεις, (3.25), (3.26) προσθέσουμε επιπλέουν όρους που περιγράφουν το ιξώδες του ρευστού. Σε γενικές γραμμές για τη μέθοδο των Lax–Wendroff οφείλουμε να επισημάνουμε τα εξής

- ότι για να είναι ευσταθής πρέπει να ισχύει η συνθήκη CFL, σχέση (3.21)
- ότι εμφανίζει σφάλματα τόσο διαταραχών, όσο και διάχυσης
- ότι είναι αρκετά ακριβής και προσφέρει ικανοποιητικά αποτελέσματα

Σχήμα 1.10: Χρονική εξέλιξη της πυκνότητας.

Τα τέσσερα παρακάτω διαγράμματα αποτελούν στιγμιότυπα της πυκνότητας, σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Παρατηρούμε το σχηματισμό του κρουστικού κύματος, της ασυνέχειας επαφής και του κύματος αραίωσης. Επιπλέον είναι ευδιάκριτα τόσο τα φαινόμενα διάχυσης, όσο και τα φαινόμενα διαταραχών, που οφείλονται σε αριθμητικά σφάλματα της μεθόδου.





Σχήμα 1.11: Χαρακτηριστικά στιγμιότυπα της πίεσης

Σχήμα 1.12: Χαρακτηριστικά στιγμιότυπα της ταχύτητας Είναι εμφανής ο σχηματισμός μίας περιοχής όπου η ταχύτητα έχει σταθερή τιμή, ενός είδους "πλατό" καθώς και η ύπαρξη αριθμητικών σφαλμάτων που προκαλούν τις διαταραχές.





Σχήμα 1.13: Χαρακτηριστικά στιγμιότυπα της ενέργειας.

1.6 Η μέθοδος του Godunov

Οι αριθμητικές μέθοδοι που αφορούν τους νόμους διατήρησης βασίζονται κατά κύριο λόγο στη διαφορική μορφή των νόμων αυτών. Το κύριο χαρακτηριστικό των μεθόδων αυτών είναι ότι απαιτούν τη διακριτοποίηση του χώρου σε δύο διαφορετικά είδη πλεγμάτων. Υποθέτουμε ότι μας απασχολεί ο μονοδιάστατος χώρος. Αρχικά ο χώρος διαιρείται σε ένα πλήθος ακέραιων κυψελίδων, που ορίζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε το καθένα από αυτά να έχει ως όρια τα $[x, x + \Delta x] \equiv [x_i, x_{i+1}]$, όπου Δ*x* είναι η διάσταση του κάθε κελιού. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε ένα δεύτερο πλέγμα, στο οποίο οι κυψελίδες έχουν όρια $[x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}] \equiv [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ και ονομάζονται υπολογιστικές κυψελίδες. Με τη βοήθεια αυτών των στοιχειωδών κυψελίδων στις οποίες διαιρείται ο χώρος εισάγουμε τους μέσους όρους των ποσοτήτων $u=u(\rho, pv, e)$.

Γράφουμε λοιπόν

$$\overline{u}_{i}^{n} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_{n}) dx$$
(3.27)

Οι νόμοι διατήρησης μπορούν να γραφούν με τη μορφή

$$\overline{\mu}_{i}^{n+1} = \overline{\mu}_{i}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} \right)$$
(3.28)

όπου η «αριθμητική ροή F » ορίζεται ως

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(u\left(x_{i+\frac{1}{2}}, t\right)\right) dt$$
(3.29)

Oi treis napanáva oxéoeis anoteloův trv nránu por napová try predodou tou Godunov nou napovajače orplavtikés duokolies oe óti aporá kupias tov unologiarie orplavtikés duokolies oe óti apora kupias tov unologiarie tou oloklypáratos (3.29). H kúpia ouhboh tou Godunov otrv avántušy oločva kai nio asionistav arithutkáv metédőav érkeitai oto óti enivóro mia idiaiter texviký yia va unologičei to oloklýrama tav poáv avtikatiotás trj ouvártnom $u(x,t_n)$ me mia otaterý ouvártnom $\tilde{u}(x,t_n)$. Autý n nposégyion mas enitrénei va tropáva kai enopévas provařenom $\tilde{u}(x,t_n)$. Autý n nposégyion mas enitrénei va tropáva kai enopévas provařeva keliá od mia akoloutía anó odlýves kroustikáv kumátav kai enopévas prováre va lučava počíka to npóblyma tav aritkáv ouvérkáv tou Riemann oe káte éva anó autá. Anapaitnyn npočinóteon yia va letiouryňosi n methos kúhata kai n onoia esaogalíšetai me tr boh beina try ouvérkny tav Courant - Friedrichs - Lewyor (ouvérák CFL). Me tov trobno autó miopovíme va unologioum tonicá tri lukáv kumátav kumátav kupátav kai tri lukáva trov trobno autó moverák kai to unokovisoum to trokávis kupáta tupickáv kumáta kai n dola stár tra katá ouvéra to trobno autó morovária to unokovisoum to troká tra katá tri hoja trov trobno autó morovária to unokovisoum to troká tri luká tri hoja trov trobno autó morovária to unokovisoum to troká tri kúpa termina troká tra katá tra kat

ροών $f=f(\rho v, \rho v^2 + p, (e+p)v)$ και των αριθμητικών ροών F. Εφαρμόζοντας τη σχέση

(3.28) μπορούμε να βρούμε τις μέσες τιμές των ποσοτήτων την επόμενη χρονική στιγμή $\overline{u}^{n+1}.$

Η διαδικασία της μεθόδου του Godunov περιληπτικά είναι η εξής

1. Με τη βοήθεια των μέσων όρων \overline{u}_i^n κατασκευάζουμε μία σταθερή συνάρτηση $\tilde{u}(x,t_n)$ με σκοπό να προσεγγίσουμε τη λύση στις υπολογιστικές κυψελίδες $\begin{bmatrix} x_{i,\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$.

- 2. Το πρόβλημα των αρχικών συνθηκών του Riemann λύνεται στα άκρα των κυψελίδων $\left[x_{i\cdot\frac{1}{2}}, x_{i\cdot\frac{1}{2}} \right]$, δίνοντας τη λύση $\tilde{u}(x,t)$ για $t_n < t < t_{n+1}$.
- 3. Η λύση $\tilde{u}(x,t_{n+1})$ χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε την ποσότητα \overline{u}_i^{n+1} , που αντιστοιχεί στην επόμενη χρονική στιγμή.



Σχήμα 1.14: Μονοδιάστατο πλέγμα, διάκριση σε ακέραιες και υπολογιστικές κυψελίδες, αρχικές τιμές και ορισμός των μέσων όρων \overline{u}_i^n

1.7 Αλγόριθμος αναδόμησης-επίλυσης-μέσου όρου

Έχουν αναπτυχθεί πολυάριθμες αριθμητικές μέθοδοι, οι οποίες βασίζονται στη φιλοσοφία της μεθόδου του Godunov, δηλαδή στη λύση του προβλήματος των αρχικών τιμών του Riemann στα άκρα της κάθε κυψελίδας. Για το λόγο αυτό εισάγουμε τις συναρτήσεις $\tilde{u}(x,t)$, οι οποίες ορίζονται στο διάστημα $\begin{bmatrix} x \\ i-\frac{1}{2}, x \\ i+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ και προέρχονται από τις μέσες τιμές \overline{u}_i^n . Το άκρο λοιπόν $x_{i+\frac{1}{2}}$ μίας κυψελίδας είναι η διαχωριστική γραμμή ανάμεσα σε δύο διαφορετικές καταστάσεις του ρευστού, αυτής που βρίσκεται ακριβώς δεξιά του άκρου $\left(\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^r\right)$ και ακριβώς αριστερά του $\left(\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^i\right)$.



Σχήμα 1.15: Ορισμός των δεξιών και αριστερών καταστάσεων

Εάν θεωρήσουμε ότι

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{l} = \overline{u}_{i} \qquad \text{Kat} \qquad \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{r} = \overline{u}_{i+1}$$
(3.30)

ουσιαστικά καταλήγουμε στην αρχική μορφή της μεθόδου Godunov, η οποία έχει πρώτης τάξης ακρίβεια. Η σύγκλιση της μεθόδου μπορεί να βελτιωθεί εάν χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση για τον προσδιορισμό των ũ¹,ũ^r από αυτή των σχέσεων (3.30). Σε μία τέτοια περίπτωση η επιλογή των προσεγγίσεων αυτών πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή, ώστε να αποφεύγονται ανεπιθύμητες διαταραχές και αριθμητικά σφάλματα στην περιοχή που εμφανίζονται οι ασυνέχειες. Μία δυνατή προσέγγιση είναι η γραμμική, η οποία οδηγεί σε μεθόδους δεύτερης τάξης ακρίβειας και μία πιθανή μορφή της είναι η εξής

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{l} = \overline{u}_{i} - s_{i} \left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i} \right) \Longrightarrow \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{l} = \overline{u}_{i} - s_{i} \left(\frac{dx}{2} \right)$$
(3.31)

και

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{r} = \overline{u}_{i+1} - s_{i+1} \left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+1} \right) \Longrightarrow \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{r} = \overline{u}_{i+1} + s_{i+1} \left(\frac{dx}{2} \right)$$
(3.32)

όπου η κλίση ορίζεται ως

$$s_i = \frac{\overline{u}_{i+1} - \overline{u}_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$
(3.33)

Η επιλογή όμως αυτής της προσέγγισης προκαλεί διαταραχές στα κρουστικά κύματα με αποτέλεσμα η μέθοδος να αποδεικνύεται ασταθής.

Για την αποφυγή λοιπόν αυτών των ανεπιθύμητων διαταραχών έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι, γνωστές ως περιορισμοί κλίσεων, οι οποίες πρακτικά εμποδίζουν την εμφάνιση αυτών των διαταραχών κοντά στις ασυνέχειες. Η θεωρητική θεμελίωση αυτών των μεθόδων επιτυγχάνεται με τη βοήθεια μίας μαθηματικής ιδιότητας γνωστής ως TVD (ακρωνύμιο του total variation diminishing).

1.7.1 Περιορισμοί κλίσεων

Η συνθήκη TVD προτάθηκε το 1983 από τον Harten, είναι μη γραμμική και εξασφαλίζει σταθερότητα σε αριθμητικές μεθόδους. Η ολική απόκλιση μίας λύσης, που ορίζεται ως εξής

$$TV(u^{t}) = \sum_{i=1}^{N} \left| u_{i+1}^{t} - u_{i}^{t} \right|$$
(3.34)

είναι ένα μέτρο για τον αριθμό των διαταραχών που εμφανίζει η *u*. Η άμεση σύνδεση ανάμεσα στην ολική απόκλιση και το συνολικό αριθμό των διαταραχών γίνεται πιο εμφανής σύμφωνα με τον εξής ορισμό, ισοδύναμο με τον προηγούμενο

$$TV\left(u^{t}\right) = 2\left(\sum u_{\max} - \sum u_{\min}\right)$$
(3.35)

όπου το κάθε μέγιστο υπολογίζεται θετικά δύο φορές και αντίστοιχα κάθε ελάχιστο αρνητικά δύο φορές. Ο σχηματισμός διαταραχών που οφείλονται αποκλειστικά σε δυσλειτουργία των αριθμητικών μεθόδων προκαλεί την εμφάνιση νέων μεγίστων και ελαχίστων, με αποτέλεσμα η ολική απόκλιση να αυξάνει. Η συνθήκη TVD

$$TV\left(u^{t+\Delta t}\right) \le TV\left(u^{t}\right) \tag{3.36}$$

εξασφαλίζει ότι ο αριθμός των διαταραχών είναι φραγμένος.

Ουσιαστικά οι περιορισμοί των κλίσεων χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό νέων κλίσεων της μορφής $\sigma_i = \sigma_i \left(s_{i+\frac{1}{2}}, s_{i+\frac{1}{2}} \right)$, οπότε πλέον οι σχέσεις (3.31) και (3.32) γράφονται

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{l} = \overline{u}_{i} - \sigma_{i} \left(x_{i+\frac{1}{2}}^{l} - x_{i} \right) \Longrightarrow \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{l} = \overline{u}_{i} - \sigma_{i} \left(\frac{dx}{2} \right)$$
(3.37)

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{r} = \overline{u}_{i} - \sigma_{i+1}\left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+1}\right) \Longrightarrow \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{r} = \overline{u}_{i} + \sigma_{i+1}\left(\frac{dx}{2}\right)$$
(3.38)

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τέσσερις από τους πλέον διαδεδομένους περιορισμούς κλίσεων.

Περιορισμός κλίσης Minmod (Minmod limiter)

Πρόκειται για τον πλέον κοινό περιορισμό κλίσης και ο οποίος χρησιμοποιείται εκτενώς στη ρευστοδυναμική. Εισήχθη από τον Van Leer και οι νέες κλίσεις προκύπτουν ως εξής

$$\sigma_i = \min \mod \left(s_{i-\frac{1}{2}}, s_{i+\frac{1}{2}} \right)$$
(3.39)

όπου είναι

$$s_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\overline{u_{i+1}} - \overline{u_i}}{x_{i+1} - x_i}$$
(3.40)

Η συνάρτηση min mod λειτουργεί ως εξής

$$\min \operatorname{mod}(a,b) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a) \min(|a|,|b|) & \operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b) \\ 0 & \operatorname{yia} & \operatorname{kahe} & \operatorname{all} & \pi \operatorname{erimtwosh} \end{cases}$$
(3.41)

και η συνάρτηση sgn(a) ουσιαστικά υπολογίζει το πρόσημο της νέας κλίσης

$$\operatorname{sgn}(a) \equiv \begin{cases} +1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$
 (3.42)

Περιορισμός κλίσης μονότονων κεντρικών διαφορών (MC limiter)

Εισήχθη επίσης από τον Van Leer και οι νέες κλίσεις είναι οι εξής

$$\sigma_{i} = \min \mod \left(s_{i}, 2s_{i-\frac{1}{2}}, 2s_{i+\frac{1}{2}} \right)$$
(3.43)

Η συνάρτηση minmod γράφεται για την περίπτωση αυτή

$$\min \operatorname{mod}(a,b,c) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a) \min(|a|,|b|,|c|) & \operatorname{eav} \operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b) \operatorname{kal} \operatorname{sgn}(b) = \operatorname{sgn}(c) \\ 0 & \operatorname{yla} \operatorname{kabe} \operatorname{allg} \pi \operatorname{ep}(\pi \tau \omega \sigma \eta) \end{cases}$$
(3.44)

Περιορισμός κλίσης Van Leer (Van Leer limiter)

Πρόκειται για ένα περιορισμό κλίσης που πρότεινε ο Van Leer και γράφεται ως εξής

$$\sigma_{i} = \frac{\left| \frac{s_{i+\frac{1}{2}}}{|s_{i+\frac{1}{2}}|} - \frac{s_{i-\frac{1}{2}}}{|s_{i+\frac{1}{2}}|} \right|}{\left| \frac{s_{i+\frac{1}{2}}}{|s_{i+\frac{1}{2}}|} + \frac{s_{i-\frac{1}{2}}}{|s_{i+\frac{1}{2}}|}}$$
(3.45)

Στην περίπτωση που ο παρανομαστής είναι μηδέν τότε είναι $\sigma_i = 0$.

Περιορισμός κλίσης Superbee (Superbee limiter)

Εισήχθη από τον Roe και γράφεται

$$\sigma_i = \max \mod \left(\sigma_i^{(1)}, \sigma_i^{(2)}\right) \tag{3.46}$$

όπου

$$\sigma_i^{(1)} = \min \mod \left(s_{i+\frac{1}{2}}, 2s_{i-\frac{1}{2}} \right)$$
(3.47)

και

$$\sigma_i^{(2)} = \min \mod \left(2s_{i+\frac{1}{2}}, s_{i-\frac{1}{2}} \right)$$
(3.48)

και

$$\max \mod(a,b) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a) \max(|a|,|b|) & \operatorname{eav} \operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b) \\ 0 & \operatorname{yia} & \operatorname{kahe} & \operatorname{all} & \operatorname{teriptical} \end{cases}$$
(3.49)

1.7.2 Σύγκριση των περιορισμών κλίσης

Στο σημείο αυτό επιχειρείται μία σύγκριση των μεθόδων που αναπτύχθηκαν θεωρητικά στις παραγράφους 1.7 και 1.7.1. Συγκεκριμένα θα γίνει εμφανές με ποιο τρόπο καθεμία από τις μεθόδους αυτές προσεγγίζει μία γνωστή δοσμένη συνάρτηση και επιπλέον θα γίνουν αντιληπτές οι αδυναμίες τους.

Υποθέτουμε ότι έχουμε τη συνάρτηση

$$q(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & x \le 1/2 \\ 0 & x > 1/2 \end{cases}$$
(3.50)

Παρατηρούμε ότι στο σημείο $x = \frac{1}{2}$ η συνάρτηση εμφανίζει μία ασυνέχεια, μία απότομη

δηλαδή μεταβολή. Η ύπαρξη αυτής της ασυνέχειας δεν είναι τυχαία, αλλά μας επιτρέπει να μελετήσουμε τη σύγκλιση και τη συμπεριφορά της κάθε μεθόδου στο συγκεκριμένο σημείο. Τα συμπεράσματα που εξάγονται είναι δυνατό να αξιοποιηθούν κατάλληλα για τη μελέτη του προβλήματος αρχικών τιμών του Riemann μέσα σε ένα σωλήνα κρουστικών κυμάτων.

