Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Φυσικης

Η προσέγγιση CFC σε ομογενώς και διαφορικά περιστρεφόμενους σχετικιστικούς αστέρες

Παναγιώτης Ιωσήφ

Διπλωματικη εργασια
για το
Προγραμμα Μεταπτυχιακων Σπουδων
Υπολογιστικης Φυσικης

Επιβλέπων: Νικόλαος Στεργιούλας

Αυγουστος 2011

Περίληψη

Η προσέγγιση χωρικά σύμμορφης επιπεδότητας (conformal flatness condition, CFC) για τη μελέτη συστημάτων αστροφυσικού ενδιαφέροντος έχει γνωρίσει σημαντική ανάπτυξη τα τελευταία χρόνια. Αυτό όμως δεν αίρει την ανάγκη για συνεχή επιβεβαίωση της ισχύος της. Σ' αυτήν την εργασία, μελετούμε την αξιοπιστία της CFC για μεμονωμένους, διαφορικά περιστρεφόμενους, σχετικιστικούς αστέρες και παράλληλα επαληθεύουμε την πολύ καλή της ποιότητα στην περίπτωση ομογενούς περιστροφής. Βασιζόμαστε στην αριθμητική μέθοδο KEH όπως υλοποιείται στον κώδικα RNS, τον οποίο επεκτείνουμε κατάλληλα ώστε να έχει τη δυνατότητα προσομοιώσεων στην προσέγγιση CFC. Τα αποτελέσματά μας είναι αρκετά ενθαρρυντικά, καθώς ακόμη και για τα ταχύτερα περιστρεφόμενα μοντέλα που κατασκευάζουμε, η απόκλιση από την πλήρη γενική θεωρία σχετικότητας βρίσκεται στα επίπεδα του 5%.

Abstract

Many astrophysically relevant systems have been studied, in the recent years, by means of the conformal flatness condition (CFC) yielding very satisfactory results as far as the quality of CFC is concerned. However, this does not nullify the need for constant evaluation of the CFC approximation in various different systems. In this thesis, we study the quality of CFC for the case of single, differentially rotating, relativistic stars. In addition, we verify its excellent performance for the case of uniform rotation. We use the numerical scheme KEH, as it is implemented in the computational code RNS. Necessary changes are made to the code, in order to allow for calculations in the CFC approximation. Our results are very encouraging, as even for the fastest rotating models, deviation from full general relativity is around 5%.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επίκουρο καθηγητή του Τμήματος Φυσικής, κ. Νικόλαο Στεργιούλα που μου πρότεινε το συγκεκριμένο θέμα, καθώς και για όλες τις συμβουλές και υποδείξεις του κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας. Νιώθω ευγνωμοσύνη για όσες γνώσεις μου μετέδωσε στη γενική θεωρία σχετικότητας αλλά και για τα υπολογιστικά εργαλεία που με ώθησε να μάθω. Επίσης, θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη συνεχιζόμενη υλική και ηθική υποστήριξη στη διάρκεια των σπουδών μου, καθώς και την Εύη για την απεριόριστη υπομονή της σχετικά με τις υπερβολικά αισιόδοξες προβλέψεις για την ημερομηνία ολοκλήρωσης της εργασίας.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η αριθμητική σχετικότητα έχει γνωρίσει μεγάλη άνθιση από τα μέσα της δεκαετίας του 1990 μέχρι σήμερα, κυρίως λόγω της αναμονής για την ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων. Στο πλαίσιο αυτό απαιτείται να μελετηθούν οι αναμενόμενες κυματομορφές της βαρυτικής ακτινοβολίας από μία πλειάδα αστροφυσικών συστημάτων προκειμένου τα σήματα βαρυτικής ακτινοβολίας να μπορούν να εξαχθούν ευκολότερα από τα δεδομένα των ανιχνευτικών διατάξεων. Για να γίνει αυτό εφαρμόζονται διάφορες αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση των εξισώσεων Einstein είτε ακριβώς είτε προσεγγιστικά. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκει η προσέγγιση χωρικά σύμμορφης επιπεδότητας (conformal flatness condition, CFC), η οποία μπορεί να δώσει με ακρίβεια τις φάσεις των κυματομορφών αυτών. Καθώς όμως μία μέθοδος πρέπει να ελέγχεται συνεχώς σε διάφορες εφαρμογές ώστε να επαληθεύουμε και να επεκτείνουμε την ισχύ της, έτσι σ' αυτήν την εργασία ελέγχουμε την αξιοπιστία της προσέγγισης CFC για την περίπτωση μεμονωμένων, περιστρεφόμενων, σχετικιστικών αστέρων με διαφορική περιστροφή. Άλλωστε, πρέπει να είμαστε όσο το δυνατόν πιο σίγουροι ότι μία μέθοδος λειτουργεί ικανοποιητικά σε απλά συστήματα, έτσι ώστε να την εμπιστευτούμε και στα πολυπλοκότερα.