Στο σχήμα της επόμενης σελίδας παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσπάθειας προσέγγισης της συνάρτησης q(x). Η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή παριστάνει τη συνάρτηση ενώ η μαύρη και συνεχής γραμμή παριστάνει αντίστοιχα το αποτέλεσμα κάθε μεθόδου.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι εξής

- Α. η μέθοδος του Godunov (παράγραφος 1.6)
- Β. αναδόμηση των μεταβλητών χωρίς τη χρήση περιορισμού κλίσης
- C. αναδόμηση των μεταβλητών με τη βοήθεια περιορισμού minmod
- D. αναδόμηση των μεταβλητών με τη βοήθεια περιορισμού MC

Παρατηρούμε ότι με τη χρήση των περιορισμών κλίσης είναι δυνατό να επιτύχουμε μία αρκετά ικανοποιητική προσεγγιστική λύση, ιδιαίτερα ακριβή. Μάλιστα τόσο στην περίπτωση της μεθόδου του Godunov, όσο και στην περίπτωση της χρήσης των περιορισμών minmod και MC παρατηρούμε ότι καταφέρνουν να αποδώσουν με σημαντική πιστότητα την υπάρχουσα ασυνέχεια. Στην περίπτωση C. που δε χρησιμοποιήθηκε περιορισμός κλίσης εμφανίζεται μία διαταραχή κοντά στην ασυνέχεια, η οποία μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για την αστάθεια της μεθόδου.



Σχήμα 1.16: Παρουσίαση τεσσάρων διαφορετικών αριθμητικών μεθόδων για την προσέγγιση της συνάρτησης $q(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & x \le 1/2 \\ 0 & x > 1/2 \end{cases}$

1.8 Προσεγγιστικές λύσεις για το πρόβλημα του Riemann

Η εύρεση της ακριβούς λύσης για το πρόβλημα των αρχικών συνθηκών του Riemann στην περίπτωση των ρευστών παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες. Η αναλυτική λύση του προβλήματος είναι μεν γνωστή, απαιτεί δε τη λύση μη γραμμικών εξισώσεων, μία διαδικασία που χρειάζεται επίπονες προσπάθειες για τον υπολογιστικό προγραμματισμό της. Μάλιστα πρόκειται για μία διαδικασία, η οποία πρέπει να επαναλαμβάνεται διαρκώς για κάθε κυψελίδα, κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος. Το ευτυχές είναι ότι η μέθοδος του Godunov, όπως περιγράφηκε νωρίτερα, δεν απαιτεί την ακριβή λύση του προβλήματος Riemann, καθώς χρησιμοποιεί τους μέσους όρους των διατηρήσιμων ποσοτήτων ū. Λαμβάνοντας υπόψη λοιπόν το υπολογιστικό κόστος για τη λύση του ακριβούς προβλήματος, έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι που προσεγγιστικά είναι δυνατό να παρέχουν αξιόπιστες λύσεις για το πρόβλημα του Riemann.Οι μέθοδοι αυτές δεν λύνουν το πρόβλημα των αρχικών τιμών για τα ρευστά ως αυτό έχει, παρά λύνουν ένα απλοποιημένο σύστημα εξισώσεων.

Διακρίνουμε τις εξής μεθόδους για την προσεγγιστική επίλυση του προβλήματος του Riemann

- τις μη γραμμικές μεθόδους, οι οποίες αντικαθιστούν τα κύματα αραίωσης με ασυνέχειες και αποδίδουν με αρκετή ακρίβεια τα χαρακτηριστικά των κρουστικών κυμάτων
- ii. τις μεθόδους τύπου HLLE (Hartex Lax –Van Leer Einfeldt), οι οποίες απλοποιούν τη δομή του προβλήματος Riemann χρησιμοποιώντας μόνο μία ενδιάμεση κατάσταση ανάμεσα σε δύο κρουστικά κύματα, τα οποία συνδέουν τις αρχικές δεξιές και αριστερές καταστάσεις.
- iii. τις γραμμικοποιημένες μεθόδους, τύπου Roe και Marquina, οι οποίες ουσιαστικά αναζητούν τη λύση ενός γραμμικού συστήματος, που συνδέεται άμεσα με τις αρχικές εξισώσεις του προβλήματος Riemann.

Θα ασχοληθούμε με τις μεθόδους τύπου HLLE. Στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε ένα στιγμιότυπο της εξέλιξης των κρουστικών κυμάτων της πίεσης (ανοικτό μπλε χρώμα), της ταχύτητας (κόκκινο χρώμα), της πυκνότητας (πράσινο χρώμα) και της ενέργειας (σκούρο μπλε χρώμα).



Σχήμα 1.17: Εξέλιξη της πυκνότητας, της ταχύτητας, της πίεσης, της ενέργειας στο εσωτερικό ενός σωλήνα κρουστικών κυμάτων

Τα ξεχωριστά τμήματα που διακρίνονται στο παραπάνω σχήμα παριστάνουν τη λύση του προβλήματος των αρχικών τιμών του Riemann για μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Οι δύο αρχικές καταστάσεις που προβλέπει το πρόβλημα συνδέονται από δύο ενδιάμεσες καταστάσεις (3, 4) και δύο κύματα (2 και διαχωριστική επιφάνεια περιοχών
4,5), τα οποία μπορεί να είναι είτε κρουστικά κύματα είτε τύπου αραίωσης. Μία προσέγγιση για την απλοποίηση του προβλήματος είναι η εξάλειψη των κυμάτων αραίωσης και η υπόθεση πως υπάρχουν αποκλειστικά κρουστικά κύματα. Με τον τρόπο αυτό απλοποιούνται οι εξισώσεις που πρέπει να λυθούν, καθιστώντας λιγότερο επίπονη τη χρήση των διαφόρων αριθμητικών μεθόδων.

1.8.1 Η μέθοδος HLLE

Για την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος με τη βοήθεια κάποιας αριθμητικής μεθόδου το αρχικό βήμα είναι η διαίρεση του χώρου σε κελιά ή κυψελίδες, τα οποία ανάλογα με τη φύση του προβλήματος συνθέτουν ένα μονοδιάστατο ή πολυδιάστατο πλέγμα. Στην περίπτωση που το υπό μελέτη πρόβλημα εξελίσσεται σε μία διάσταση ο

χώρος διαιρείται σε υπολογιστικές $\begin{bmatrix} x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$ και ακέραιες $\begin{bmatrix} x_i, x_{i+1} \end{bmatrix}$ κυψελίδες.

Η μέθοδος Harten–Lax–VanLeer–Einfeldt βασίζεται στην υπόθεση του Godunov, σύμφωνα με την οποία οι τρεις διατηρήσιμες ποσότητες (πυκνότητα μάζας ,ορμής και ενέργειας) έχουν μία σταθερή τιμή μέσα σε κάθε υπολογιστική κυψελίδα του μονοδιάστατου πλέγματος (σχέσεις (3.30)). Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται μία διαδοχή από τοπικά προβλήματα αρχικών τιμών του Riemann, καθένα από τα οποία εντοπίζεται στα κελιά (x_i, x_{i+1}) (σχήμα 1.14). Η λύση αυτών των προβλημάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστούν οι τιμές των ροών των διατηρήσιμων ποσοτήτων ανάμεσα στις κυψελίδες και κατά συνέπεια και οι τιμές των ίδιων των ποσοτήτων την επόμενη χρονική στιγμή.

Το γεγονός που καθιστά ιδιαίτερα ελκυστική τη μέθοδο του HLLE είναι ότι δεν απαιτεί τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων της Ιακωβιανής. Επιπλέον η μορφή της μεθόδου HLLE διαφέρει από αυτή του προβλήματος των αρχικών τιμών του Riemann στο ότι εισάγει μία νέα ενδιάμεση κατάσταση στις προϋπάρχουσες

$$u(x,t,u^{l},u^{r}) = \begin{cases} u^{l} & x < b_{l}t \\ u^{lr} & b_{l}t \le x \le b_{r}t \\ u^{r} & x > b_{r}t \end{cases}$$
(3.51)

όπου τα b_l και b_r προκύπτουν από τη σύνθεση της ταχύτητας του ρευστού v και της ταχύτητας με την οποία κινείται ο ήχος μέσα στο ρευστό c_s . Είναι λοιπόν

$$b_r = v + c_s \quad \text{kat} \quad b_l = v - c_s \tag{3.52}$$

Η ενδιάμεση κατάσταση ορίζεται με τη βοήθεια της απαίτησης για διατήρηση της ενέργειας σε κάθε υπολογιστικό κελί

$$u^{lr} = \frac{b_r u^r - b_l u^l - f(u^r) + f(u^l)}{b_r - b_l}$$
(3.53)

Η αριθμητική ροή είναι

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{b_r^+ f\left(u^l\right) - b_l^- f\left(u^r\right) + b_r^+ b_l^- \left(u^r - u^l\right)}{b_r^+ - b_l^-}$$
(3.54)

όπου

$$b_l^{-} = \begin{cases} b_l & \varepsilon \alpha v b_l < 0 \\ 0 & \varepsilon \alpha v b_l > 0 \end{cases} \quad \text{Kat} \quad b_r^{+} = \begin{cases} b_r & \varepsilon \alpha v b_r > 0 \\ 0 & \varepsilon \alpha v b_r < 0 \end{cases} \quad (3.55), (3.56)$$

Η μέθοδος HLLE αποδεικνύεται πως είναι αρκετά διαχυτική και δεν κατορθώνει να "συλλάβει" με ακρίβεια τις ασυνέχειες, όπως τα κρουστικά κύματα. Παρόλα αυτά εξακολουθεί να αποτελεί μία σημαντική προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα των αρχικών τιμών του Riemann για δύο τουλάχιστον λόγους.

- Η μέθοδος HLLE είναι πολύ απλή και δεν απαιτεί σίγουρα επίπονες υπολογιστικές προσπάθειες. Η ιδιότητά της αυτή την καθιστά ιδανική σα πρώτη προσέγγιση σε ένα πρόβλημα ή σαν ένα είδος ελέγχου της απόδοσης πιο πολύπλοκων μεθόδων.
- Είναι πολύ χρήσιμη για τη μελέτη φυσικών προβλημάτων. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην ιδιότητά της να αποδίδει στην πυκνότητα και στην ενέργεια αποκλειστικά θετικά τιμές κατά τη συνολική διάρκεια της υπολογιστικής διαδικασίας. Πολλές άλλες μέθοδοι δεν εμφανίζουν αυτό το χαρακτηριστικό με αποτέλεσμα να παράγουν λύσεις με μη αποδεκτές, από φυσικής άποψης, τιμές. Το φαινόμενο αυτό γίνεται εντονότερο σε δύο ή τρεις διαστάσεις.

1.9 Εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων στο σωλήνα κρουστικών κυμάτων

Στην παράγραφο αυτή μελετώνται οι αριθμητικές μέθοδοι, που αναπτύχθηκαν θεωρητικά πριν, σε μία πιο πρακτική βάση. Συγκεκριμένα εφαρμόζονται στην περίπτωση του σωλήνα κρουστικών κυμάτων, οπότε μέσω της σύγκρισης των αποτελεσμάτων είναι δυνατό να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για την ακρίβεια και την αξιοπιστία τους.

1.9.1 Η μέθοδος του Godunov

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Godunov, χρησιμοποιώντας το HLLE.

Έχουμε τέσσερα διαγράμματα, όπου το (a.) παριστάνει την πυκνότητα, το (b.) την πίεση, το (c.) την ταχύτητα και το (d.) την ενέργεια. Ουσιαστικά πρόκειται για στιγμιότυπα της εξέλιξης των αντίστοιχων μεταβλητών για χρόνο ίσο προς 1.2, που αντιστοιχεί σε 300 χρονικά βήματα της μεθόδου. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος καταφέρνει να αποδώσει το κρουστικό κύμα αρκετά ικανοποιητικά και μάλιστα σε βάθος χρόνου, ωστόσο στην περιοχή της ασυνέχειας επαφής εμφανίζει φαινόμενα διάχυσης. Άλλωστε πρόκειται για μία μέθοδο με ακρίβεια πρώτης τάξης



Σχήμα 1.18: Μελέτη του προβλήματος του σωλήνα κρουστικών κυμάτων με τη μέθοδο HLLE, χρησιμοποιώντας την αναδόμηση του Godunov (a πυκνότητα, b πίεση, c ταχύτητα, d ενέργεια)

Για το συγκεκριμένο πρόγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις (3.57), (3.58) και για την προσεγγιστική λύση του προβλήματος του Riemann εφαρμόστηκε η μέθοδος HLLE. Διακρίνονται τα διαγράμματα της πυκνότητας (a.), της ταχύτητας (b.), της πίεσης (c.) και της ενέργειας (d.) για t=1.2 .Παρατηρούμε ότι η αριθμητική αυτή μέθοδος προκαλεί διαταραχές και επομένως είναι ασταθής. Οι διαταραχές διακρίνονται στα διαγράμματα c και d, ως πιο σκούρες περιοχές, ενώ στα c1,d1 εμφανίζονται οι λεπτομέρειες.



Σχήμα 1.19: Μελέτη του προβλήματος του σωλήνα κρουστικών κυμάτων με τη μέθοδο HLLE, χωρίς τη χρήση περιορισμού κλίσης. (a πυκνότητα, b ταχύτητα, c πίεση, d ενέργεια, c1. και d1. λεπτομέρειες)

1.9.3 Περιορισμός κλίσης Minmod

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή χρησιμοποιήθηκαν ο περιορισμός κλίσης minmod και η μέθοδος HLLE. Πρόκειται για περιορισμό 2^{ης} τάξης και παρέχει σαφέστατη βελτίωση σε σχέση με το χωρίς περιορισμό πρόγραμμα, καθώς αποκόπτει τις διαταραχές, που οφείλονται σε αριθμητικά σφάλματα.



Σχήμα 1.20: Στιγμιότυπα (για t=1.2) της πυκνότητας (a.), της ταχύτητας (b.), της πίεσης (c.) και της ενέργειας (d.). Είναι αποτελέσματα του συνδυασμού των μεθόδων του περιορισμού κλίσης minmod και του HLLE.

1.9.4 Περιορισμός κλίσης MC

Χρησιμοποιήθηκε ο περιορισμός κλίσης MC ενώ, όμοια με πριν, για την προσεγγιστική επίλυση του προβλήματος του Riemann επιλέχθηκε η μέθοδος HLLE. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος εμφανίζει φαινόμενα διάχυσης, καθώς προσεγγίζει την ασυνέχεια επαφής και το κρουστικό κύμα με κλίση μικρότερη από την κανονική.



Σχήμα 1.21: Στιγμιότυπα (για t=1.2) της πυκνότητας (a.), της ταχύτητας (b.), της πίεσης (c.) και της ενέργειας (d.). Είναι αποτελέσματα του συνδυασμού των μεθόδων του περιορισμού κλίσης MC και του HLLE.

Godunov – MC



<u>Σχήμα 1.23</u>

Στο συγκεκριμένο διάγραμμα γίνεται σύγκριση των διαγραμμάτων της πυκνότητας, όπως προκύπτουν για την ίδια χρονική στιγμή (t =1.2). Παρατηρούμε ότι και οι δύο μέθοδοι εμφανίζουν παρόμοια αποτελέσματα στην περιοχή του κύματος αραίωσης και καταφέρνουν να το αποδώσουν ικανοποιητικά. Και οι δύο μέθοδοι αδυνατούν να αποδώσουν με ακρίβεια την ασυνέχεια επαφής και εμφανίζουν μικρότερη κλίση από την πραγματική. Στην περιοχή του κρουστικού κύματος η μέθοδος του Godunov είναι αρκετά αξιόπιστη, ενώ το πρόγραμμα με τον περιορισμό κλίσης MC εξακολουθεί να εμφανίζει μικρότερη κλίση. Σε γενικές γραμμές πάντως η HLLE για απλά προβλήματα λειτουργεί ικανοποιητικά.

Χωρίς περιορισμό κλίσης –Minmod



<u>Σχήμα 1.24</u>

Συγκρίνουμε τα διαγράμματα της πίεσης, όπως αυτά προκύπτουν χωρίς περιορισμό κλίσης και με minmod. Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις η εξέλιξη της πίεσης σχεδόν ταυτίζεται. Βέβαιο είναι εμφανές πως η χρήση του minmod βελτιώνει το τελικό αποτέλεσμα, καθώς εξαλείφονται σε μεγάλο βαθμό οι διαταραχές που εμφανίζονταν χωρίς τη χρήση του περιορισμού κλίσης και η εξέλιξη της πίεσης αποδίδεται με μεγαλύτερη πιστότητα.



<u>Σχήμα 1.25</u>

Στο διπλανό σχήμα παρατίθενται τα διαγράμματα της πυκνότητας, όπως προκύπτουν για τους περιορισμούς κλίσης MC και minmod. Παρατηρούμε ότι τα δύο διαγράμματα ουσιαστικά ταυτίζονται, ενώ εμφανίζουν και παρόμοια φαινόμενα διάχυσης στις περιοχές της ασυνέχειας επαφής και του κρουστικού κύματος. Πρακτικά όμως το minmod εμφανίζει πιο έντονα φαινόμενα διάχυσης σε σχέση με το MC ή το superbee.

Τα παραπάνω διαγράμματα είναι αποτέλεσμα του υπολογιστικού προγραμματισμού των αριθμητικών μεθόδων που αναφέρθηκαν .Ο προγραμματισμός έγινε με τη βοήθεια της γλώσσας C, ενώ τα διαγράμματα σχεδιάστηκαν με τη βοήθεια του πακέτου γραφικών Origin.