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε τις βασικές έννοιες και εξισώσεις του φορμαλισμού $3 + 1$, ο οποίος είναι απαραίτητος για να διακρίνουμε το χωροχρόνο σε χώρο και χρόνο και να μπορούμε ν' αναφερόμαστε στην εξέλιξη ενός βαρυτικού πεδίου στο χρόνο. Στη συνέχεια, στο κεφάλαιο 2 επιχειρούμε μία επισκόπηση της προσέγγισης CFC, των εφαρμογών της και των μέχρι σήμερα αποτελεσμάτων για την ακρίβειά της. Στο επόμενο κεφάλαιο αναλύουμε υπό το πρίσμα του υπολογιστικού κώδικα RNS, την αριθμητική μέθοδο KEH την οποία χρησιμοποιήσαμε και συνοψίζουμε τις αλλαγές που χρειάστηκε να ενσωματώσουμε στον κώδικα. Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αριθμητικά μας αποτελέσματα, ενώ στο τελευταίο κεφάλαιο τα αξιολογούμε και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η προσέγγιση CFC λειτουργεί ικανοποιητικά για τη μελέτη περιστρεφόμενων, σχετικιστικών αστέρων εφόσον οι απαιτήσεις στην ακρίβεια δεν είναι υψηλές.

Κεφάλαιο 1

Ο φορμαλισμός $3+1$

1.1 Αριθμητική Σχετικότητα

Η Γενική Θεωρία Σχετικότητας (ΓΘΣ) είναι η ακριβέστερη θεωρία που έχουμε σήμερα για τη βαρύτητα. Χρησιμοποιείται όχι μόνο για τη μελέτη αστροφυσικών αντικειμένων όπως οι αστέρες νετρονίων και οι μελανές οπές, αλλά έχει εφαρμογές και στην καθημερινότητά μας, για παράδειγμα με τις συσκευές GPS. Η ισχύς και η ακρίβειά της είναι σημαντική και πειραματικά αποδεδειγμένη, παρά το γεγονός ότι ακόμα δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι έχουμε μια πλήρη θεωρία για τη βαρύτητα. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να έχουμε στα χέρια μας μια κβαντική θεωρία βαρύτητας, αυτή η συζήτηση όμως ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της εργασίας.

Παρά το γεγονός λοιπόν ότι η ΓΘΣ είναι μια καλά θεμελιωμένη θεωρία και έχει περάσει με επιτυχία πολλές πειραματικές και παρατηρησιακές προκλήσεις, εν τούτοις, οι περιπτώσεις που οι εξισώσεις του Einstein λύνονται αναλυτικά είναι περιορισμένες και αφορούν συστήματα με υψηλό βαθμό συμμετρίας στο χώρο ή στο χρόνο. Σε περιπτώσεις αστροφυσικού ενδιαφέροντος, η ύπαρξη ισχυρών βαρυτικών πεδίων και η απουσία κάποιου υψηλού βαθμού συμμετρίας περιπλέκει τα πράγματα και η εύρεση αναλυτικών λύσεων γίνεται αδύνατη. Αυτό δεν οφείλεται μόνο στην πολυπλοκότητα του υπό μελέτη συστήματος, αλλά κυρίως στο γεγονός ότι οι εξισώσεις πεδίου του Einstein αποτελούν ένα σύστημα δέκα, μη γραμμικών, διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους σε τέσσερις διαστάσεις. Με άλλα λόγια, η ίδια η ΓΘΣ παρουσιάζει μεγάλη πολυπλοκότητα, παρά το γεγονός ότι εννοιολογικά χαρακτηρίζεται από κομψότητα. Συνεπώς, για την πλειοψηφία των προβλημάτων, θα πρέπει να στραφούμε προς την αναζήτηση αριθμητικών λύσεων για την επίλυση των εξισώσεων Einstein, κατασκευάζοντας κατάλληλα αριθμητικά σχήματα και κώδικες.

Ποιες είναι όμως οι εξισώσεις που θα μας απασχολήσουν και πως προκύπτουν; Χάριν συντομίας εδώ θα περιοριστούμε σε μια απλή αναφορά τους και δε θα παραθέσουμε με λεπτομέρειες τον τρόπο εξαγωγής τους, καθώς κάτι τέτοιο ανήκει στα αντικείμενα ενός μαθήματος ΓΘΣ. Οι εξισώσεις Einstein προσδιορίζονται από την έκφραση

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta} \ , \tag{1.1}$$

όπου η πρώτη ισότητα αποτελεί τον ορισμό του τανυστή Einstein $G_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}$ και R είναι ο τανυστής και το βαθμωτό μέγεθος Ricci αντίστοιχα, $g_{\alpha\beta}$ είναι ο μετρικός τανυστής και $T_{\alpha\beta}$ ο τανυστής τάσης–ενέργειας–ορμής. Ο παράγοντας 8π εισάγεται έτσι ώστε να παίρνουμε σωστά το Νευτώνειο όριο. Σημειώνουμε ότι ο τανυστής Ricci προκύπτει από τον τανυστή καμπυλότητας Riemann με την πράξη της συστολής και το βαθμωτό μέγεθος Ricci από τον ομώνυμο τανυστή επίσης με συστολή. Οι εξισώσεις Einstein μπορούν να γραφούν επίσης στην ισοδύναμη μορφή

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right) \tag{1.2}$$

παίρνοντας το ίχνος των αρχικών εξισώσεων πεδίου και παρατηρώντας ότι ισχύει $R = -8\pi T$, όπου T το ίχνος του τανυστή $T_{\alpha\beta}$. Η κομψότητα της ΓΘΣ εν πολλοίς συμπυκνώνεται στην απλή έκφραση

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \ , \tag{1.3}$$

όπου η γεωμετρία του χωροχρόνου στο αριστερό μέλος συσχετίζεται με την ύλη στο δεξί μέλος. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον τρόπο εξαγωγής των εξισώσεων του Einstein καθώς και για μια γενικότερη επισκόπηση της θεωρίας, μπορεί κανείς ν' ανατρέξει στα καθιερωμένα κλασσικά συγγράμματα ΓΘΣ [17, 24] ή και σε ορισμένα νεώτερα [4, 12, 20].