Τα δεδομένα (αρχικές συνθήκες των ρ,p,v, μήκος του σωλήνα κρουστικών κυμάτων, αριθμός σημείων, κ.τ.λ.) είναι πανομοιότυπα για όλα τα προγράμματα. Επιπλέον για την καλύτερη σύγκριση των αποτελεσμάτων, όλα τα διαγράμματα είναι στιγμιότυπα που αφορούν την ίδια χρονική στιγμή.

Το μήκος του μονοδιάστατου σωλήνα επιλέχθηκε ίσο προς 10 μονάδες. Το διάφραγμα τοποθετείται ακριβώς στο κέντρο. Οι αρχικές τιμές του προβλήματος είναι

$$\rho = \begin{cases}
1 & x \le 5 \\
0.125 & x > 5
\end{cases}, \quad p = \begin{cases}
1 & x \le 5 \\
0.1 & x > 5
\end{cases} \quad \text{Kat} \quad v = 0.$$
(3.59)

Το μονοδιάστατο πλέγμα αποτελείται από 1000 σημεία, οπότε σύμφωνα με τη σχέση (3.20), υπολογίζεται το Δχ και μάλιστα είναι Δx=0.01001. Η ταχύτητα του ήχου δίνεται από τη σχέση (3.21), και οι τιμές της πίεσης και της πυκνότητας που αντικαθιστούμε είναι οι μικρότερες, δηλαδή p=0.1 και ρ=0.125. Στη συνέχεια με τη βοήθεια της συνθήκης CFL είναι δυνατό να αποδοθεί τιμή στο χρονικό βήμα. Επιλέγεται τελικά Δt=0.004 (πρακτικά μία καλή επιλογή για το χρονικό βήμα είναι να κυμαίνεται στο 50%-40% της τιμής του λόγου $\frac{\Delta x}{v}$). Ο αδιαβατικός δείκτης είναι ίσος προς Γ=1.4.

Τέλος είναι σε κάθε περίπτωση σημαντικό να θυμόμαστε ότι το αποτέλεσμα που προκύπτει από την εφαρμογή των μεθόδων που προσεγγίζουν τη λύση του προβλήματος του Riemann (π.x. HLLE) είναι ακριβώς προσεγγιστικό. Για το λόγο αυτό είναι δυνατό σε ορισμένες περιπτώσεις η λύση να μην είναι φυσικώς αποδεκτή. Το ευτυχές είναι ότι όταν μία τέτοια προσεγγιστική μέθοδος αποτυγχάνει, ίσως μία άλλη να λειτουργεί ομαλά και να παράγει σωστά αποτελέσματα. Για σύνθετα λοιπόν προβλήματα είναι δυνατή και ίσως απαραίτητη η εφαρμογή περισσοτέρων από μίας προσεγγιστικών μεθόδων, ώστε να αλληλοσυμπληρώνονται.

Κεφάλαιο 2

Αριθμητικές μέθοδοι στην ειδική σχετικότητα

Η σχετικότητα είναι ένα απαραίτητο εργαλείο στα χέρια των φυσικών, στην προσπάθειά τους να περιγράψουν αστροφυσικά φαινόμενα σχετικά με συμπαγή αντικείμενα. Ανάλογα φαινόμενα είναι η κατάρρευση του πυρήνα των αστέρων, τα πάλσαρς, οι αστέρες νετρονίων, συστήματα αστέρων νετρονίων, ο σχηματισμός μελανών οπών, τα κβάζαρς, οι πίδακες (jets), οι εκρήξεις ακτίνων γάμμα (GRB). Στην περίπτωση που συναντώνται ισχυρά βαρυτικά πεδία, όπως συμβαίνει κοντά σε μία μελανή οπή, πρέπει να ληφθούν υπόψη οι προβλέψεις της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Επίσης η παραγωγή βαρυτικών κυμάτων που οφείλεται κατά κύριο λόγο σε αυτά τα φαινόμενα, είναι δυνατό να ερμηνευθεί μόνο στο πλαίσιο της γενικής σχετικότητας. Υπάρχουν όμως ορισμένα σχετικιστικά φαινόμενα, τα οποία σχετίζονται με ροές που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες, αλλά μέσα σε πιο ασθενή βαρυτικά πεδία. Σε ανάλογες περιπτώσεις είναι δυνατό να μελετηθούν αυτά τα φαινόμενα, ή τουλάχιστον κάποιες πλευρές τους, στο πλαίσιο της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας τις επιδράσεις της γενικής θεωρίας.

2.1 Σχετικιστικές εξισώσεις ρευστοδυναμικής

Οι εξισώσεις ,που περιγράφουν την κίνηση ενός σχετικιστικού ρευστού δίνονται από τους παρακάτω πέντε νόμους διατήρησης

και

$$\left(\rho u^{\mu}\right)_{;\mu} = 0 \tag{2.1}$$

$$T^{\mu\nu}_{\ ;\nu} = 0 \tag{2.2}$$

όπου (μ,ν=0,...,3) και μσυμβολίζει τη συναλλοίωτη παράγωγο. Επιπλέον ρ είναι η πυκνότητα της μάζας ηρεμίας του ρευστού (rest mass density), u^μ είναι η τετραταχύτητά του και Τ^{μν} είναι ο τανυστής τάσης-ενέργειας-ορμής. Για ένα τέλειο ρευστό ο τανυστής γράφεται

$$T^{\mu\nu} = \rho h u^{\mu} u^{\nu} + p g^{\mu\nu}$$
(2.3)

όπου g^{µν}είναι ο μετρικός τανυστής, pείναι η πίεση του ρευστού και hείναι η ειδική ενθαλπία του, που ορίζεται ως

$$h = 1 + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \tag{2.4}$$

ενώ εείναι η ειδική εσωτερική ενέργεια του ρευστού.

Πρέπει να διευκρινίσουμε ότι μέχρι στιγμής η ταχύτητα του φωτός έχει θεωρηθεί ίση με τη μονάδα ($c \equiv 1$).

Στο χωρόχρονο του Minkowski και σε καρτεσιανές συντεταγμένες (t,x^1,x^2,x^3) οι νόμοι διατήρησης μπορούν να γραφούν με την εξής διανυσματική μορφή

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^{i}(U,u)}{\partial x^{i}} = 0$$
(2.5)

όπου i=1,2,3. Το διάνυσμα των διατηρήσιμων ποσοτήτων U γράφεται

$$U = U(R, M^{1}, M^{2}, M^{3}, E)^{T}$$
(2.6)

και το διάνυσμα των ροών Fⁱ είναι

$$F^{i} = F\left(Rv^{i}, M^{1}v^{i} + p\delta^{1i}, M^{2}v^{i} + p\delta^{2i}, M^{3}v^{i} + p\delta^{3i}, Ev^{i} + pv^{i}\right)^{T}.$$
(2.7)

Oi πέντε διατηρήσιμες ποσότητες R,M^1,M^2,M^3 και Εείναι αντίστοιχα η πυκνότητα μάζας, οι τρεις συνιστώσες της πυκνότητας ορμής και τελικά η πυκνότητα ενέργειας. Auτές οι ποσότητες υπολογίζονται σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το οποίο ονομάζεται εργαστηριακό (laboratory rest frame) και διακρίνεται από το τοπικό σύστημα αναφοράς (local rest frame) του ρευστού. Ουσιαστικά λοιπόν έχουμε δύο συστήματα αναφοράς, που διαφέρουν κατά το ότι το εργαστηριακό μπορεί να είναι οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς ενώ το τοπικό είναι συγκεκριμένο για κάθε είδος ρευστού. Οι εργαστηριακές ποσότητες R,M^1,M^2,M^3,E συνδέονται με τις τοπικές ρ,v^1,v^2,v^3,p με τις εξής σχέσεις

$$R = \gamma \rho \tag{2.8}$$

$$M = \rho h \gamma^2 v^i$$
 όπου (*i* = 1, 2, 3) (2.9)

$$E = \rho h \gamma^2 - p - R \tag{2.10}$$

Ο παράγοντας Lorentz είναι

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^i v_i}} \tag{2.11}$$

Το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων ολοκληρώνεται εφόσον θεωρήσουμε και μία καταστατική εξίσωση, για την οποία υποθέτουμε ότι είναι της μορφής

$$p = p(\rho, \varepsilon) . \tag{2.12}$$

Στα όρια ισχύος της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας (π.χ. $v \ll 1, h \to 1$), οι ποσότητες R,Mⁱ,E προσεγγίζουν τις αντίστοιχες Νευτώνειες και οι εξισώσεις του παραπάνω συστήματος καταλήγουν στις κλασικές. Στη σχετικιστική περίπτωση οι εξισώσεις συνδέονται ισχυρά μεταξύ τους μέσω του παράγοντα Lorentz και της ενθαλπίας. Στην κλασική αριθμητική ρευστοδυναμική είναι πολύ εύκολο να υπολογιστεί η τιμή των ταχυτήτων vⁱ, εφόσον είναι γνωστές οι τιμές της πυκνότητας ρ και των ορμών (ρvⁱ). Στη σχετικιστική όμως περίπτωση η διαδικασία για τον υπολογισμό των (ρ,vⁱ, p) από τα (R,Mⁱ,E) είναι πολύ πιο σύνθετη, καθώς θα πρέπει να λυθεί το σύστημα των πέντε παραπάνω εξισώσεων.

2.1.1 Μονοδιάστατες εξισώσεις ρευστοδυναμικής

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο το κριτήριο για την εκτίμηση των αριθμητικών μεθόδων που εφαρμόζονται στην ειδική σχετικότητα θα είναι το πρόβλημα του μονοδιάστατου σωλήνα κρουστικών κυμάτων, το οποίο βασίζεται στο πρόβλημα των αρχικών τιμών του Riemann, η αναλυτική λύση του οποίου έχει βρεθεί. Επειδή πλέον εργαζόμαστε σε μία διάσταση, π.χ. τη χ, οι νόμοι διατήρησης γράφονται ως εξής

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U,u)}{\partial x} = 0$$
(2.13)

όπου

$$U = \begin{bmatrix} R \\ M \\ E \end{bmatrix} \text{ Kat } F = \begin{bmatrix} Rv \\ Mv + p \\ (E+p)v \end{bmatrix}.$$
(2.14), (2.15)

Οι σχέσεις που συνδέουν τις ποσότητες ανάμεσα στα δύο συστήματα αναφοράς, μετά από απλοποίηση, γράφονται

$$R = \gamma \rho \tag{2.16}$$

$$M = \gamma^2 \left(e + p \right) v \tag{2.17}$$

$$E = \gamma^2 \left(e + p \right) - p \tag{2.18}$$

Ο παράγοντας Lorentz είναι

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \,. \tag{2.19}$$

Ως καταστατική εξίσωση επιλέγουμε αυτή του ιδανικού αερίου

$$p = (\Gamma - 1)(e - \rho) \tag{2.20}$$

και η μορφή της όταν e $>>\rho$ είναι

$$p = (\Gamma - 1)e \tag{2.21}$$

με τον αδιαβατικό δείκτη να παίρνει τιμές $1 \le \Gamma \le 2$.

Για να είναι δυνατό το σύστημα να έχει λύση πρέπει να ισχύουν ορισμένοι φυσικοί περιορισμοί, όπως $E \ge R$, $E \ge M$ και $-1 \le v \le 1$.

2.1.2 Μετασχηματισμός των συστημάτων συντεταγμένων

Για πέντε γνωστές τιμές των R,M,E οι εξισώσεις (2.16)–(2.19), μαζί με την καταστατική εξίσωση (2.20) και τον ορισμό του παράγοντα Lorentz, συνθέτουν ένα σύστημα πέντε εξισώσεων με πέντε άγνωστες μεταβλητές, τις ρ,e,p,v,γ. Το σύστημα αυτό πρέπει να λυθεί σε κάθε κυψελίδα αρκετές φορές κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος και μάλιστα η εύρεση των σωστών λύσεων είναι ένα πολύ σημαντικό τμήμα των αριθμητικών μεθόδων που εφαρμόζονται στην ειδική σχετικότητα.

Οι εξισώσεις (2.16), (2.19) και (2.20),μπορούν να εισαχθούν απευθείας στις εξισώσεις (2.18) και (2.17),οπότε προκύπτουν δύο συζευγμένες, μη γραμμικές εξισώσεις με αγνώστους τα εκαι ν. Το σύστημα των δύο πλέον εξισώσεων μπορεί να λυθεί με τη βοήθεια μίας κατάλληλης δισδιάστατης αριθμητικής μεθόδου και επομένως να υπολογιστούν με αυτό τον τρόπο οι τιμές των αγνώστων μεταβλητών. Ωστόσο η όλη διαδικασία είναι δυνατό να απλοποιηθεί ακόμα περισσότερο από τη στιγμή που έχουμε επιλέξει ως καταστατική εξίσωση αυτή του ιδανικού αερίου. Με απλές αλγεβρικές πράξεις εξαλείφεται μία από τις δύο άγνωστες μεταβλητές, καταλήγοντας σε μία μόνο εξίσωση για την εναπομένουσα μεταβλητή. Πρόκειται για ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού της μορφής

$$g(v) = \left[\Gamma v \left(E - Mv\right) - M \left(1 - v^{2}\right)\right]^{2} - \left(1 - v^{2}\right) v^{2} \left(\Gamma - 1\right)^{2} R^{2} = 0$$
(2.22)

όπου $0 \le v \le 1$. Αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί είτε με την εφαρμογή της μεθόδου για την εύρεση των ριζών πολυωνύμου τετάρτου βαθμού, είτε με τη χρήση κάποιας κατάλληλης αριθμητικής μεθόδου, που με παρεμβολή θα υπολογίζει τις ρίζες. Έχει αποδειχτεί πως με τη χρήση των κατάλληλων εκφράσεων για το ανώτερο όριο της ταχύτητας v_1 , το κατώτερο v_u και την αρχική τιμή v_0 , η προσέγγιση των ριζών με αριθμητικές μεθόδους είναι ταχύτερη στο να επιτύχει την επιδιωκόμενη ακρίβεια των εννέα δεκαδικών ψηφίων.

Η έκφραση για το κατώτερο όριο της ταχύτητας ν₁ προκύπτει αν στην εξίσωση (2.22) θέσουμε R=0, οπότε προκύπτει

$$v_{l} = \frac{(\Gamma E) - \sqrt{(\Gamma E)^{2} - 4(\Gamma - 1)M^{2}}}{2M(\Gamma - 1)}$$
(2.23)

Από τις εξισώσεις (2.17), (2.18) παρατηρεί κανείς ότι για p=0 είναι $v=\frac{M}{E}$, ενώ για p>0 είναι $v<\frac{M}{E}$. Επομένως μία αρκετά ασφαλής εκτίμηση για το άνω όριο της ταχύτητας v_u είναι

$$v_u = \min\left(1, \frac{M}{E} + \delta\right)$$

(2.24)

όπου $\delta \square 10^{-6}$. Στο διάστημα ανάμεσα στα v_1 και v_u υπάρχει μία μοναδική λύση της εξίσωσης (2.22), ενώ στο διάστημα $0 \le v \le 1$ υπάρχει και μία δεύτερη λύση, η οποία όμως δεν είναι λύση και των αρχικών εξισώσεων του συστήματος. Η ύπαρξή της οφείλεται στο ότι για να προκύψει η (2.22) χρησιμοποιείται το τετράγωνο της (2.17)

Ένα επιπλέον πλεονέκτημα της χρήσης των ορίων v₁ και v_u είναι ότι και οι δύο αυτοί όροι τείνουν στο μηδέν καθώς το Μ προσεγγίζει και αυτό το μηδέν. Μία έκφραση για την αρχική τιμή στη μέθοδο παρεμβολής, που οδηγεί σε ταχύτατη σύγκλιση είναι η εξής

$$v_0 = \frac{v_l + v_u}{2} + z \tag{2.25}$$

όπου

$$z = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R}{E} \right) (v_l - v_u) & \text{for } v_1 > 10^{-9} \\ 0 & \text{gia kabe} & \text{ally preserved} \end{cases}$$
(2.26)

Το πρόβλημα της εύρεσης της ρίζας της εξίσωσης (2.22), που έχει φυσική σημασία, μπορεί πλέον να λυθεί με την εφαρμογή της μεθόδου Newton- Raphson.

$$v_{n+1} = v_n - \frac{g(v_n)}{g'(v_n)}$$
(2.27)

όπου

$$g'(v) = 2 \Big[\Gamma v (E - Mv) - M(1 - v^2) \Big] \Big[\Gamma E - 2M \Gamma v + 2Mv \Big] + 2v (2v^2 - 1) (\Gamma - 1)^2 R^2$$
(2.28)

είναι η παράγωγος της g(v). Η εύρεση της ρίζας με ακρίβεια εννέα δεκαδικών ψηφίων επιτυγχάνεται μετά από πέντε διαδοχικά βήματα.

Γνωρίζοντας την τιμή του V, είναι εύκολο να υπολογιστεί η πυκνότητα ενέργειας από τη σχέση

$$e = E - vM . (2.29)$$

Οι τιμές των γ,ρ, p προκύπτουν στη συνέχεια απευθείας από τις εξισώσεις (2.16), (2.19), και (2.20).