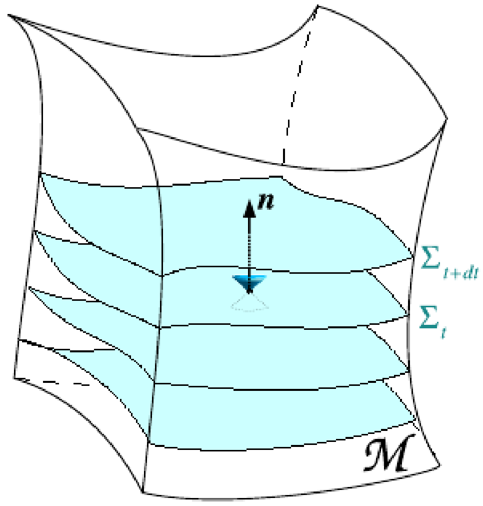
Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι τα δύο μέλη της σχέσης (1.3) αποτελούν ουσιαστικά «συντομογραφίες» για πιο πολύπλοκες εκφράσεις, εξ' ου και η ανάγκη για την ανάπτυξη της αριθμητικής σχετικότητας. Η αριθμητική σχετικότητα είναι ένα εργαλείο, αποτέλεσμα της εφαρμογής μεθόδων της υπολογιστικής φυσικής και της αριθμητικής ανάλυσης στη ΓΘΣ, το οποίο μας επιτρέπει να μελετήσουμε φαινόμενα που δεν μπορούν να μελετηθούν σε κάποιο συμβατικό εργαστήριο. Τέτοια φαινόμενα είναι η βαρυτική κατάρρευση προς μελανή οπή ή αστέρα νετρονίων, η εξέλιξη διπλών συστημάτων μελανών οπών και αστέρων νετρονίων, καθώς και η δημιουργία και διάδοση βαρυτικών κυμάτων. Η επίλυση των εξισώσεων του Einstein για τέτοια συστήματα, στο πλαίσιο της αριθμητικής σχετικότητας παρουσιάζει ορισμένες δυσκολίες, όπως η σωστή εκμετάλλευση της ελευθερίας βαθμίδας ώστε ν' αποφύγουμε ανωμαλίες σχετιζόμενες με το σύστημα συντεταγμένων, η επιλογή κατάλληλων αριθμητικών τεχνικών ώστε ν' αποφύγουμε φυσικές ανωμαλίες σχετιζόμενες με το εσωτερικό των μελανών οπών και η εξαγωγή των βαρυτικών κυμάτων από το υπόβαθρο με το μικρότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος. Ξεπερνώντας αυτές τις δυσκολίες, μπορούμε να διερευνήσουμε τα χαρακτηριστικά ακραίων φαινομένων στο σύμπαν, να ερμηνεύσουμε παρατηρησιακά δεδομένα, να κάνουμε καλύτερες εκτιμήσεις για τις φυσικές ιδιότητες απομακρυσμένων αστροφυσικών αντικειμένων και τελικά να κατανοήσουμε καλύτερα τη συμπεριφορά της ύλης σε συνθήκες ισχυρών βαρυτικών πεδίων και υψηλών ταχυτήτων.

Σ' αυτό σημείο θα πρέπει ν' αναφέρουμε ορισμένες συμβάσεις που θ' ακολουθήσουμε στη συνέχεια αυτής της εργασίας. Οι ελληνικοί δείκτες θ' αναφέρονται στις τέσσερις διαστάσεις του χωροχρόνου, ενώ οι λατινικοί δείκτες στον τριδιάστατο χώρο. Δείκτες που εμφανίζονται στην αρχή του αλφαβήτου ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ και $a, b, c, \ldots$) θ' αναφέρονται σε αφηρημένα γεωμετρικά αντικείμενα ανεξάρτητα του συστήματος συντεταγμένων, ενώ οι δείκτες $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ και $i, j, k, \ldots$ θα είναι συγκεκριμένοι και θα παίρνουν τιμές $0, 1, 2, 3$ και $1, 2, 3$ αντίστοιχα. Επαναλαμβανόμενοι άνω και κάτω δείκτες υποδηλώνουν άθροιση. Επίσης χρησιμοποιούμε γεωμετρικές μονάδες $c = G = 1$, ενώ ο μετρικός τανυστής έχει υπογραφή $\{-+++\}$. Στις ενότητες που ακολουθούν επιχειρούμε μια επισκόπηση των εννοιών και σχέσεων του φορμαλισμού $3+1$ της ΓΘΣ βασιζόμενοι στα συγγράμματα που έχουν προστεθεί πρόσφατα στη σχετική βιβλιογραφία [1, 3, 11, 10].

1.2 Ο τετραδιάστατος χωροχρόνος ως 3+1 διαστάσεις

Η έννοια του χωροχρόνου έχει κυρίαρχο ρόλο στην ανάπτυξη των εννοιών της ΓΘΣ. Η ενοποίηση χώρου και χρόνου σ' ένα χωροχρονικό συνεχές όπου δεν γίνεται διάκριση μεταξύ των τεσσάρων διαστάσεων και οι συντεταγμένες είναι απλώς ένας τρόπος διάκρισης γεγονότων μεταξύ τους, είναι σημαντική από θεωρητικής άποψης και οδηγεί σε βαθύτερη κατανόηση της σχέσης μεταξύ των εννοιών «χώρου» και «χρόνου». Υπάρχουν περιπτώσεις όμως που αυτή η κομψή εικόνα δεν μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και το ζητούμενο είναι μια εναλλακτική θεώρηση όπου να μπορούμε να μιλήσουμε για εξέλιξη ενός βαρυτικού πεδίου στο χρόνο. Στο πλαίσιο μιας τέτοιας θεώρησης, συνήθως έχουμε καλύτερη κατανόηση του υπό μελέτη προβλήματος διαισθητικά, καθώς τις περισσότερες φορές έχουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.

Το βασικό πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε είναι να ξαναγράψουμε τις εξισώσεις Einstein ως πρόβλημα αρχικών τιμών. Με άλλα λόγια, προσδιορίζοντας κάποιες αρχικές και συνοριακές συνθήκες, θέλουμε οι εξισώσεις να μας δίνουν την εξέλιξη του συστήματος στο χρόνο (είτε προς το μέλλον είτε προς το παρελθόν). Για να γίνει αυτό, ο χώρος και ο χρόνος πρέπει να διαχωριστούν με σαφή τρόπο. Ο φορμαλισμός της ΓΘΣ που προκύπτει από αυτό το διαχωρισμό



Σχήμα 1.1: Ανάλυση του χωροχρόνου M σε μια οικογένεια χωροειδών υπερεπιφανειών Σ_t. Αναπαραγωγή εικόνας από [11].

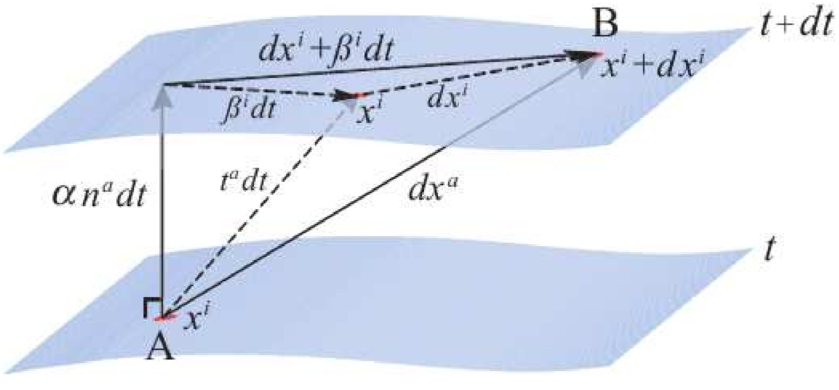
ονομάζεται συνοπτικά «3+1».

Αν θεωρήσουμε ένα χωροχρόνο, έστω M, τότε υποθέτουμε ότι αυτός μπορεί ν' αναλυθεί πλήρως σε μια οικογένεια μη τεμνόμενων, χωροειδών, υπερεπιφανειών Σ. Οι υπερεπιφάνειες Σ μπορούν να θεωρηθούν ως διαφορετικά επίπεδα αναφοράς μιας βαθμωτής παραμέτρου t, η οποία με τη σειρά της μπορεί να θεωρηθεί ως μια καθολική συνάρτηση χρόνου (Σχήμα 1.1). Στη διεθνή βιβλιογραφία η παραπάνω περιγραφή αποδίδεται με την έκφραση *foliation of spacetime*. Στην περίπτωση που ο χωροχρόνος M είναι τεσσάρων διαστάσεων, τότε οι επιφάνειες Σ είναι τριδιάστατες. Επίσης, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η συνάρτηση t, εν γένει, δεν συμπίπτει με τον ίδιο χρόνο (proper time) κάποιου συγκεκριμένου παρατηρητή.

Αν βρισκόμαστε σ' ένα συγκεκριμένο τετραδιάστατο χωροχρόνο με μετρικό τανυστή $g_{\alpha\beta}$ κι έχουμε δύο γειτονικές υπερεπιφάνειες Σ_t και Σ_{t+dt}, τότε για να προσδιορίσουμε πλήρως τη γεωμετρία της αναλυμένης σε 3+1 διαστάσεις δομής, χρειαζόμαστε τα εξής (Σχήμα 1.2):

- έναν τρόπο να μετρούμε αποστάσεις πάνω στις επιφάνειες Σ
- μια ποσότητα που να μετράει πόσος «χρόνος» περνά μεταξύ των επιφανειών Σ_t και Σ_{t+dt}. Ο χρόνος αυτός μετριέται από παρατηρητές που βρίσκονται στην κάθετη διεύθυνση αυτών των επιφανειών.
- μια ποσότητα που να μετράει πόσο μετατοπίζονται οι χωρικές συντεταγμένες μέσα σε μια επιφάνεια Σ ως προς την κάθετη διεύθυνση αυτής της επιφάνειας.

Αρχικά, χρειάζεται να ορίσουμε το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια Σ_t. Το διάνυσμα $\nabla^\alpha t$ είναι κάθετο παντού στην επιφάνεια Σ_t και έστω ότι το



Σχήμα 1.2: Γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα στο χωροχρόνο με χρήση του φορμαλισμού 3+1. Αναπαραγωγή εικόνας από [3].