2.2 Το πρόβλημα του σωλήνα των κρουστικών κυμάτων

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, έτσι και σε αυτό το πρόβλημα των αρχικών τιμών του Riemann, αποτελεί βασικό πεδίο αξιολόγησης και σύγκρισης των διάφορων αριθμητικών μεθόδων. Η λύση του προβλήματος του Riemann αφορά τη ροή ενός ρευστού στο εσωτερικό ενός σωλήνα κρουστικών κυμάτων και το οποίο κινείται με σχετικιστικές ταχύτητες. Όπως είναι ήδη γνωστό από το προηγούμενο κεφάλαιο (παράγραφος 1.2), θεωρούμε πως δύο περιοχές ενός ρευστού με διαφορετικές τιμές πίεσης και πυκνότητας η κάθε μία, χωρίζονται με ένα διάφραγμα και πως τη χρονική στιγμή t = 0 απομακρύνουμε αυτό το διάφραγμα. Σχηματίζονται λοιπόν πέντε διαφορετικές καταστάσεις (σχήμα 2.1).

Η αναλυτική λύση του προβλήματος Riemann προκύπτει εάν θεωρήσουμε ότι η πίεση και η ταχύτητα στο τέλος του κύματος αραίωσης και στο μέτωπο του κρουστικού κύματος είναι ίσες, οπότε ισχύει

$$p_3 = p_4$$
 kat $v_3 = v_4$. (2.30),(2.31)

Σχήμα 2.1: Εξέλιξη της πυκνότητας, της ταχύτητας, της πίεσης, της ενέργειας στο εσωτερικό ενός σωλήνα κρουστικών κυμάτων ,όπου οι περιοχές 1, 5 είναι το αδιατάρακτο ρευστό, η περιοχή 2 είναι το κύμα αραίωσης, η 3 περιέχεται ανάμεσα στο τέλος του κύματος αραίωσης και την ασυνέχεια επαφής και η 4 είναι η σταθερή περιοχή ανάμεσα στην ασυνέχεια επαφής και το μέτωπο του κρουστικού κύματος.

Το κύμα αραίωσης μπορεί να προσδιοριστεί εφαρμόζοντας μεθόδους ομοιότητας, οπότε απαιτείται η αριθμητική ολοκλήρωση μίας διαφορικής εξίσωσης πρώτου βαθμού.

Για τη μελέτη της σχετικιστικής ισοτροπικής διαστολής είναι απαραίτητες οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής (σχέσεις (2.13)),

$$R_{t} + (Rv_{x}) = 0 \tag{2.32}$$

$$M_{t} + (Mv + p)_{x} = 0 \tag{2.33}$$

Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

$$E_t + (Ev + pv)_v = 0 \tag{2.34}$$

αντικαθίσταται από τον αδιαβατικό νόμο διαστολής

$$\frac{e-\rho}{e_1-\rho_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\mathrm{I}}$$

(2.35)

Ορίζοντας τη μεταβλητή ομοιότητας

$$\zeta = \frac{x}{t} \tag{2.36}$$

η εξίσωση συνέχειας μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{dR}{dv} = -\frac{R}{v-\zeta} \tag{2.37}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του τανυστή ορμής–ενέργειας, την καταστατική εξίσωση και την ποσότητα $B \equiv \gamma(e-n)$, η ορμή μπορεί να γραφεί ως

$$M = (R + \Gamma B)\gamma\nu \tag{2.38}$$

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους $\frac{dR}{d\zeta}$ και $\frac{dv}{d\zeta}$, προκύπτει, μετά από μία σειρά αλγεβρικών πράξεων, η διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού

$$\frac{dR}{dv} = \frac{R}{1 - v^2} \left(v - \sqrt{\frac{R + \Gamma B}{\Gamma \left(\Gamma - 1\right)B}} \right)$$
(2.39)

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.39) υπολογίζεται με τη βοήθεια της μεθόδου Runge–Kutta τέταρτης τάξης, ξεκινώντας με $v^{(0)}=0$.

Η λύση του σχετικιστικού προβλήματος δίνεται από τις σχέσεις των Rankine-Hugoniot-Taub. Στο εργαστηριακό σύστημα αναφοράς οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν

$$v_{3} = \left[\frac{(p_{4} - p_{5})(e_{4} - e_{5})}{(e_{5} + p_{4})(e_{4} + p_{5})}\right]^{\frac{1}{2}}$$
(2.40)

και

$$v_{shock} = \left[\frac{(p_4 - p_5)(e_4 + p_5)}{(e_5 + p_4)(e_4 - e_5)}\right]^{\frac{1}{2}}$$
(2.41)

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις μπορούν να συνδυαστούν, οπότε προκύπτει

$$v_{shock} = \frac{1}{v_4} \frac{p_4 - p_5}{e_5 + p_4} \tag{2.42}$$

Ο ρυθμός συμπίεσης προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\frac{\rho_4}{\rho_5} = \frac{\tilde{\gamma}_5 \tilde{v}_5}{\tilde{\gamma}_4 \tilde{v}_4} \tag{2.43}$$

όπου η περισπωμένη δηλώνει ποσότητες ορισμένες στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς του μετώπου του κρουστικού κύματος.

Η λύση του σχετικιστικού προβλήματος Riemann είναι δυνατή με την εξίσωση των p⁽ⁱ⁾ кαι v⁽ⁱ⁾, δηλαδή της πίεσης και της ταχύτητας του iβήματος της μεθόδου Runge–Kutta για την επίλυση της (2.39), με τα p₄ και v₄ αντίστοιχα. Ο κώδικας μπορεί να γίνει πιο αποτελεσματικός λύνοντας αρχικά την εξίσωση (2.42) για v₄=v⁽ⁱ⁾. Για όσο διάστημα η ταχύτητα του κρουστικού κύματος υπερβαίνει την ταχύτητα του φωτός, τα αποτελέσματα που προκύπτουν στερούνται φυσικού νοήματος. Μόλις όμως v_{shock} ≤ 1 , τα αποτελέσματα κρίνονται αποδεκτά από φυσικής άποψης και η ποσότητα

$$p_5^{(i)} = (e_4 + p_4) \tilde{v}_4 \tilde{\gamma}_4^2 (\tilde{v}_4 - \tilde{v}_5) + p_4$$
(2.44)

υπολογίζεται. Η συνθήκη εξίσωσης είναι

$$\left| p_4^{(i)} - p_4 \right| < \varepsilon \tag{2.45}$$

Αρχικά η διαφορά στη σχέση (2.45) είναι αρνητική . Από τη στιγμή που γίνεται θετική, η λύση επιτυγχάνεται με γραμμική παρεμβολή (regula falsi).

2.3 Η σχετικιστική μέθοδος HLLE

Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί αριθμητικές μέθοδοι ικανές να επιλύουν τις εξισώσεις του Euler (σχέσεις) για μη σχετικιστικά ρευστά. Το κυριότερο στοιχείο αυτών των μεθόδων είναι ότι λαμβάνουν υπόψη τους τη διεύθυνση μετάδοσης του κύματος. Είναι αυτό ακριβώς το γνώρισμα των μεθόδων αυτών που τις επιτρέπει να "συλλαμβάνουν" ασυνέχειες, όπως τα κρουστικά κύματα.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε αναφορά στη μέθοδο HLLE (παράγραφος 1.8.1). Πρόκειται για μία μέθοδο που βασίζεται στην ιδέα του Godunov, ότι δηλαδή οι τιμές των διατηρήσιμων ποσοτήτων της πυκνότητας μάζας, ορμής και ενέργειας θεωρούνται σταθερές μέσα σε κάθε κυψελίδα του πλέγματος. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζεται μία αλληλουχία από προβλήματα αρχικών τιμών του Riemann, των οποίων η λύση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των ροών ανάμεσα στις κυψελίδες. Πρόκειται για μία διαδικασία που επαναλαμβάνεται σε κάθε χρονικό βήμα. Η μέθοδος HLLE καταφέρνει να λύνει προσεγγιστικά κάθε ένα από αυτά τα προβλήματα του Riemann, χωρίς τη χρήση της αναλυτικής λύσης. Με τον τρόπο αυτό διευκολύνεται σημαντικά η όλη διαδικασία, καθώς η χρήση της αναλυτικής λύσης μπορεί να αποδειχτεί επίπονη υπολογιστικά.

Το σύστημα των νόμων διατήρησης (2.13) γράφεται

$$U_{t} + F(U)_{x} = 0 (2.46)$$

όπου U= $\{R,M,E\}^{T}$ και $F(U)=\{Rv,Mv+p,(E+p)v\}^{T}$. Όπως και στην περίπτωση του μη σχετικιστικού HLLE, η προσεγγιστική λύση του προβλήματος του Riemann έχει την εξής μορφή

$$U\left(x,t,U^{l},U^{r}\right) = \begin{cases} U^{l} & x < b_{l}t \\ U^{lr} & b_{l}t \le x \le b_{r}t \\ U^{r} & x > b_{r}t \end{cases}$$

(2.47)

Η παραπάνω μορφή προϋποθέτει τη γνώση των τιμών για τις ταχύτητες b₁ και b_r. Όπως είναι ήδη γνωστό, σύμφωνα με τη μέθοδο του Godunov, πρέπει το πρόβλημα των αρχικών τιμών του Riemann να λυθεί στο εσωτερικό κάθε κυψελίδας. Η εξέλιξη του προβλήματος διαρκεί όσο κάθε χρονικό βήμα. Στο τέλος κάθε χρονικού βήματος υπάρχουν στο εσωτερικό της κυψελίδας τρεις διαφορετικές καταστάσεις. Πρόκειται για τις U^{tr}, U^r, που αντιστοιχούν στις καταστάσεις που υπήρχαν πριν την εξέλιξη του προβλήματος του Riemann και τέλος για την κατάσταση U^{tr}, που ουσιαστικά είναι η ενδιάμεση. Το σημείο αυτό είναι ιδιαίτερα λεπτό καθώς το χρονικό βήμα θα πρέπει να είναι κατάλληλα ορισμένο, έτσι ώστε η αλληλεπίδραση ανάμεσα στις γειτονικές λύσεις του προβλήματος να μην είναι δυνατή. Το κατάλληλο χρονικό βήμα προσδιορίζεται με τη βοήθεια της συνθήκης CFL.



Σχήμα 2.2: Στο πρώτο σχήμα παριστάνονται οι καταστάσεις του αρχικού προβλήματος του Riemann στο εσωτερικό κάθε κυψελίδας στην αρχή του κάθε χρονικού βήματος.

Στο δεύτερο σχήμα παριστάνονται οι καταστάσεις που προκύπτουν μετά την ολοκλήρωση του χρονικού βήματος με την προσεγγιστική μέθοδο του HLLE. Η ενδιάμεση κατάσταση U^{tr} δίνεται από τη σχέση

$$U^{lr} = \frac{b_r U^r - b_l U^l - F(U^r) + F(U^l)}{b_r - b_l}$$
(2.48)

Η αριθμητική ροή δίνεται από τη σχέση

$$G_{i+\frac{1}{2}}(U^{l},U^{r}) = \frac{b_{r}^{+}F(U^{l}) - b_{l}^{-}F(U^{r}) + b_{r}^{+}b_{l}^{-}(U^{r} - U^{l})}{b_{r}^{+} - b_{l}^{-}}$$
(2.49)

Ένα απαραίτητο συστατικό για την εύρυθμη λειτουργία της μεθόδου είναι η εύρεση των κατάλληλων τιμών για τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές των ταχυτήτων. Τα όρια των b¹ και b^r, δίνονται από τις σχέσεις

$$b_r = \frac{\overline{v} + \overline{c}_s}{1 + \overline{v}\overline{c}_s} \qquad \text{kat} \qquad b_l = \frac{\overline{v} - \overline{c}_s}{1 - \overline{v}\overline{c}_s} \tag{2.50}, (2.51)$$

$$c_s^2 = \frac{\Gamma(\Gamma-1)(e-\rho)}{\rho + \Gamma(e-\rho)}$$
(2.52)

ενώ οι ποσότητες \overline{v} και \overline{c}_s ορίζονται από τις σχέσεις

$$\overline{v} = \frac{v^l + v^r}{2}$$
 Kai $\overline{c}_s = \frac{c_s^{\ l} + c_r^{\ r}}{2}$ (2.53), (2.54)

Ουσιαστικά στις σχέσεις (2.50) και (2.51) εφαρμόζεται ο σχετικιστικός νόμος άθροισης των ταχυτήτων, ενώ στις (2.53) και (2.54) χρησιμοποιείται ο αριθμητικός μέσος όρος. Για αδύναμα κρουστικά κύματα οι όροι b_r^+ και b_r^- είναι

$$b_r^+ = \begin{cases} b_r & \operatorname{eav} b_r > 0\\ 0 & \operatorname{eav} b_r < 0 \end{cases}$$
(2.55)

και

$$b_l^{-} = \begin{cases} b_l & \epsilon \alpha v \, b_l < 0\\ 0 & \epsilon \alpha v \, b_l > 0 \end{cases}$$
(2.56)

Για ισχυρά κρουστικά κύματα είναι

$$b_r^+ = \max\left(0, b_r, \frac{v^r + c_s^r}{1 + v^r c_s^r}\right)$$
(2.57)

και

$$b_{l}^{-} = \min\left(0, b_{l}, \frac{v^{l} - c_{s}^{l}}{1 - v^{l} c_{s}^{l}}\right)$$
(2.58)

Το κυριότερο θετικό στοιχείο της μεθόδου HLLE, είναι ότι πρόκειται για μία θετικώς διατηρήσιμη μέθοδο (positively conservative scheme), το οποίο σημαίνει ότι η εσωτερική ενέργεια και η πυκνότητα διατηρούνται θετικές κατά τη διάρκεια των υπολογιστικών υπολογισμών. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική σε περιοχές όπου υπάρχουν ροές υψηλής ενέργειας και χαμηλής πυκνότητας.

2.3.1 Εφαρμογές του σχετικιστικού HLLE

A. Mɛ minmod

Οι κύριες διαφορές ανάμεσα στο σχετικιστικό και στο μη σχετικιστικό πρόβλημα του Riemann, οφείλονται στη μη γραμμική άθροιση των ταχυτήτων και στην εμφάνιση του παράγοντα του Lorentz. Η σχετικιστική πλέον άθροιση των ταχυτήτων προκαλεί την καμπύλωση της ταχύτητας στο ανάλογο διάγραμμα, στην περιοχή του κύματος αραίωσης (περιοχή 2, σχήμα 2.1). Η παρουσία του παράγοντα Lorentz ελαττώνει το μήκος που καταλαμβάνει η περιοχή 4 (σχήμα 2.1).

Θεωρούμε ένα μονοδιάστατο πλέγμα, το οποίο έχει μήκος 100 μονάδων. Η πρώτη δοκιμασία για το σχετικιστικό HLLE είναι το εξής πρόβλημα των αρχικών τιμών του Riemann

$$p(x,0) = \begin{cases} 1 & x \le 50\\ 0.1 & x > 50 \end{cases}, \ \rho(x,0) = \begin{cases} 1 & x \le 50\\ 0.125 & x > 50 \end{cases} \quad \text{kat } v = 0 \tag{2.59}$$

Αριθμητικά η ταχύτητα είναι v=10⁻⁹. Στην καταστατική εξίσωση (2.20), θέτουμε Γ=1.4. Οι παραπάνω αρχικές συνθήκες είναι παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στο μη σχετικιστικό πρόγραμμα για το HLLE. Αποτελούν μία χαρακτηριστική περίπτωση αρχικών συνθηκών και για το λόγο αυτό ονομάζονται πρόβλημα των αρχικών τιμών του

Sod. Το χρονικό βήμα είναι ίσο προς $dt = \frac{dx}{3}$. Τα αποτελέσματα του προγράμματος για το

σχετικιστικό HLLE παρουσιάζονται στο σχήμα 1.3 και μπορούν να θεωρηθούν αρκετά ικανοποιητικά, αφού αποδίδουν με επιτυχία την απόλυτη τιμή των διάφορων σταθερών περιοχών, χωρίς μάλιστα την εμφάνιση αριθμητικών διαταραχών. Η κύρια αδυναμία της μεθόδου έγκειται στο ότι δεν καταφέρνει να αποδώσει με ακρίβεια τις ασυνέχειες, όπως το μέτωπο του κρουστικού κύματος. Το πρόγραμμα αυτό χρησιμοποιεί τον περιορισμό κλίσης minmod και επιπλέον έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο, καθώς οι ποσότητες αρχικά υπολογίζονται σε μισό χρονικό βήμα και στη συνέχεια για ένα ολόκληρο χρονικό βήμα.



Σχήμα 1.3: Το πρόβλημα του σωλήνα κρουστικών κυμάτων για 286 χρονικά βήματα, σε μονοδιάστατο πλέγμα 100 σημείων με dt= $\frac{dx}{3}$. Παρατίθενται τα διαγράμματα της ταχύτητας (a.), της πίεσης (b.) και της πυκνότητας (c.), όλα υπολογισμένα με τη βοήθεια αλγορίθμου για το σχετικιστικό HLLE με minmod, με ακρίβεια 2^{ης} τάξης ως προς το χρόνο.

Η δεύτερη δοκιμασία για τη μέθοδο HLLE είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών του Riemann, που αφορά τη θέρμανση ενός ψυχρού ρευστού. Οι αρχικές συνθήκες είναι σ' αυτή την περίπτωση

$$p(x,0) = \begin{cases} 13 + \frac{1}{3} & x \le 50\\ 0 & x > 50 \end{cases}, \quad \rho(x,0) = \begin{cases} 10 & x \le 50\\ 1 & x > 50 \end{cases} \quad \text{kat} \quad v = 0 \tag{2.60}$$

Αριθμητικά η ταχύτητα είναι $v=10^{-9}$ και η πίεση για x>100 είναι $p=\frac{2}{3}10^{-6}$.