τετράγωνο του μέτρου του είναι $-\alpha^{-2}$

$$g_{\alpha\beta}\nabla^\alpha t\nabla^\beta t = -\frac{1}{\alpha^2} \tag{1.4}$$

$$\Rightarrow \alpha = \left(-\nabla_\beta t \nabla^\beta\right)^{-1/2} \ . \tag{1.5}$$

Υποθέτοντας ότι $\alpha > 0$, το διάνυσμα $\nabla^\alpha t$ είναι χρονοειδές και οι επιφάνειες Σ_t είναι χωροειδείς. Ακόμη, θέλουμε το ζητούμενο διάνυσμα να έχει κατεύθυνση προς το μέλλον, το οποίο έχουμε ορίσει ως την κατεύθυνση προς την οποία αυξάνεται η βαθμωτή παράμετρος t. Συνεπώς, το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια Σ_t είναι

$$n^\alpha = -\alpha\nabla^\alpha t = -\frac{\nabla^\alpha t}{\sqrt{-\nabla_\beta t \nabla^\beta t}} \ , \tag{1.6}$$

με κανονικοποίηση $n^\alpha n_\alpha = -1$. Το διάνυσμα n^α είναι η τετραταχύτητα ενός παρατηρητή, ο οποίος βρίσκεται συνεχώς σε διεύθυνση κάθετη στην Σ_t. Τέτοιοι παρατηρητές ονομάζονται *παρατηρητές Euler*.

Έχοντας ορίσει το κάθετο διάνυσμα στις επιφάνειες Σ, μπορούμε στη συνέχεια να ορίσουμε το μετρικό τανυστή $\gamma_{\alpha\beta}$ που *επάγεται* στις τριδιάστατες επιφάνειες Σ από τον $g_{\alpha\beta}$

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta \ . \tag{1.7}$$

Με τη βοήθεια του επαγόμενου μετρικού τανυστή (1.7) μπορούμε να μετρούμε αποστάσεις πάνω στις επιφάνειες Σ υπολογίζοντας το χωρικό γραμμικό στοιχείο

$$d\ell^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j \ , \tag{1.8}$$

κι έτσι έχουμε προσδιορίσει το πρώτο από τα τρία ζητούμενα για τον ορισμό της γεωμετρίας του 3+1 χωροχρόνου. Ο επαγόμενος μετρικός τανυστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναβίβαση και καταβίβαση δεικτών στις επιφάνειες Σ, ενώ είναι πλήρως χωρικός, καθώς η όποια χρονοειδής συνεισφορά εξαφανίζεται εξαιτίας του όρου $n_\alpha n_\beta$. Αυτό αποδεικνύεται εφαρμόζοντας συστολή του $\gamma_{\alpha\beta}$ με το κάθετο διάνυσμα n^β και αξιοποιώντας τη συνθήκη κανονικοποίησης.

$$\gamma_{\alpha\beta} n^\beta = g_{\alpha\beta} n^\beta + n_\alpha n_\beta n^\beta = n_\alpha - n_\alpha = 0 \tag{1.9}$$

Ένας ακόμη τανυστής που πρέπει να εισάγουμε είναι ένας τανυστής προβολής, ο οποίος θα μπορεί να προβάλλει τετραδιάστατους τανυστές στις χωρικές επιφάνειες Σ, έτσι ώστε να μπορούμε να αναλύουμε τέτοιους τανυστές σε χωρικό και χρονικό μέρος. Ο ζητούμενος τανυστής προβολής προκύπτει από τη σχέση (1.7) ανεβάζοντας τον ένα συναλλοίωτο δείκτη με τη δράση του μετρικού τανυστή $g^{\alpha\beta}$

$$\gamma^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + n^\alpha n_\beta \ . \tag{1.10}$$

Για ένα διάνυσμα που είναι κάθετο στις επιφάνειες Σ ισχύει $\gamma^\alpha{}_\beta \upsilon^\beta_\perp = 0$, ενώ για ένα διάνυσμα εφαπτόμενο στις Σ ισχύει $\gamma^\alpha{}_\beta \upsilon^\beta_\parallel = \upsilon^\alpha_\parallel$. Με άλλα λόγια, στη δεύτερη περίπτωση, το διάνυσμα παραμένει αναλλοίωτο από τη δράση του τανυστή προβολής. Με βάση τα προηγούμενα, κάθε διάνυσμα μπορεί ν' αναλυθεί σε δύο συνιστώσες: μια εφαπτόμενη και μία κάθετη στις επιφάνειες Σ.

Δίνοντας τον ορισμό του κάθετου διανύσματος (1.6), αναφέραμε μια συγκεκριμένη κατηγορία παρατηρητών, τους παρατηρητές Euler. Αν ορίσουμε ένα χωρικό σύστημα συντεταγμένων $\{x^i\}$ σε μια επιφάνεια Σ, τότε ορίζεται και μια άλλη κατηγορία παρατηρητών, οι παρατηρητές που βρίσκονται σε ηρεμία σ' αυτό το σύστημα συντεταγμένων (*coordinate observers*). Εφαπτόμενο στις κοσμικές γραμμές αυτών των παρατηρητών είναι το διάνυσμα χρόνου t^α με συντεταγμένες[1]

$$t^\mu = \delta^\mu_t = (1, 0, 0, 0) \ . \tag{1.11}$$

Επίσης, στο σύστημα συντεταγμένων $\{t, x^i\}$, οι συναλλοίωτες συνιστώσες του κάθετου διανύσματος είναι

$$\nabla_\mu t = \delta^t_\mu = (1, 0, 0, 0) \tag{1.12}$$

και συνεπώς ισχύει ότι

$$t^\alpha \nabla_\alpha t = 1 \ . \tag{1.13}$$

Το διάνυσμα t^α, σύμφωνα με τα προηγούμενα, μπορεί ν' αναλυθεί σε μια κάθετη

[1] Ο δείκτης μ παίρνει τις τιμές $\{t, x^1, x^2, x^3\}$.