Στην καταστατική εξίσωση (2.20), θέτουμε $\Gamma = \frac{5}{3}$, ενώ επιλέγουμε $dt = \frac{dx}{5}$.

Τα αποτελέσματα του προγράμματος με τη μέθοδο του σχετικιστικού HLLE παρουσιάζονται στο σχήμα 4.4. Η ταχύτητα του ρευστού στην περίπτωση αυτή υπερβαίνει το 0.7 και επομένως τα σχετικιστικά φαινόμενα είναι πιο έντονα από ότι στις προηγούμενες περιπτώσεις. Η μεγάλη διαφορά στις δύο αρχικές τιμές της πίεσης είναι μία δύσκολη δοκιμασία για κάθε μέθοδο. Είναι φυσικό λοιπόν το σχετικιστικό HLLE να εμφανίζει αποκλίσεις από την ακριβή λύση. Οι αποκλίσεις αυτές όμως είναι περιορισμένες και περιορίζονται στην εμφάνιση ορισμένων διαταραχών. Το κυριότερο σφάλμα εντοπίζεται στο διάγραμμα της πυκνότητας, όπου το ύψος του μετώπου του κρουστικού κύματος είναι χαμηλότερο από αυτό της ακριβούς λύσης, ενώ δεν αποδίδεται η σταθερή περιοχή ανάμεσα στο κρουστικό κύμα και στην ασυνέχεια επαφής. Η σχετικιστική μέθοδος του HLLE εμφανίζει την τιμή της πυκνότητας κατά 10% μικρότερη από αυτή της αναλυτικής λύσης.



Σχήμα 2.3: Αναλυτική λύση του προβλήματος των αρχικών τιμών και διάδοση των κρουστικών κυμάτων στο εσωτερικό του σωλήνα κρουστικών κυμάτων.



Σχήμα 2.4: Το πρόβλημα του σωλήνα κρουστικών κυμάτων για 358 χρονικά βήματα, σε μονοδιάστατο πλέγμα 100 σημείων με $dt = \frac{dx}{5}$. Παρατίθενται τα διαγράμματα της ταχύτητας (a.), της πίεσης (b.) και της πυκνότητας (c.), όλα υπολογισμένα με τη βοήθεια αλγορίθμου για το σχετικιστικό HLLE με minmod, με ακρίβεια 2^{ης} τάξης ως προς το χρόνο.

Η επόμενη δοκιμασία για τη μέθοδο του HLLE αφορά ένα πρόβλημα των αρχικών τιμών του Riemann, όπου πλέον χρησιμοποιείται η καταστατική εξίσωση (2.21) με Γ=1.99. Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$p(x,0) = \begin{cases} 1990 & x \le 50\\ 995 & x > 50 \end{cases}, \quad \rho(x,0) = \begin{cases} 2 & x \le 50\\ 1 & x > 50 \end{cases} \quad \text{kat} \quad v = 0 \tag{2.61}$$

Το χρονικό βήμα επιλέγεται ίσο προς $dt = \frac{dx}{3}$, ενώ είναι Γ=1.99.

Στην περίπτωση αυτή οι τιμές της πίεσης είναι κατά πολύ μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες της πυκνότητας. Είναι λοιπόν ορθή η προσέγγιση ότι $e \ge \rho$, οπότε από την καταστατική εξίσωση, που δίνεται από τη σχέση (2.20), είναι δυνατή η απαλοιφή της πυκνότητας και προκύπτει τελικά η σχέση (2.21). Στην περίπτωση αυτή η μέθοδος του HLLE λειτουργεί σχεδόν υποδειγματικά, καθώς υπάρχει ικανοποιητική αντιστοιχία ανάμεσα στην αναλυτική λύση και στα αποτελέσματα του προγράμματος.



Σχήμα 2.5: Αναλυτική λύση του προβλήματος του σωλήνα κρουστικών κυμάτων για τις αρχικές συνθήκες 2.61.



Σχήμα 2.6: Το πρόβλημα του σωλήνα κρουστικών κυμάτων για 100 χρονικά βήματα, σε μονοδιάστατο πλέγμα 100 σημείων με dt= $\frac{dx}{3}$. Παρατίθενται τα διαγράμματα της ταχύτητας (a.), της πίεσης (b.) και της πυκνότητας (c.), όλα υπολογισμένα με τη βοήθεια αλγορίθμου για το σχετικιστικό HLLE με minmod, με ακρίβεια 2^ης τάξης ως προς το χρόνο.

Β. Με ΜC

Τα προηγούμενα διαγράμματα κατασκευάστηκαν με τη βοήθεια του σχετικιστικού HLLE και με τη χρήση του περιορισμού κλίσης minmod. Εάν στη θέση του minmod χρησιμοποιηθεί το MC, τότε για τις αρχικές συνθήκες (2.59), προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα



Σχήμα 2.7: Το πρόβλημα του σωλήνα κρουστικών κυμάτων για 286 χρονικά βήματα, σε μονοδιάστατο πλέγμα 100 σημείων με dt= $\frac{dx}{3}$. Παρατίθενται τα διαγράμματα της ταχύτητας (a.), της πίεσης (b.) και της πυκνότητας (c.), όλα υπολογισμένα με τη βοήθεια αλγορίθμου για το σχετικιστικό HLLE με περιορισμό κλίσης MC, με ακρίβεια 2^ηs τάξης ως προς το χρόνο.

Για τις αρχικές συνθήκες (2.60) προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα



Σχήμα 4.9:Η διάδοση κρουστικών κυμάτων για 358 χρονικά βήματα, σε μονοδιάστατο πλέγμα 100 σημείων με dt= $\frac{dx}{5}$. Παρατίθενται τα διαγράμματα της ταχύτητας (a.), της πίεσης (b.) και της πυκνότητας (c.), όλα υπολογισμένα με τη βοήθεια αλγορίθμου για το σχετικιστικό HLLE με MC, με ακρίβεια 2^{ης} τάξης ως προς το χρόνο.

Για τις αρχικές συνθήκες (2.61) προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα. Παρατηρούμε ότι με τη χρήση του περιορισμού κλίσης mc αποδίδονται με μεγαλύτερη ακρίβεια οι ασυνέχειες. Βέβαια στο διάγραμμα της πυκνότητας (c.) εμφανίζονται κάποιες διαταραχές στα σημεία εκείνα ακριβώς.



Σχήμα 4.10: Για 100 χρονικά βήματα, σε μονοδιάστατο πλέγμα 100 σημείων με $dt = \frac{dx}{3}$.παρατίθενται τα διαγράμματα της ταχύτητας (a.), της πίεσης (b.) και της πυκνότητας (c.), όλα υπολογισμένα με τη βοήθεια αλγορίθμου για το σχετικιστικό HLLE με MC, με ακρίβεια 2^{ης} τάξης ως προς το χρόνο.

2.3.2 Σύγκριση σχετικιστικού HLLE με minmod και MC

Η σύγκριση ανάμεσα στα αποτελέσματα των δύο περιορισμών κλίσης είναι για το πρόβλημα του Riemann με αρχικές συνθήκες τις (2.60).



Διαγράμματα ταχύτητας

Στο διπλανό σχήμα συγκρίνονται τα διαγράμματα της ταχύτητας ,όπως προέκυψαν με τον αλγόριθμο του HLLE και περιορισμούς κλίσης minmod (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) και με mc (κόκκινη συνεχής γραμμή). Οι διαφορές ανάμεσα στα δύο σχήματα είναι μικρές, καθώς καταφέρνουν να αποδώσουν εξίσου το πλατό. Η χρήση όμως του περιορισμού mc επιτρέπει την πιστότερη απόδοση του κρουστικού κύματος.

Σχήμα 4.11: Σύγκριση διαγραμμάτων ταχύτητας.



Σχήμα 4.12: Σύγκριση διαγραμμάτων πίεσης.

Διαγράμματα πίεσης

Στο διπλανό σχήμα συγκρίνονται τα διαγράμματα της πίεσης, όπως προέκυψαν από την εφαρμογή του σχετικιστικού HLLE, με τη χρήση του περιορισμού minmod (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) και του mc (κόκκινη συνεχής γραμμή). Η κυριότερη διαφορά ανάμεσα στις δύο μεθόδους εντοπίζεται στην αρχή του κύματος αραίωσης, την οποία το mc προσεγγίζει καλύτερα.



Σχήμα 4.11: Σύγκριση διαγραμμάτων πυκνότητας.



Στα διαγράμματα της πυκνότητας οι διαφορές είναι πιο εμφανείς από ότι στις προηγούμενες συγκρίσεις. Η χρήση του περιορισμού κλίσης mc επιτρέπει την καλύτερη προσέγγιση της περιοχής ανάμεσα στην ασυνέχεια επαφής και το κρουστικό κύμα. Βέβαια και το mc δεν καταφέρνει να αποδώσει απόλυτα το σχήμα της περιοχής αυτής, σε γενικές γραμμές όμως λειτουργεί καλύτερα. Κεφάλαιο 3

Αστροφυσικοί πίδακες

Ένα από τα πλέον ενδιαφέροντα φαινόμενα στην αστροφυσική είναι η ύπαρξη των πιδάκων (ευρύτερα γνωστών ως jets) στις εξωγαλαξιακές ραδιοπηγές και οι οποίοι συνδέονται με ενεργούς γαλαξιακούς πυρήνες. Στο πλέον διαδεδομένο μοντέλο για την ερμηνεία τους, απαιτείται η αποδοχή της ύπαρξης ροών ταχυτήτων στο εσωτερικό τους, που προσεγγίζουν το 99% της ταχύτητας του φωτός (σε μερικές περιπτώσεις ξεπερνούν και αυτό το ποσοστό), ώστε να ερμηνευτούν οι κινήσεις που παρατηρούνται σε αρκετά από αυτά τα φαινόμενα. Τα μοντέλα που έχουν προταθεί για να εξηγήσουν το σχηματισμό των σχετικιστικών πιδάκων, κάνουν λόγο για το φαινόμενο της προσαύξησης της μάζας ενός συμπαγούς κεντρικού αντικειμένου, όπως ένας αστέρας νετρονίων, μία μαύρη τρύπα ή μία συμπαγή περιστρεφόμενη μελανή οπή πολύ μεγάλης μάζας στο κέντρο ενός ενεργού γαλαξιακού πυρήνα, στην οποία προσπίπτει μεσοαστρικό αέριο και αέριο το οποίο προέρχεται από παλιρροιακά διαταρασσόμενα άστρα.



Σχήμα 3.1: Παρατηρήσεις πιδάκων στο ραδιογαλαξία 3C31 NGC383.

Οι πολύ μεγάλες ταχύτητες (προσεγγίζουν αυτή του φωτός), που παρατηρούνται στο εσωτερικό των πιδάκων, αφήνουν να εννοηθεί πως σχηματίζονται σε μικρή απόσταση από τον ορίζοντα γεγονότων μίας μαύρης τρύπας. Επιπλέον οι παρατηρήσεις σε ραδιοφωνικά κύματα αποκαλύπτουν ότι πρόκειται για σχηματισμούς ήδη μορφοποιημένους ακόμα και σε κλίμακες μικρότερες του ενός parsec. Πρόσφατα

θεωρητικά μοντέλα υποθέτουν ότι οι δίσκοι προσαύξησης είναι η πηγή των διπολικών ροών, οι οποίες επιταχύνονται επιπλέον μέσω μαγνητοϋδροδυναμικών διαδικασιών. Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός παραμέτρων, οι οποίοι είναι ίσως σημαντικοί για το σχηματισμό των πιδάκων. Πρόκειται για τη μάζα των μελανών οπών, τη στροφορμή τους, το ρυθμό αύξησης της μάζας τους, τον τύπο του δίσκου προσαύξησης, τις ιδιότητες του μαγνητικού πεδίου και του περιβάλλοντος.

Σε κλίμακες των parsec οι πίδακες, καθώς παρατηρούνται μέσω της σύγχροτρον και αντιστρόφου Compton ακτινοβολίας τους στις ραδιοφωνικές συχνότητες, εμφανίζουν μία σταθερή δομή με ένα φωτεινό σημείο (τον πυρήνα) στο ένα άκρο του πίδακα και μία σειρά από διαφορετικά τμήματα, τα οποία απομακρύνονται με πολύ μεγάλες ταχύτητες από τον πυρήνα. Τα κινούμενα τμήματα σε σχετικιστικούς πίδακες, των οποίων συνήθως προηγούνται εκρήξεις ακτινοβολίας στα ραδιοκύματα, είναι δυνατό να ερμηνευτούν με τη βοήθεια της θεωρίας των κρουστικών κυμάτων.

Η μορφολογία και η δυναμική των πιδάκων σε κλίμακες των χιλιάδων parsec κυριαρχούνται από την αλληλεπίδραση των σχηματισμών αυτών με την περιβάλλουσα εξωγαλαξιακή ύλη. Η δύναμη των πιδάκων είναι υπεύθυνη για διχοτομικές μορφολογίες (τις επονομαζόμενες τάξεις Fanaroff-Riley I και II, FR I και FR II αντίστοιχα). Πρόσφατα μοντέλα ερμηνεύουν τις μορφολογίες τύπου FR I σαν αποτέλεσμα της επιβράδυνσης από σχετικιστικές σε μη σχετικιστικές ταχύτητες σε κλίμακες των kiloparsec, εξαιτίας ενός αργότερου στρώματος. Για τους πιο ισχυρούς ραδιογαλαξίες (FR II) και τα κβάζαρς, η παρατήρηση ασυμμετριών στη ροή τους υποδεικνύει πως οι σχετικιστικές ταχύτητες εκτείνονται για kiloparsec.

Αν και η μαγνητοϋδροδυναμική και η γενική θεωρία της σχετικότητας φαντάζουν ως τα πλέον κατάλληλα εργαλεία για τη μελέτη του φαινομένου των πιδάκων, από την άποψη της ρευστοδυναμικής, οι προσομοιώσεις με τη βοήθεια της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας είναι ικανοποιητικές για τη μελέτη της μορφολογίας και της δυναμικής των σχετικιστικών πιδάκων σε αποστάσεις αρκετά μακριά από το κεντρικό συμπαγές αντικείμενο (σε κλίμακες parsec και ακόμα μακρύτερα). Η ανάπτυξη των ανάλογων υπολογιστικών προγραμμάτων έχει προωθήσει σημαντικά τις αριθμητικές προσομοιώσεις των σχετικιστικών πιδάκων σε κλίμακες των parsec και κίμακες των parsec.

Σε κλίμακες των kiloparsec οι επιπτώσεις των σχετικιστικών ροών και της εσωτερικής ενέργειας στη μορφολογία και τη δυναμική των πιδάκων, έχουν αποτελέσει το αντικείμενο έντονων συζητήσεων τα τελευταία χρόνια. Ακτινοβολίες με μεγάλη εσωτερική ενέργεια επιτρέπουν στο τελικό κρουστικό κύμα (το θερμό σημείο στους ραδιοχάρτες) να παραμένει καλά καθορισμένο κατά τη διάρκεια της εξέλιξής του.

Στο σχήμα 3.2 εμφανίζονται ορισμένα στιγμιότυπα της χρονικής εξέλιξης ενός πίδακα με μεγάλη εσωτερική ενέργεια. Η εξάρτηση της εσωτερικής δομής του πίδακα από την ταχύτητα της ροής αφήνει υπόνοιες για το ότι τα σχετικιστικά φαινόμενα ίσως σχετίζονται με την κατανόηση των διαφορών ανάμεσα στους πιο αργούς BL LAC πίδακες και στους ταχύτερους πίδακες των κβάζαρς.

Υπερηχητικά μοντέλα ,στα οποία τα σχετικιστικά φαινόμενα κυριαρχούν εξαιτίας των μεγάλων παραγόντων του Lorentz, εμφανίζουν εκτεταμένα περιβλήματα με πολύ υψηλή πίεση. Αυτά τα περιβλήματα μπορούν να βοηθήσουν στον περιορισμό των πιδάκων κατά τα αρχικά στάδια της εξέλιξής τους καθώς και να προκαλέσουν ακόμα και την απόκλισή τους από την κατεύθυνσή τους, όταν κινούνται σε μη ομογενή περιβάλλοντα. Η ισχυρή πίεση που ασκεί το περίβλημα προκαλεί το σχηματισμό μίας σειράς κρουστικών κυμάτων στο εσωτερικό του πίδακα, οπότε η ακτινοβολία σύγχροτρον ενισχύεται.



Σχήμα 3.2: Χρονική εξέλιξη ενός σχετικιστικού πίδακα (η ταχύτητά του προσεγγίζει το 99% της ταχύτητας του φωτός), με μεγάλη εσωτερική ενέργεια. Ο λογάριθμος της πυκνότητας μάζας έχει σχεδιαστεί στην κλίμακα του γκρι, με το λευκό να αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή και το μαύρο στην ελάχιστη.

Σε προσομοιώσεις, όπως αυτή του σχήματος 3.3, η εξέλιξη του αστροφυσικού πίδακα κυριαρχείται από μία φάση επιβράδυνσης κατά την οποία μεγάλοι λοβοί από μαγνητικό υλικό αρχίζουν να εκρήγνυνται γύρω από την κεφαλή του. Αυτές οι προσομοιώσεις αναπαριστούν ορισμένες ιδιότητες που παρατηρούνται στους ισχυρούς εξωγαλαξιακούς πίδακες (έκρηξη των λοβών, επιβράδυνση της ροής κατά μήκος του πίδακα) και μπορούν να βοηθήσουν στη συγκράτηση των τιμών βασικών παραμέτρων (όπως η πυκνότητα των σωματιδίων).