και μια εφαπτόμενη συνιστώσα στις επιφάνειες Σ ως εξής

$$t^\alpha = \alpha n^\alpha + \beta^\alpha \ . \tag{1.14}$$

Από την παραπάνω σχέση συνάγεται ότι το διάνυσμα t^α ορίζει, εν γένει, μια διαφορετική διεύθυνση απ' ότι το n^α. Συγκεκριμένα, συνδέει σημεία που έχουν τις ίδιες χωρικές συντεταγμένες αλλά βρίσκονται σε γειτονικά χρονικά επίπεδα. Τα παραπάνω αποδίδονται γραφικά στο Σχήμα 1.2.

Στη σχέση (1.14), ο όρος α ονομάζεται *συνάρτηση εξέλιξης ίδιου χρόνου* (*lapse function*) και μετρά πόσος ίδιος χρόνος περνά μεταξύ των επιφανειών Σ_t και Σ_{t+dt} κατά την κάθετη διεύθυνση. Ορίζεται, όπως είδαμε ήδη στη σχέση (1.5), με βάση το μέτρο του κάθετου διανύσματος (1.6) ως εξής

$$\alpha = (-\nabla_\alpha t \nabla^\alpha t)^{-1/2} \ .$$

Έχοντας δώσει τον ορισμό της συνάρτησης εξέλιξης, μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τις συντεταγμένες του συναλλοίωτου μοναδιαίου κάθετου διανύσματος n_α. Ομοίως με τη σχέση (1.6) και χρησιμοποιώντας και την (1.12) έχουμε

$$n_\alpha = -\alpha \nabla_\alpha t = (-\alpha, 0, 0, 0) \tag{1.15}$$

Το χωρικό διάνυσμα β^α στη σχέση (1.14), ονομάζεται *διάνυσμα χωρικής μετατόπισης* (*spatial shift vector*) και είναι μέτρο της μετατόπισης των χωρικών συντεταγμένων σε μια επιφάνεια, ως προς την κάθετη διεύθυνση. Ορίζεται από την προβολή του διανύσματος χρόνου (1.14) στην επιφάνεια Σ με τη βοήθεια του τανυστή προβολής (1.10).

$$\beta^\alpha = \gamma^\alpha{}_\beta t^\beta \ . \tag{1.16}$$

Σημειώνουμε ότι, καθώς το διάνυσμα μετατόπισης είναι χωρικό, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\beta^\alpha n_\alpha = 0 \ , \tag{1.17}$$

κατά τα γνωστά για το εσωτερικό γινόμενο κάθετων διανυσμάτων. Από τη σχέση (1.15) όμως παρατηρούμε ότι $n_i = 0$ και συνεπώς για να ισχύει η (1.17) θα πρέπει η χρονική συνιστώσα του διανύσματος μετατόπισης να μηδενίζεται, $\beta^t = 0$. Αυτή είναι μια γενική ιδιότητα που ισχύει για τις ανταλλοίωτες χρονικές συνιστώσες γεωμετρικών αντικειμένων που προβάλλονται πάνω στις επιφάνειες Σ. Άρα, το διάνυσμα μετατόπισης έχει την εξής μορφή

$$\beta^\alpha = (0, \beta^i) \ . \tag{1.18}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις (1.14), (1.11) και (1.18) μπορούμε να προσδιορίσουμε τις συνιστώσες του ανταλλοίωτου κάθετου διανύσματος (1.6).

$$n^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}(t^{\alpha} - \beta^{\alpha}) = \big(1/\alpha, -\beta^{i}/\alpha\big) \tag{1.19}$$

Το τελευταίο ζητούμενο είναι να γράψουμε στο φορμαλισμό $3+1$ το γραμμικό στοιχείο

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \ , \tag{1.20}$$

χρησιμοποιώντας όλα τα προηγούμενα πορίσματα. Πρέπει λοιπόν να εκφράσουμε το μετρικό τανυστή $g_{\alpha\beta}$ και τον αντίστροφό του συναρτήσει της συνάρτησης εξέλιξης α, του διανύσματος μετατόπισης β^{α} και του επαγόμενου μετρικού τανυστή $\gamma_{\alpha\beta}$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι εξ' ορισμού από τη σχέση (1.7) ισχύει

$$\gamma_{ij} = g_{ij} \tag{1.21}$$

εφόσον $n_i = 0$. Επίσης από το πόρισμα για τις χρονικές συνιστώσες ανταλλοίωτων γεωμετρικών αντικειμένων που προβάλλονται στις επιφάνειες Σ προκύπτουν οι εξής χρήσιμες σχέσεις

$$\gamma^{tt} = 0 \quad , \quad \gamma^{ti} = 0 \, . \tag{1.22}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις παραπάνω σχέσεις, τον αντίστροφο επαγόμενο μετρικό τανυστή $\gamma^{\alpha\beta}$ (όμοιος με τη σχέση (1.7) αλλά με τους δείκτες πάνω) και τη σχέση (1.19) μπορούμε να υπολογίσουμε τις συνιστώσες του αντίστροφου μετρικού τανυστή $g^{\alpha\beta}$

$$g^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} - n^{\alpha}n^{\beta} = \begin{pmatrix} -\alpha^{-2} & \alpha^{-2}\beta^{i} \\ \alpha^{-2}\beta^{j} & \gamma^{ij} - \alpha^{-2}\beta^{i}\beta^{j} \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

Για τον προσδιορισμό των στοιχείων του $g_{\alpha\beta}$, αρκεί ν' αντιστρέψουμε τον πίνακα της σχέσης (1.23) καθώς γνωρίζουμε ότι ισχύει $g^{\alpha\mu}g_{\mu\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$.

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\alpha^{-2} + \beta_k\beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

Έχοντας πλέον εκφράσει το μετρικό τανυστή του χωροχρόνου στο φορμαλισμό $3+1$ είναι σχετικά απλό ν' αναλύσουμε και το γραμμικό στοιχείο ds^2 σε χρονικό και χωρικό μέρος. Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι αναλύοντας τα αθροίσματα της σχέσης (1.20), εφόσον γνωρίζουμε τις συνιστώσες του μετρικού τανυστή. Ένας άλλος τρόπος, πιο γεωμετρικός, είναι να επιστρέψουμε στο σχήμα 1.2 και να θεωρήσουμε το γραμμικό στοιχείο ως εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στον τετραδιάστατο χωρόχρονο.

$$\begin{aligned} ds^2 = &- (\text{ίδιος χρόνος μεταξύ γειτονικών υπερεπιφανειών})^2 \\ &+ (\text{ίδια απόσταση μέσα στις χωρικές υπερεπιφάνειες})^2 \end{aligned}$$

Έτσι το συνολικό διάνυσμα dx^α αναλύεται σε δύο διανύσματα κι έχουμε το σχηματισμό ενός ορθογώνιου τριγώνου.

$$dx^\alpha = (\alpha n^\alpha dt) + (dx^i + \beta^i dt) \tag{1.25}$$

Το γραμμικό στοιχείο λοιπόν στο φορμαλισμό $3+1$ δίνεται από την έκφραση

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt)\ . \tag{1.26}$$

Συνοψίζοντας, μπορούμε ν' αξιοποιήσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα επανερχόμενοι στην ερμηνεία της συνάρτησης εξέλιξης και του διανύσματος μετατόπισης. Σ' ότι αφορά στο α, παρατηρούμε ότι από τη χρονική συνιστώσα του κάθετου διανύσματος (1.19) (το οποίο όπως προαναφέραμε είναι η τετραταχύτητα[2] ενός παρατηρητή Euler) έχουμε

$$n^t = \frac{1}{\alpha} = \frac{dt}{d\tau} \tag{1.27}$$

$$\Rightarrow d\tau = \alpha dt\ . \tag{1.28}$$

Δηλαδή, η συνάρτηση εξέλιξης μετατρέπει το διάστημα καθολικού χρόνου dt σε διάστημα ίδιου χρόνου $d\tau$ του τοπικού παρατηρητή Euler. Σχετικά με το διάνυσμα β^α, αν αντικαταστήσουμε τη σχέση (1.28) στην (1.26) ($ds^2 = -d\tau^2$) προκύπτει άμεσα ότι

$$\beta^i = -\frac{dx^i}{dt}\ . \tag{1.29}$$

Η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να θεωρήσουμε το διάνυσμα μετατόπισης ως τη σχετική ταχύτητα μεταξύ παρατηρητών Euler και παρατηρητών που βρίσκονται σε ηρεμία στο σύστημα συντεταγμένων x^i των επιφανειών Σ. Η συνάρτηση εξέλιξης και το διάνυσμα μετατόπισης προσδιορίζουν το πως εξελίσσονται οι συντεταγμένες στο χρόνο και υπάρχει ελευθερία στην εκλογή τους, καθώς αντικατοπτρίζουν την ελευθερία που έχουμε στην επιλογή συστήματος συντεταγμένων (*συναρτήσεις βαθμίδας*).

Ένα ακόμη σημαντικό στοιχείο που χρειάζεται στην ανάπτυξη του φορμαλισμού $3+1$ είναι η τριδιάστατη συναλλοίωτη παράγωγος, η οποία απεικονίζει χωρικούς τανυστές σε χωρικούς τανυστές. Συνδέεται με τον τριδιάστατο μετρι-

[2] Η τετραταχύτητα ορίζεται ως $dx^\alpha/d\tau$, όπου τ ο ίδιος χρόνος του παρατηρητή.

κό τανυστή γ_{ab} και ορίζεται από την προβολή της τετραδιάστατης συναλλοίωτης παραγώγου πάνω στις υπερεπιφάνειες Σ.

$$D_a = {\gamma_a}^{\alpha} \nabla_\alpha \tag{1.30}$$

1.3 Εξωτερική καμπυλότητα

Οι εξισώσεις Einstein (1.1) συσχετίζουν συστολές του τετραδιάστατου τανυστή Riemann με τον τανυστή τάσης–ενέργειας–ορμής. Καθώς ο στόχος μας είναι να ξαναγράψουμε αυτές τις εξισώσεις διακρίνοντας το χώρο από τον χρόνο, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τριδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα και άρα θα πρέπει ν' αναλύσουμε τον τανυστή Riemann σε χωρικούς τανυστές. Μια τέτοια ανάλυση θα μας δώσει έναν τριδιάστατο τανυστή Riemann, ο οποίος είναι ένα καθαρά χωρικό γεωμετρικό αντικείμενο και μπορεί να υπολογιστεί από παραγώγους του χωρικού μετρικού τανυστή. Ο τετραδιάστατος τανυστής Riemann όμως είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο του χωροχρόνου και για τον υπολογισμό του απαιτούνται και χρονικές παράγωγοι του τετραδιάστατου μετρικού τανυστή. Άρα, είναι σαφές ότι ο τριδιάστατος τανυστής Riemann δεν περιέχει όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε, παρά μόνο πληροφορίες σχετικά με την καμπυλότητα που έχουν να κάνουν με την ίδια την επιφάνεια Σ, δηλαδή με την *εσωτερική* της γεωμετρία. Πληροφορίες για το τι σχήμα παίρνει αυτή η επιφάνεια μέσα στο χωροχρόνο του οποίου είναι μέρος, μας δίνει ο *τανυστής εξωτερικής καμπυλότητας* K_{ab}.