Σχήμα 3.3: Λογάριθμος της πυκνότητας μάζας και της πυκνότητας ενέργειας ενός εξελισσόμενου πίδακα, ο οποίος διασχίζει το μεσογαλαξιακό μέσο. Το λευκό χρώμα παριστά το υλικό του πίδακα που είναι υπεύθυνο για την εκπομπή ακτινοβολίας σύγχροτρον.

Η ανάπτυξη υπολογιστικών προγραμμάτων σε τρεις διαστάσεις έχει επιτρέψει, για πρώτη φορά την προσομοίωση των πιδάκων σε κλίμακες των parsec καθώς και των τμημάτων τους. Η παρουσία ροών που κινούνται με την ταχύτητα του φωτός ενισχύει τη σημασία των σχετικιστικών φαινομένων. Επομένως είναι επιβεβλημένη η χρήση μοντέλων που συνδυάζουν τη ρευστοδυναμική με την εκπομπή ακτινοβολίας σύγχροτρον. Σε αυτά τα μοντέλα τα κινούμενα τμήματά τους προκύπτουν ως διαταραχές στο εσωτερικό των σταθερών σχετικιστικών πιδάκων. Στα σημεία όπου υπάρχουν μεγάλες διαφορές στο εσωτερικό του πίδακα και στην περιβάλλουσα ατμόσφαιρα, παράγονται κρουστικά κύματα. Η αύξηση της πυκνότητας της ενέργειας, όπως προκαλείται από αυτά τα κρουστικά κύματω, προκαλεί με τη σειρά της την αύξηση της εκπομπής ραδιοφωνικών κυμάτων.



Σχήμα 3.4: Ραδιοφωνικός χάρτης ενός σχετικιστικού πίδακα, ο οποίος παρουσιάζει την εξέλιξη ενός τμήματος στο εσωτερικό του (από τα αριστερά προς τα δεξιά). Τα σχήματα είναι αποτέλεσμα υπολογιστικής προσομοίωσης.

Σε ότι αφορά την εξέλιξη των προσομοιώσεων ήδη έχουν δημιουργηθεί οι πρώτοι μαγνητοϋδροδυναμικοί κώδικες τόσο στις δύο όσο και στις τρεις διαστάσεις, για να μελετήσουν τις συνέπειες των μαγνητικών πεδίων στη μορφολογία και στις υπόλοιπες ιδιότητες των σχετικιστικών πιδάκων. Ωστόσο παρά τον αντίκτυπο ανάλογων προσπαθειών στην κατανόηση των σχετικιστικών πιδάκων, οι τρισδιάστατοι κώδικες δεν έχουν ακόμα μελετήσει τα αποτελέσματα στην ίδια τη δομή αυτών των σχηματισμών και στη δυναμική τους.

Παραρτήματα

Στη συνέχεια ακολουθούν τέσσερα παραρτήματα, σε καθένα από τα οποία παρουσιάζεται ένα διαφορετικό πρόγραμμα. Πρόκειται για χαρακτηριστικά προγράμματα, τα οποία γράφτηκαν κατά τη διάρκεια της εργασίας και των οποίων τα αποτελέσματα έχουν ήδη παρατεθεί.

Συγκεκριμένα παρουσιάζονται τα προγράμματα που αφορούν

- Την αριθμητική μέθοδο των Lax–Wendroff.
- Την αριθμητική μέθοδο HLLE με απλή αναδόμηση στη νευτώνεια ρευστοδυναμική.
- Την αριθμητική μέθοδο HLLE με περιορισμό κλίσης MC στη νευτώνεια ρευστοδυναμική.
- Την αριθμητική μέθοδο HLLE με περιορισμό κλίσης MC στη σχετικιστική ρευστοδυναμική.
Παράρτημα Α

Το πρόγραμμα που ακολουθεί αφορά τη μελέτη της εξέλιξης ενός ρευστού στο εσωτερικό ενός σωλήνα κρουστικών κυμάτων με τη βοήθεια της μεθόδου του Lax– Wendroff. Το πρόγραμμα έχει γραφτεί στη γλώσσα C.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define S 2000
#define N 1000
                 /*grid points*/
#define T 300
                 /*time steps*/
void main (void)
{
   int i,j;
    double den0[S],vel0[S],pres0[S],m0[S],en0[S];
    double den1[S],vel1[S],pres1[S],m1[S],en1[S];
    double den2[S],vel2[S],pres2[S],m2[S],en2[S];
    double f1[S],f2[S],f3[S];
    double f10[S],f20[S],f30[S];
    double x[S];
    double gamma,xmax,xmin,dx,dt;
    FILE *myfile;
    myfile =fopen("Shock_3.dat","w");
           DEFINITION OF CONSTANTS
            xmax=10.;
    xmin=0.;
    dx=(xmax-xmin)/(N-1);
    dt=0.004;
    gamma=1.4;
    INITIAL CONDITIONS
    for(i=0;i<=N;i++)
         ł
              if(i \le N/2)
              ł
                         den0[i]=1.0;
                         vel0[i]=0.0;
                         pres0[i]=1.0;
                         m0[i]=den0[i]*vel0[i];
              en0[i]=pres0[i]/(gamma1)+(1./2.)*den0[i]*pow(vel0[i],2);
                         f1[i]=den0[i]*vel0[i];
                         f2[i]=den0[i]*pow(vel0[i],2)+pres0[i];
                         f3[i]=vel0[i]*(en0[i]+pres0[i]);
                   }
```

```
if(i>N/2)
                    ł
                          den0[i]=0.125;
                          pres0[i]=0.1;
                          vel0[i]=0.0;
                          m0[i]=den0[i]*vel0[i];
             en0[i]=pres0[i]/(gamma1)+(1./2.)*den0[i]*pow(vel0[i],2);
                          f1[i]=den0[i]*vel0[i];
                  f2[i]=den0[i]*pow(vel0[i],2)+pres0[i];
      f3[i]=vel0[i]*(en0[i]+pres0[i]);
                      LAX-WENDROFF METHOD
for(j=1;j<=T;j++)
             /***** Half time step *****/
             for(i=0;i<N;i++)
   den1[i]=(1./2.)*(den0[i+1]+den0[i])-(dt/(2*dx))*(f1[i+1]-f1[i]);
   m1[i]=(1./2.)*(m0[i+1]+m0[i])-(dt/(2*dx))*(f2[i+1]-f2[i]);
      en1[i]=(1./2.)*(en0[i+1]+en0[i])-(dt/(2*dx))*(f3[i+1]-f3[i]);
      vel1[i]=m1[i]/den1[i];
   pres1[i]=(gamma-1)*(en1[i]-(1./2.)*den1[i]*pow(vel1[i],2));
                          f10[i]=den1[i]*vel1[i];
                          f20[i]=den1[i]*pow(vel1[i],2)+pres1[i];
                          f30[i]=vel1[i]*(en1[i]+pres1[i]);
                     }
        /***** Conservative variables at full time step *****/
             for(i=1;i<=N-1;i++)
                    ł
                          den2[i]=den0[i]-(dt/dx)*(f10[i]-f10[i-1]);
                          m2[i]=m0[i]-(dt/dx)*(f20[i]-f20[i-1]);
                          en2[i]=en0[i]-(dt/dx)*(f30[i]-f30[i-1]);
                        vel2[i]=m2[i]/den2[i];
      pres2[i]=(gamma-1)*(en2[i]-(1./2.)*den2[i]*pow(vel2[i],2));
                    }
             if(j==T)
                          x[0]=xmin;
               for(i=1;i<=N-1;i++)
                                    x[i]=x[i-1]+dx;
      fprintf(myfile, "\%lf\t\%lf\t\%lf\t\%lf\t\%lf\n", x[i], den 2[i], vel 2[i]
                                ,pres2[i],en2[i]);
                    }
```

```
 \begin{array}{l} for(i=1;i<=N-1;i++) \\ \{ & den0[i]=den2[i]; \\ vel0[i]=vel2[i]; \\ pres0[i]=pres2[i]; \\ m0[i]=m2[i]; \\ en0[i]=en2[i]; \\ f1[i]=den0[i]*vel0[i]; \\ f2[i]=den0[i]*pow(vel0[i],2)+pres0[i]; \\ f3[i]=vel0[i]*(en0[i]+pres0[i]); \\ \} \end{array}
```

}
fclose(myfile);

}

Παράρτημα Β

Το πρόγραμμα που παρατίθεται αφορά την εφαρμογή της μεθόδου του HLLE έχοντας επιλέξει απλή αναδόμηση.

```
/*** THE SHOCK TUBE PROBLEM ***/
/****
       GODUNOV
                   *****/
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define M 1020
#define N 1000
               /*number of points*/
#define T 300
              /*number of time steps*/
void main (void)
{
     int i,j;
     double x[M],x1[M];
     double den[M],pres[M],vel[M],m[M],en[M];
     double den_aver[M],pres_aver[M],vel_aver[M],m_aver[M],en_aver[M];
     double den1_aver[M],pres1_aver[M],vel1_aver[M],m1_aver[M],en1_aver[M];
     double f1[M],f2[M],f3[M];
     double f10[M],f20[M],f30[M];
     double F_den[M],F_m[M],F_en[M];
     double cs[M],b_r[M],b_l[M];
     double b1_l[M], b1_r[M];
     double gamma,dx,dt,xmax,xmin,x1min;
     FILE *myfile;
     myfile=fopen("HLLE_final.dat","w");
     Definition of constants
     gamma=1.4;
     xmax=10.;
     xmin=0.;
     dx=(xmax-xmin)/(N-1);
     dt=0.004;
     x1min=dx/2.;
     1D grid cells
     x[0]=0.;
     x1[0]=dx/2.;
     /****** Grid cells (i,i+1) ******/
     for(i=1;i<=N+1;i++)
          ł
```

```
x[i]=xmin+dx;
               xmin=x[i];
          }
   /****** Grid cells (i-1/2,i+1/2) ******/
     for(i=1;i<=N+1;i++)
               x1[i]=x1min+dx;
               x1min=x1[i];
     Initial conditions
     for(i=0;i<=N-1;i++)
          ł
               if(i<=N/2)
                          den[i]=1.;
                          pres[i]=1.;
                          vel[i]=0.;
                          m[i]=den[i]*vel[i];
                en[i]=den[i]*pow(vel[i],2)/2.+pres[i]/(gamma-1.);
                     }
                else
                     {
                          den[i]=0.125;
                          pres[i]=0.1;
                          vel[i]=0.;
                          m[i]=den[i]*vel[i];
                en[i]=(den[i]*pow(vel[i],2))/2.+pres[i]/(gamma-1.);
                     }
          2
    Average
  for(i=0;i<=N;i++)
          ł
                den_aver[i]=den[i]*(x1[i]-x1[i-1])/dx;
                m_aver[i]=m[i]*(x1[i]-x1[i-1])/dx;
                en_aver[i]=en[i]*(x1[i]-x1[i-1])/dx;
                vel_aver[i]=m_aver[i]/den_aver[i];
pres_aver[i]=(gamma-1.)*(en_aver[i]-(den_aver[i]*pow(vel_aver[i],2))/2.);
          }
```

```
GODUNOV and HLLE method
for(j=1;j<=T;j++)
         {
                den_aver[0]=den_aver[1];
                vel_aver[0]=vel_aver[1];
               pres_aver[0]=pres_aver[1];
                en_aver[0]=en_aver[1];
                m_aver[0]=m_aver[1];
        den_aver[N]=den_aver[N-1];
                vel_aver[N]=vel_aver[N-1];
                pres_aver[N]=pres_aver[N-1];
                en_aver[N]=en_aver[N-1];
                m_aver[N]=m_aver[N-1];
    3
    /************* Fluxes *****************/
            for(i=1;i<=N-1;i++)
                 f1[i]=den_aver[i]*vel_aver[i];
                f2[i]=den_aver[i]*pow(vel_aver[i],2)+pres_aver[i];
                f3[i]=(en_aver[i]+pres_aver[i])*vel_aver[i];
                      }
                for(i=1;i<=N-1;i++)
                            f10[i]=den_aver[i+1]*vel_aver[i+1];
   f20[i]=den_aver[i+1]*pow(vel_aver[i+1],2)+pres_aver[i+1];
         f30[i]=(en_aver[i+1]+pres_aver[i+1])*vel_aver[i+1];
 /******* Sound speed *********/
               for(i=1;i<=N;i++)
                      ł
                      cs[i]=sqrt((gamma*pres_aver[i])/den_aver[i]);
                      }
   /*********************************/
               for(i=1;i<=N-1;i++)
                      {
                            b_r[i]=vel_aver[i+1]+cs[i+1];
                            b_l[i]=vel_aver[i]-cs[i];
                            if(b_1[i]>0)
                                  {
                                        b1_1[i]=0;
                                  }
```



}

80

Παράρτημα Γ

Το πρόγραμμα που παρατίθεται στο παράρτημα αυτό βασίζεται στη χρήση της μεθόδου HLLE με την παρουσία του περιορισμού κλίσης MC. Το πρόβλημα που μελετάται είναι η εξέλιξη ενός ρευστού και ο σχηματισμός κρουστικών κυμάτων στο εσωτερικό ενός μονοδιάστατου σωλήνα.

```
/*** THE SHOCK TUBE PROBLEM ***/
/****
         MC LIMITER
                      ***** /
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define M 1020
#define N 1000
                    /*number of points*/
#define T 300
                   /*number of time steps*/
double sgn(double a);
double min(double b,double c,double d);
void main (void)
{
     int i,j;
     double x[M],x1[M];
     double den[M],pres[M],vel[M],m[M],en[M];
     double den_aver[M],pres_aver[M],vel_aver[M],m_aver[M],en_aver[M];
     double den1_aver[M],pres1_aver[M],vel1_aver[M],m1_aver[M],en1_aver[M];
     double f1[M],f2[M],f3[M];
     double f10[M],f20[M],f30[M];
     double F_den[M],F_m[M],F_en[M];
     double cs[M],b_r[M],b_l[M];
     double b1_l[M], b1_r[M];
     double den_r[M],vel_r[M],pres_r[M],en_r[M],m_r[M];
   double den_l[M],vel_l[M],pres_l[M],en_l[M],m_l[M];
     double cs_r[M],cs_l[M];
     double s_den[M],s_m[M],s_en[M];
     double s1_den[M],s1_m[M],s1_en[M];
     double den_limiter[M],en_limiter[M],m_limiter[M];
     double gamma,dx,dt,xmax,xmin,x1min;
     FILE *myfile;
     myfile=fopen("HLLE_5.dat","w");
Definition of constants
gamma=1.4;
     xmax=10.;
     xmin=0.;
     dx=(xmax-xmin)/(N-1);
     dt=0.004;
     x1min=dx/2.;
```

```
1D grid cells
x[0]=0.;
    x1[0]=dx/2.;
    /****** Grid cells (i,i+1) ******/
    for(i=1;i<=N+1;i++)
        ł
            x[i]=xmin+dx;
            xmin=x[i];
    /****** Grid cells (i-1/2,i+1/2) ******/
    for(i=1;i<=N+1;i++)
        Ş
            x1[i]=x1min+dx;
            x1min=x1[i];
        2
Initial conditions
for(i=0;i<=N-1;i++)
        ł
            if(i \le N/2)
                     den[i]=1.;
                     pres[i]=1.;
                     vel[i]=0.;
                     m[i]=den[i]*vel[i];
            en[i]=den[i]*pow(vel[i],2)/2.+pres[i]/(gamma-1.);
                }
            else
                 ł
                     den[i]=0.125;
                     pres[i]=0.1;
                     vel[i]=0.;
                     m[i]=den[i]*vel[i];
            en[i]=(den[i]*pow(vel[i],2))/2.+pres[i]/(gamma-1.);
                }
        }
Average
```

```
for(i=0;i<=N;i++)
                   den_aver[i]=den[i]*(x1[i]-x1[i-1])/dx;
                   m_aver[i]=m[i]*(x1[i]-x1[i-1])/dx;
                   en_aver[i]=en[i]*(x1[i]-x1[i-1])/dx;
                   vel_aver[i]=m_aver[i]/den_aver[i];
pres_aver[i]=(gamma-1.)*(en_aver[i]-(den_aver[i]*pow(vel_aver[i],2))/2.);
 Godunov type method and minmod limiter
for(j=1;j<=T;j++)
            ł
                   den_aver[0]=den_aver[1];
                   vel_aver[0]=vel_aver[1];
                   pres_aver[0]=pres_aver[1];
                   en_aver[0]=en_aver[1];
                   m_aver[0]=m_aver[1];
           den_aver[N]=den_aver[N-1];
                   vel_aver[N]=vel_aver[N-1];
                   pres_aver[N]=pres_aver[N-1];
                   en_aver[N]=en_aver[N-1];
                   m_aver[N]=m_aver[N-1];
                   den_aver[N+1]=den_aver[N-1];
                   vel_aver[N+1]=vel_aver[N-1];
                   pres_aver[N+1]=pres_aver[N-1];
                   en_aver[N+1]=en_aver[N-1];
                   m_aver[N+1]=m_aver[N-1];
                   /***** Slope at (i-1/2,i+1/2) *****/
                   for(i=0;i<=N;i++)
            s_den[i]=(den_aver[i+1]-den_aver[i])/(x[i+1]-x[i]);
            s_m[i] = (m_aver[i+1] - m_aver[i]) / (x[i+1] - x[i]);
            s_en[i]=(en_aver[i+1]-en_aver[i])/(x[i+1]-x[i]);
                         ł
                   /***** Slope at (i-1,i,i+1) *****/
                   for(i=0;i<=N;i++)
            s1_den[i]=(den_aver[i+1]-den_aver[i-1])/(x[i+1]-x[i-1]);
            s1_m[i]=(m_aver[i+1]-m_aver[i-1])/(x[i+1]-x[i-1]);
            s1_en[i]=(en_aver[i+1]-en_aver[i-1])/(x[i+1]-x[i-1]);
                         }
```

```
/*** Monotonized central-difference limiter ***/
                      for(i=1;i<=N;i++)
if(sgn(s1_den[i]) = sgn(s_den[i-1]) \&\& sgn(s_den[i-1]) = sgn(s_den[i]))
den_limiter[i]=sgn(s1_den[i])*min(fabs(s1_den[i]),fabs(2*s_den[i1]),
                                    fabs(2*s_den[i]));
                                            ł
                                    else
                                                   den_limiter[i]=0;
                             }
                     for(i=1;i<=N;i++)
       if(sgn(s1_m[i]) = sgn(s_m[i-1]) \&\& sgn(s_m[i-1]) = sgn(s_m[i]))
       m_{iii}(s_1_m[i]) = sgn(s_1_m[i]) = min(fabs(s_1_m[i]), fabs(2*s_m[i])),
                                   fabs(2*s_m[i]));
                                       }
                                    else
                                                   m_limiter[i]=0;
                             2
           for(i=1;i<=N;i++)
if(sgn(s1_en[i]) = sgn(s_en[i-1]) \&\& sgn(s_en[i-1]) = sgn(s_en[i]))
en_limiter[i]=sgn(s1_en[i])*min(fabs(s1_en[i]),fabs(2*s_en[i-1]),
                                   fabs(2*s_en[i]));
                                            }
                                    else
                                                   en_limiter[i]=0;
                             }
       /***** Reconstructed variables *****/
                     for(i=1;i<=N;i++)
       den_r[i]=den_aver[i+1]+den_limiter[i+1]*(dx/2.);
       m_r[i]=m_aver[i+1]+m_limiter[i+1]*(dx/2.);
       en_r[i]=en_aver[i+1]+en_limiter[i+1]*(dx/2.);
       vel_r[i]=m_r[i]/den_r[i];
       pres_r[i]=(gamma-1.)*(en_r[i]-(den_r[i]*pow(vel_r[i],2))/2.);
```

```
}
              for(i=1;i<=N;i++)
                      {
                      den_l[i]=den_aver[i]-den_limiter[i]*(dx/2.);
                      m_l[i]=m_aver[i]-m_limiter[i]*(dx/2.);
                      en_l[i]=en_aver[i]-en_limiter[i]*(dx/2.);
                      vel_l[i]=m_l[i]/den_l[i];
pres_l[i]=(gamma-1.)*(en_l[i]-(den_l[i]*pow(vel_l[i],2))/2.);
       /***** Fluxes *****/
          for(i=1;i<=N-1;i++)
                      f1[i]=den_l[i]*vel_l[i];
                      f2[i]=den_l[i]*pow(vel_l[i],2)+pres_l[i];
                      f3[i]=(en_l[i]+pres_l[i])*vel_l[i];
              for(i=1;i<=N-1;i++)
                      f10[i]=den_r[i]*vel_r[i];
                      f20[i]=den_r[i]*pow(vel_r[i],2)+pres_r[i];
                      f30[i]=(en_r[i]+pres_r[i])*vel_r[i];
                      }
       /***** Sound speed *****/
              for(i=1;i<=N;i++)
                      cs_l[i]=sqrt((gamma*pres_l[i])/den_l[i]);
                      cs_r[i]=sqrt((gamma*pres_r[i])/den_r[i]);
                      }
       /***** HLLE method *****/
              for(i=1;i<=N-1;i++)
                      ł
                             b_r[i]=vel_r[i]+cs_r[i];
                             b_l[i]=vel_l[i]-cs_l[i];
                             if(b_1[i]>0)
                                     {
                                            b1_1[i]=0;
                                     }
                             else
```

b1_l[i]=b_l[i]; } $if(b_r[i]>0)$ ł b1_r[i]=b_r[i]; } else ł b1_r[i]=0; } } /***** Numerical fluxes *****/ for(i=1;i<=N-1;i++) $F_den[i]=(b1_r[i]*f1[i]-b1_l[i]*f10[i]+b1_l[i]*b1_r[i]*(den_r[i]-b1_r[i])*(den_r[i])*(den_r[i]-b1_r[i])*(den_r[i])*(den_r[i])$ $den_{ii}))/(b1_{ri});$ $F_m[i] = (b1_r[i]*f2[i]-b1_l[i]*f20[i]+b1_l[i]*b1_r[i]*(m_r[i]-i))$ $m_{l[i]})/(b1_{r[i]}-b1_{l[i]});$ $F_en[i]=(b1_r[i]*f3[i]-b1_l[i]*f30[i]+b1_l[i]*b1_r[i]*(en_r[i]-i))$ $en_{i}(i))/(b1_{r}(i)-b1_{i}(i));$ } F_den[0]=F_den[1]; $F_m[0]=F_m[1];$ F_en[0]=F_en[1]; F_den[N]=F_den[N-1]; $F_m[N]=F_m[N-1];$ $F_en[N]=F_en[N-1];$ /*** Discrete form of the conservation law ***/ for(i=1;i<=N-1;i++) $den1_aver[i]=den_aver[i]-(dt/dx)*(F_den[i]-F_den[i-1]);$ $m1_aver[i]=m_aver[i]-(dt/dx)*(F_m[i]-F_m[i-1]);$ $en1_aver[i]=en_aver[i]-(dt/dx)*(F_en[i]-F_en[i-1]);$ vel1_aver[i]=m1_aver[i]/den1_aver[i]; pres1_aver[i]=(gamma-1)*(en1_aver[i]-(den1_aver[i]*pow(vel1_aver[i],2))/2.); } if(j==T){ for(i=1;i<=N-1;i++)

```
fprintf(myfile,"%lf\t%lf\t%lf\t%lf\t%lf\n",x[i],den1_aver[i],
              vel1_aver[i],pres1_aver[i],en1_aver[i]);
                                    }
                            }
                     for(i=1;i<=N-1;i++)
                            ł
                                    den_aver[i]=den1_aver[i];
                                    pres_aver[i]=pres1_aver[i];
                                    vel_aver[i]=vel1_aver[i];
                                    en_aver[i]=en1_aver[i];
                                    m_aver[i]=m1_aver[i];
                            }
       fclose(myfile);
}
/* Sign function */
double sgn(double a)
{
       if(a>0)
              ł
                     return(+1);
       else
                     return(-1);
}
/* Minimum function */
double min(double b,double c,double d)
{
       if(b>c && d>c)
              ł
                     return(c);
       else if(d > b \&\& c > b)
                     return(b);
       else
                     return(d);
}
```

Παράρτημα Δ

Τα βήματα για τον αλγόριθμο του σχετικιστικού HLLE

Στην αρχή ενός νέου υπολογιστικού κύκλου υποτίθεται πως όλες οι ρευστοδυναμικές ποσότητες είναι γνωστές σε κάθε χρονικό βήμα n. Πρέπει να θυμόμαστε ότι τόσο οι διατηρήσιμες ποσότητες όσο και οι ροές είναι συνιστώσες των διανυσμάτων

$$U = U(R, M, E) \text{ Kat } F = F(Rv, Mv + p, Ev + pv)$$

$$(4.1)$$

και

$$u=u(\rho,p,v) \tag{4.2}$$

,οπότε μπορούμε στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε διανυσματικό συμβολισμό. Το πρόγραμμα που αναλύεται είναι αυτό που χρησιμοποιήθηκε στην παράγραφο 4.3.1 με minmod limiter και ακρίβεια δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο. Το γράμμα n αναφέρεται στο χρονικό βήμα ενώ το i στο χωρικό βήμα.

Τα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν για την κατασκευή του προγράμματος είναι τα εξής

1. Καθορισμός των τιμών των ποσοτήτων στο όριο δύο κυψελίδων.

$$u_{i\pm}^n = u_i^n \pm \frac{\Delta x}{2} S_i^n \tag{4.3}$$

όπου S_i^n είναι το διάνυσμα των κλίσεων, οι οποίες ορίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις

Іδιαίτερη σημασία πρέπει να δοθεί στο γεγονός πως για κάθε κυψελίδα і πρέπει να αποδοθούν τρεις διαφορετικές τιμές σε κάθε μία από τις μεταβλητές: u_i (στο κέντρο της κυψελίδας), u_{i+} (στο σημείο $i+\frac{1}{2}$) και u_{i-} (στο σημείο $i-\frac{1}{2}$). Στην πραγματικότητα υπάρχουν μόνο δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, αυτή που ορίζεται στο κέντρο της κυψελίδας και η αντίστοιχη κλίση. Παρατηρούμε ότι τόσο στην παραπάνω σχέση, όσο και για τον υπολογισμό των κλίσεων χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές $u = (\rho, p, v)$. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατή η λύση προβλημάτων του Riemann των οποίων οι αρχικές τιμές της πίεσης εμφανίζουν μεγάλη απόκλιση. Βέβαια σε κάθε περίπτωση μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι εργαστηριακές μεταβλητές U = (R, M, E), με αμφίβολα όμως αποτελέσματα σε ανάλογα προβλήματα.



Σχήμα 1: Ορισμός των ποσοτήτων U_i.,U_{i+}

2. Υπολογισμός των εργαστηριακών ποσοτήτων

Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.16), (2.17), (2.18), υπολογίζονται οι ποσότητες $R_{\pm}, M_{\pm}, E_{\pm}$, οι οποίες αντιστοιχούν στις ποσότητες που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο βήμα.

3. Μισό χρονικό βήμα

$$\mathbf{U}_{\pm}^{n+\frac{1}{2}} = U_{\pm}^{n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \begin{cases} R_{i+}^{n} v_{i+}^{n} - R_{i-}^{n} v_{i-}^{n} \\ M_{i+}^{n} v_{i+}^{n} + p_{i+}^{n} - M_{i-}^{n} v_{i-}^{n} + p_{i-}^{n} \\ (E_{i+}^{n} + p_{i+}^{n}) v_{i+}^{n} - (E_{i-}^{n} + p_{i-}^{n}) v_{i-}^{n} \end{cases}$$
(4.4)

4. Υπολογισμός των ποσοτήτων $u=(\rho,p,v)$ για μισό χρονικό βήμα

Υπολογίζονται οι ποσότητες $n_{i\pm}, e_{i\pm}, p_{i\pm}, v_{i\pm}$ στα σημεία $\left(i\pm\frac{1}{2}\right)$ τη χρονική στιγμή $n+\frac{1}{2}$ σύμφωνα με τα όσα αναφέρονται στην παράγραφο . Με τα βήματα 3 και 4 εξασφαλίζεται η ακρίβεια 2^ης τάξης ως προς το χρόνο.

5. Υπολογισμός των ταχυτήτων του ήχου

Η σχετικιστική ισεντροπική ταχύτητα του ήχου, η οποία αντιστοιχεί στην καταστατική εξίσωση (2.20), δίνεται, όπως έχει ήδη αναφερθεί, από τη σχέση

$$c_s^2 = \frac{\Gamma(\Gamma-1)(e-\rho)}{\rho + \Gamma(e-\rho)}$$
(4.5)

6. Υπολογισμός των ταχυτήτων $b_{i+\frac{1}{2}}^{-}$ και $b_{i+\frac{1}{2}}^{-}$

Eivai απαραίτητο να καθοριστούν οι σωστές αριθμητικές τιμές των $c_{s,i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ και $v_{i\pm}^{n+\frac{1}{2}}$ για τον υπολογισμό των ταχυτήτων $b_{i+\frac{1}{2}}^+$, $b_{i+\frac{1}{2}}^-$. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής

$$v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(v_{i+}^{n+\frac{1}{2}} + v_{(i+1)-}^{n+\frac{1}{2}} \right)$$
(4.6)

και

$$c_{s,i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(c_{s,i+}^{n+\frac{1}{2}} + c_{s,(i+1)-}^{n+\frac{1}{2}} \right)$$
(4.7)

Μπορούμε λοιπόν τώρα να γράψουμε

$$b_{i+\frac{1}{2}}^{+} = \max\left(0, \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + c_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{1 + v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + c_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}, \frac{v_{(i+1)-}^{n+\frac{1}{2}} + c_{s,(i+1)-}^{n+\frac{1}{2}}}{1 + v_{(i+1)-}^{n+\frac{1}{2}} + c_{s,(i+1)-}^{n+\frac{1}{2}}}\right)$$
(4.8)

και

$$b_{i+\frac{1}{2}}^{-} = \min\left(0, \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - c_{s,i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{1 - v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - c_{s,i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}, \frac{v_{i+\frac{1}{2}} - c_{s,i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{1 - v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - c_{s,i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}\right).$$
(4.9)

7. Υπολογισμός των αριθμητικών ροών

Αρχικά υπολογίζουμε τις ροές $F_{i\pm}=F(U_{i\pm},u_{i\pm})$, δηλαδή τις φυσικές ροές των νόμων διατήρησης. Οι αριθμητικές ροές ορίζονται ως εξής

$$G_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\left(b_{i+\frac{1}{2}}^{+}F_{i+}^{n+\frac{1}{2}} - b_{i+\frac{1}{2}}^{-}F_{(i+1)-}^{n+\frac{1}{2}} + b_{i+\frac{1}{2}}^{+}b_{i+\frac{1}{2}}^{-}\left(U_{(i+1)-}^{n+\frac{1}{2}}U_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)\right)}{b_{i+\frac{1}{2}}^{+} - b_{i+\frac{1}{2}}^{-}}$$
(4.10)

8. Υπολογισμός των ποσοτήτων Uⁿ⁺¹

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων U την επομένη χρονική στιγμή επιτυγχάνεται βρίσκοντας τη διαφορά των αριθμητικών ροών που εισέρχονται και εξέρχονται από κάθε κυψελίδα

$$\mathbf{U}_{i}^{n+1} = U_{i}^{n} - \frac{dt}{dx} \left(G_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - G_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right)$$
(4.11)

9. Υπολογισμός των ποσοτήτων *u*^{*n*+1}

Στο τελευταίο βήμα θα πρέπει να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων , ώστε να βρεθούν οι νέες τιμές των u^{n+1} και να χρησιμοποιηθούν στην αρχή του επόμενου υπολογιστικού κύκλου.

/** Special Relativity Hydrodynamics **/ /*** MC limiter , HLLE ***/ #include <stdio.h> #include <math.h> #define M 210 #define N 20 /*number of points*/ #define T 358 /*number of time steps*/ double sgn(double a): /* sign function */ double min(double a,double b); /*minimum function*/ double minimum(double a,double b,double c); /*minimum function*/ double maximum(double a,double b,double c); /*maximum function*/ double function(double a,double b,double c,double d); double v lower(double a,double b,double c); double g function(double a,double b,double c,double d,double e); double g1 function(double a,double b,double c,double d,double e); double main (void) ł int i,j,k; double x[M], x1[M];double den[M],pres[M],vel[M],en[M]; double den_aver[M],pres_aver[M],vel_aver[M],en_aver[M]; double den1_aver[M],pres1_aver[M],vel1_aver[M],en1_aver[M]; double den_minus[M],pres_minus[M],vel_minus[M],en_minus[M]; double den_plus[M],pres_plus[M],vel_plus[M],en_plus[M]; double den1_plus[M],pres1_plus[M],vel1_plus[M],en1_plus[M]; double den1_minus[M],pres1_minus[M],vel1_minus[M],en1_minus[M]; double f1_minus[M],f2_minus[M],f3_minus[M]; double F1_minus[M],F2_minus[M],F3_minus[M]; double f1_plus[M],f2_plus[M],f3_plus[M]; double F1_plus[M],F2_plus[M],F3_plus[M]; double G_R[M],G_Mom[M],G_E[M]; double cs_plus[M],cs_minus[M],cs_cell_int[M],v_cell_int[M]; double $b_r[M], b_l[M], b_rr[M], b_ll[M];$ double b_minus[M],b_plus[M]; double L_factor[M],R[M],E[M],Mom[M]; double R aver[M],Mom aver[M],E aver[M]; double R1_aver[M],Mom1_aver[M],E1_aver[M]; double s_den[M],s_vel[M],s_pres[M]; double s1_den[M],s1_vel[M],s1_pres[M]; double den_limiter[M],vel_limiter[M],pres_limiter[M]; double R plus[M],Mom plus[M],E plus[M]; double R_minus[M],Mom_minus[M],E_minus[M]; double R1_plus[M],Mom1_plus[M],E1_plus[M]; double R1_minus[M],Mom1_minus[M],E1_minus[M]; double vl_r[M],vu_r[M],v0_r[M]; double vl1_r[M],vu1_r[M],v01_r[M]; double vl_l[M],vu_l[M],v0_l[M]; double vl1 1[M],vu1 1[M],v01 1[M]; double vl_aver[M],vu_aver[M],v0_aver[M]; double vel NR;

```
double gamma,dx,dt,xmax,xmin,x1min;
  FILE *myfile;
  myfile=fopen("Back9.dat","w");
Definition of constants
  gamma=5./3.;
  xmax=100.;
  xmin=0.;
  dx=(xmax-xmin)/(N-1);
  dt=dx/5.;
  x1min=dx/2.;
  1D grid cells
  x[0]=0.;
  x1[0]=dx/2.;
  /****** Grid cells (i,i+1) ******/
  for(i=1;i<=N+1;i++)
          x[i]=xmin+dx;
          xmin=x[i];
  /****** Grid cells (i-1/2,i+1/2) ******/
  for(i=1;i<=N+1;i++)
      ł
          x1[i]=x1min+dx;
          x1min=x1[i];
      2
Initial conditions
for(i=1;i<=N;i++)
      ł
          if(i<=N/2)
                   den[i]=10.;
                   pres[i]=13.+1./3.;
                   vel[i]=pow(10,-9);
                   en[i]=pres[i]/(gamma-1.)+den[i];
               }
          else
```

```
{
                     den[i]=1.;
                     pres[i]=(2./3.)*pow(10,-6);
                     vel[i]=pow(10,-9);
                     en[i]=pres[i]/(gamma-1.)+den[i];
                 }
        2
  Average
  for(i=1;i<=N;i++)
        {
             den_aver[i]=den[i]*(x1[i]-x1[i-1])/dx;
             en_aver[i]=en[i]*(x1[i]-x1[i-1])/dx;
             vel_aver[i]=vel[i]*(x1[i]-x1[i-1])/dx;
             pres_aver[i]=pres[i]*(x1[i]-x1[i-1])/dx;
        }
    Conservative variables
    for(i=1;i<=N;i++)
        ł
             L_factor[i]=sqrt(1./(1-pow(vel[i],2)));
             R[i]=L_factor[i]*den[i];
             E[i]=pow(L_factor[i],2)*(en[i]+pres[i])-pres[i];
             Mom[i]=pow(L_factor[i],2)*(en[i]+pres[i])*vel[i];
    Average of conservative variables
    for(i=1;i<=N;i++)
        ł
             R_aver[i]=R[i]*(x1[i]-x1[i-1])/dx;
             Mom_aver[i]=Mom[i]*(x1[i]-x1[i-1])/dx;
             E_aver[i]=E[i]*(x1[i]-x1[i-1])/dx;
   HLLE
 for(j=1;j<=T;j++)
            R_aver[0]=R_aver[1];
```

Mom_aver[0]=Mom_aver[1]; E_aver[0]=E_aver[1]; R_aver[N+1]=R_aver[N]; Mom_aver[N+1]=Mom_aver[N]; E_aver[N+1]=E_aver[N]; den_aver[0]=den_aver[1]; vel_aver[0]=vel_aver[1]; pres_aver[0]=pres_aver[1]; den_aver[N+1]=den_aver[N]; vel_aver[N+1]=vel_aver[N]; pres_aver[N+1]=pres_aver[N]; /**** Definition of slopes at (i-1/2,i+1/2) *****/ for(i=0;i<=N;i++)ł s_den[i]=(den_aver[i+1]-den_aver[i])/dx; s_vel[i]=(vel_aver[i+1]-vel_aver[i])/dx; s_pres[i]=(pres_aver[i+1]-pres_aver[i])/dx; } for(i=0;i<=N;i++)ł s1_den[i]=(den_aver[i+1]-den_aver[i-1])/(2*dx); $s1_vel[i]=(vel_aver[i+1]-vel_aver[i-1])/(2*dx);$ s1_pres[i]=(pres_aver[i+1]-pres_aver[i-1])/(2*dx);} /***** Monotonized central-difference limiter *****/ for(i=1;i<=N;i++) $if(sgn(s1_den[i]) = sgn(s_den[i-1]) \&\& sgn(s_den[i-1]) = sgn(s_den[i]))$ den_limiter[i]=sgn(s1_den[i])*minimum(fabs(s1_den[i]), fabs(2*s_den[i-1]),fabs(2*s_den[i])); } else den_limiter[i]=0; } } for(i=1;i<=N;i++) $if(sgn(s1_vel[i]) = sgn(s_vel[i-1]) \&\& sgn(s_vel[i-1]) = sgn(s_vel[i]))$

```
vel_limiter[i]=sgn(s1_vel[i])*minimum(fabs(s1_vel[i]),
                fabs(2*s_vel[i-1]),fabs(2*s_vel[i]));
                                     else
                                                    vel_limiter[i]=0;
                              }
                      for(i=1;i<=N;i++)
       if(sgn(s1_pres[i])==sgn(s_pres[i-1]) && sgn(s_pres[i-1])==sgn(s_pres[i]))
                                        {
       pres_limiter[i]=sgn(s1_pres[i])*minimum(fabs(s1_pres[i]),
                 fabs(2*s_pres[i-1]),fabs(2*s_pres[i]));
                                     else
                                                    pres_limiter[i]=0;
                              }
 /***** Reconstructed conservative variables *****/
                      for(i=1;i<=N-1;i++)
       den_plus[i]=den_aver[i]+den_limiter[i]*(dx/2.);
                                     vel_plus[i]=vel_aver[i]+vel_limiter[i]*(dx/2.);
       pres_plus[i]=pres_aver[i]+pres_limiter[i]*(dx/2.);
                                     en_plus[i]=den_plus[i]+pres_plus[i]/(gamma-
1);
                             }
          for(i=1;i<=N-1;i++)
                              den_minus[i]=den_aver[i]-den_limiter[i]*(dx/2.);
                              vel_minus[i]=vel_aver[i]-vel_limiter[i]*(dx/2.);
                      pres_minus[i]=pres_aver[i]-pres_limiter[i]*(dx/2.);
                              en_minus[i]=den_minus[i]+pres_minus[i]/(gamma-
1);
                                     }
                      for(i=1;i<=N-1;i++)
                  R_plus[i]=sqrt(1./(1-pow(vel_plus[i],2)))*den_plus[i];
\label{eq:entropy} \ensuremath{\mathbb{E}_plus[i]=(1./(1-pow(vel\_plus[i],2)))*(en\_plus[i]+pres\_plus[i])-pres\_plus[i];} \ensuremath{
Mom_plus[i]=(1./(1-pow(vel_plus[i],2)))*(en_plus[i]+pres_plus[i])*vel_plus[i];
```



 $Mom1_minus[i]=Mom_minus[i]-(dt/(2*dx))*(f2_plus[i]$ f2_minus[i]); $E1_minus[i]=E_minus[i]-(dt/(2*dx))*(f3_plus[i]-f3_minus[i]);$ R1_minus[N]=R1_minus[N-1]; Mom1_minus[N]=Mom1_minus[N-1]; E1_minus[N]=E1_minus[N-1]; for(i=1;i<=N-1;i++) $R1_plus[i]=R_plus[i]-(dt/(2*dx))*(f1_plus[i]-f1_minus[i]);$ $Mom1_plus[i]=Mom_plus[i]-(dt/(2*dx))*(f2_plus[i]-f2_minus[i]);$ $E1_plus[i]=E_plus[i]-(dt/(2*dx))*(f3_plus[i]-f3_minus[i]);$ /***** Newton-Raphson *****/ for(i=1;i<=N-1;i++) ł vl1_l[i]=v_lower(gamma,E1_minus[i],Mom1_minus[i]); vu1_l[i]=min(1,Mom1_minus[i]/E1_minus[i]+pow(10,-6)); $v01_l[i]=(v11_l[i]+vu1_l[i])/2.+function(v11_l[i],vu1_l[i],R1_minus[i],E1_minus[i]);$ for(k=1;k<=5;k++) vel_NR=v01_l[i]g_function(gamma,R1_minus[i],E1_minus[i],Mom1_minus[i],v01_l[i]) /g1_function(gamma,R1_minus[i],E1_minus[i],Mom1_minus[i],v01_l[i]); v01_1[i]=vel_NR; vel1 minus[i]=vel NR; den1_minus[i]=sqrt(1pow(vel1_minus[i],2))*R1_minus[i]; en1 minus[i]=E1 minus[i]vel1_minus[i]*Mom1_minus[i]; pres1_minus[i]=(gamma-1)*(en1_minus[i]den1_minus[i]); for(i=1;i<=N-1;i++) vl1_r[i]=v_lower(gamma,E1_plus[i],Mom1_plus[i]); vu1_r[i]=min(1,Mom1_plus[i]/E1_plus[i]+pow(10,-6)); $v01_r[i] = (v11_r[i] + vu1_r[i])/2 + function(v11_r[i], vu1_r[i], R1_plus[i], E1_plus[i]);$

for(k=1;k<=5;k++)

```
vel_NR=v01_r[i]-g_function(gamma,R1_plus[i],E1_plus[i],Mom1_plus[i],v01_r[i])
        /g1_function(gamma,R1_plus[i],E1_plus[i],Mom1_plus[i],v01_r[i]);
                                 v01_r[i]=vel_NR;
                                  vel1_plus[i]=vel_NR;
                           den1_plus[i]=sqrt(1-pow(vel1_plus[i],2))*R1_plus[i];
                                  en1_plus[i]=E1_plus[i]-
vel1_plus[i]*Mom1_plus[i];
                           pres1_plus[i]=(gamma-1)*(en1_plus[i]-den1_plus[i]);
                           }
    /***** Relativistic sound velocities *****/
                    for(i=1;i<=N-1;i++)
             cs_minus[i]=sqrt(gamma*(gamma-1)*(en1_minus[i]-
den1_minus[i])/(den1_minus[i]+gamma*(en1_minus[i]-den1_minus[i])));
             cs_plus[i]=sqrt(gamma*(gamma-1)*(en1_plus[i]-
den1_plus[i])/(den1_plus[i]+gamma*(en1_plus[i]-den1_plus[i])));
                    cs_minus[N]=cs_minus[N-1];
                    for(i=1;i<=N-1;i++)
                           ł
                                  cs_cell_int[i]=(cs_plus[i]+cs_minus[i+1])/2.;
       /***** Average of the fluid bulk velocity *****/
                    vel1_minus[N]=vel1_minus[N-1];
                    for(i=1;i<=N-1;i++)
       v_cell_int[i]=(vel1_plus[i]+vel1_minus[i+1])/2.;
                     /***** Signal velocities *****/
                    for(i=1;i \le N-1;i++)
       b_r[i]=(v_cell_int[i]+cs_cell_int[i])/(1+v_cell_int[i]*cs_cell_int[i]);
       b_rr[i]=(vel1_minus[i+1]+cs_minus[i+1])/(1+vel1_minus[i+1]*cs_minus[i
      b_l[i]=(v_cell_int[i]-cs_cell_int[i])/(1-v_cell_int[i]*cs_cell_int[i]);
+1]);
       b_ll[i]=(vel1_plus[i]-cs_plus[i])/(1-vel1_plus[i]*cs_plus[i]);
                                  b_plus[i]=maximum(0,b_r[i],b_rr[i]);
                                  b_minus[i]=minimum(0,b_l[i],b_ll[i]);
                           }
```



```
/***** Time advanced values of conservative variables *****/
                    for(i=1;i<=N-1;i++)
                           ł
                                  R1_aver[i]=R_aver[i]-(dt/dx)*(G_R[i]-G_R[i-1]);
                           Mom1_aver[i]=Mom_aver[i]-(dt/dx)*(G_Mom[i]-
G_Mom[i-1]);
                                  E1_aver[i]=E_aver[i]-(dt/dx)*(G_E[i]-G_E[i-1]);
                           }
                     /***** Time advanced values of primitive variables *****/
                             /***** Newton-Raphson *****/
                    for(i=1;i<=N-1;i++)
      vl_aver[i]=v_lower(gamma,E1_aver[i],Mom1_aver[i]);
                           vu_aver[i]=min(1,Mom1_aver[i]/E1_aver[i]+pow(10,-
6));
v0_aver[i]=(vl_aver[i]+vu_aver[i])/2.+function(vl_aver[i],vu_aver[i],R1_aver[i],
                   E1_aver[i]);}
                                  for(k=1;k<=5;k++)
vel_NR=v0_aver[i]-g_function(gamma,R1_aver[i],E1_aver[i],Mom1_aver[i],v0_aver[i)
         /g1_function(gamma,R1_aver[i],E1_aver[i],Mom1_aver[i],v0_aver[i]);
                                 v0_aver[i]=vel_NR;
                                         }
                                  vel1_aver[i]=vel_NR;
                           den1_aver[i]=sqrt(1-pow(vel1_aver[i],2))*R1_aver[i];
                                  en1_aver[i]=E1_aver[i]-
vel1_aver[i]*Mom1_aver[i];
                           pres1_aver[i]=(gamma-1)*(en1_aver[i]-den1_aver[i]);
                           }
                    if(j==T)
                                  for(i=1;i<=N-1;i++)
      fprintf(myfile,"\n%lf\t%lf\t%lf\t%lf\n",x[i],vel1_aver[i],pres1_aver[i],R1_
aver[i]);
                                         }
                       }
                    for(i=1;i<=N-1;i++)
                                  den_aver[i]=den1_aver[i];
                                  vel_aver[i]=vel1_aver[i];
                                  pres_aver[i]=pres1_aver[i];
                                  R_aver[i]=R1_aver[i];
                                  Mom_aver[i]=Mom1_aver[i];
                                  E_aver[i]=E1_aver[i];
```

```
}
      fclose(myfile);
  return(0);
}
/*** Sign function ***/
double sgn(double a)
{
      if(a>0)
                    return(+1);
       else
                    return(-1);
}
/*** Minimum function ***/
double min(double a,double b)
      if(a>b)
              ł
                    return(b);
       else
                    return(a);
}
/*** Maximum function ***/
double maximum(double a,double b,double c)
{
      if(a>b && a>c)
                    return(a);
       else if(b>a && b>c)
              ł
                    return(b);
       else
         {
                return(c);
         }
}
/*** Minimum function ***/
double minimum(double a,double b,double c)
```

```
{
       if(a>b && c>b)
                    return(b);
       else if(b>a && c>a)
              ł
                    return(a);
       else
                    return(c);
}
double function(double a,double b,double c,double d)
ł
  if(a>pow(10,-9))
        ł
              return((1./2.)*(1-c/d)*(a-b));
  else
             return(0);
}
double v_lower(double a,double b, double c)
{
       double v;
       v=(a*b-sqrt(pow(a*b,2)-4*(a-1)*pow(c,2)))/(2*c*(a-1));
       return(v);
}
double g_function(double a,double b,double c,double d,double e)
ł
       double p;
      p=pow(a*e*(c-d*e)-d*(1-pow(e,2)),2)-(1-pow(e,2))*pow(e,2)*pow(a-
1,2)*pow(b,2);
      return(p);
}
double g1_function(double a,double b,double c,double d,double e)
₹
```

double q;

```
q=2*(a*e*(c-d*e)-d*(1-pow(e,2)))*(a*c-2*d*a*e+2*d*e)+2*e*(2*pow(e,2)-
1)*pow(a-1,2)*pow(b,2);
return(q);
}
```

Βιβλιογραφία

- V. Schneider, U. Katscer, D. H. Rischke, B. Waldhauser, J. A. Maruhn, C. D. Munz, New Algorithms for Ultra-relativistic Numerical Hydrodynamics, Journal of computational physics 105.92–107 (1993).
- 2. Hy Trac, Ue-Li Pen, A primer on Eulerian Computational Fluid Dynamics for Astrophysics, astro-ph/0210611 v1 (29 Oct. 2002).
- 3. J. M. Marti, E. Muller, Numerical Hydrodynamics in Special Relativity, Max Planck Institute for Gravitational Physics, Albert Einstein Institute, published on 15 December 1999, (<u>www.livingreviews.org/Articles/Volume2/1999-Marti</u>).
- 4. David Wayne Neilsen, Extremely Relativistic Fluids in Strong-Field Gravity, PHD, University of Texas at Austin, December 1999.
- 5. Yongli Wang, Introduction to MHD Numerical Simulation in Space for Instrumentation, Data Processing and Data Analysis in Space Physics, UCLA, April 11, 2003.
- 6. Parshant Dhand, Numerical Methods for 1–D Convection Equation Transient Flow Problem, UCLA, October 02, 2002.
- 7. Shoikiro Nakamura, Applied Numerical Methods in C, PTR Prentice Hall, 1993.
- 8. E. F. Toro, Riemann solvers and Numerical Methods for fluid dynamics, Second Edition, Springer, 1999.
- 9. C. Hirsch, Numerical Computation of internal and external flows, Volume 1, Fundamentals of numerical Discretisation, 2001.
- William H. Press, William T. Vetterling, Saul A. Teukolsky, Brian P. Flannery, Numerical Recipes in C, the art of Scientific Computation, Second Edition, Cambridge University Press, 1999.
- 11. William H. Press, William T. Vetterling, Saul A. Teukolsky, Brian P. Flannery, Numerical Recipes Example Book [C], Second Edition, Cambridge University Press, 1999.
- 12. Brian W. Kernighan, Dennis M. Ritchie, Η Γλώσσα Προγραμματισμού C, 2^η έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2002.
- 13. Η. Η. Tan, T/B/ D' Orazio, C για Μηχανικούς, Εκδόσεις Τζιόλα, 2000.
- 14. J. David Logan, Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1999.
- 15. Κ.Κόκκοτας, Σημειώσεις Αριθμητικής Ανάλυσης, Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ. Οκτώβριος 1999.

- Νικόλαος Κ. Σπύρου, Αρχές Αστρικής Εξέλιξης, Τμήμα Εκδόσεων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη 1995.
- 17. Γ. Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγάλης, Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1997.