Η εξωτερική καμπυλότητα έχει να κάνει με το τι συμβαίνει στο κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$ καθώς μετατοπίζεται παράλληλα από ένα σημείο της υπερεπιφάνειας σ' ένα άλλο. Εν γένει, το διάνυσμα που προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση του κάθετου διανύσματος σ' ένα γειτονικό σημείο δεν είναι πλέον κάθετο στην υπερεπιφάνεια. Ο τανυστής εξωτερικής καμπυλότητας αποτελεί ένα μέτρο της μεταβολής του κάθετου διανύσματος όταν αυτό υφίσταται παράλληλη μετατόπιση σε κάποιο άλλο σημείο.

$$K_{ab} = -{\gamma_a}^{\beta} {\gamma_b}^{\gamma} \nabla_\beta n_\gamma \tag{1.31}$$

Εξ' ορισμού ο τανυστής εξωτερικής καμπυλότητας είναι συμμετρικός και πλήρως χωρικός. Επίσης, καθώς είναι μέτρο της μεταβολής του κάθετου *μοναδιαίου* διανύσματος και τα διανύσματα αυτά διαφέρουν μόνο ως προς την κατεύθυνσή τους, η εξωτερική καμπυλότητα μας δίνει πληροφορίες για το κατά πόσο αλλάζει αυτή η κατεύθυνση από σημείο σε σημείο σε μία χωρική υπερεπιφάνεια. Ως αποτέλεσμα, η εξωτερική καμπυλότητα μετρά το ρυθμό παραμόρφωσης μιας υπερεπιφάνειας καθώς αυτή μεταφέρεται κατά μήκος ενός κάθετου διανύσματος. Επίσης σημειώνουμε, ότι το ίχνος της εξωτερικής καμπυλότητας δίνεται από την έκφραση

$$K = K_a{}^a = \gamma^{ab} K_{ab} \tag{1.32}$$

και συνήθως αναφέρεται και ως *μέση καμπυλότητα* (*mean curvature*).

Ένας διαφορετικός τρόπος να γράψουμε την εξωτερική καμπυλότητα είναι να χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο Lie. Συνοπτικά, η παράγωγος Lie κατά μήκος ενός διανυσματικού πεδίου X^a μετρά το κατά πόσο διαφέρουν οι μεταβολές σ' ένα τανυστικό πεδίο κατά μήκος του X^a σε σχέση με έναν απλό, απειροστό μετασχηματισμό συντεταγμένων που «γεννάται» από το X^a. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της παραγώγου Lie σε συνδυασμό με τη σχέση (1.7),

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}} \gamma_{\alpha\beta} = n^\delta \nabla_\delta \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\delta\beta} \nabla_\alpha n^\delta + \gamma_{\delta\alpha} \nabla_\beta n^\delta \tag{1.33}$$

καθώς και το γεγονός ότι η συναλλοίωτη παράγωγος του μετρικού τανυστή $g_{\alpha\beta}$ είναι μηδέν και αξιοποιώντας και τη σχέση $n^\alpha \nabla_\mu n_\alpha = 0$ [3] και τον ορισμό της εξωτερικής καμπυλότητας (1.31) προκύπτει ότι

$$K_{ab} = -\frac{1}{2} \gamma^\alpha{}_a \gamma^\beta{}_b \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \gamma_{\alpha\beta} \ . \tag{1.34}$$

Η σχέση (1.34) αποτελεί μια γεωμετρική γενίκευση της «χρονικής παραγώγου» του χωρικού μετρικού τανυστή και μπορεί να ερμηνευθεί ως η «ταχύτητα» του $\gamma_{\alpha\beta}$ όπως την αντιλαμβάνονται οι παρατηρητές Euler. Ο μετρικός τανυστής $\gamma_{\alpha\beta}$ σε δύο διαφορετικές υπερεπιφάνειες Σ μπορεί να διαφέρει βάσει κάποιου μετασχηματισμού συντεταγμένων. Η σχέση (1.34) όμως τονίζει ότι επιπρόσθετα με τον όποιο μετασχηματισμό συντεταγμένων, ο τανυστής $\gamma_{\alpha\beta}$ μεταβάλλεται ανάλογα με την εξωτερική καμπυλότητα.

1.4 Περιορισμοί Einstein

Ο μετρικός τανυστής γ_{ab} και ο τανυστής εξωτερικής καμπυλότητας δεν μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα. Αντίθετα, θα πρέπει να ικανοποιούν ορισμένους περιορισμούς έτσι ώστε οι χωρικές επιφάνειες να ενσωματώνονται στο χωροχρόνο M. Προκειμένου να εξάγουμε τις σχέσεις που εκφράζουν αυτούς τους περιορισμούς, πρέπει να συσχετίσουμε τον τριδιάστατο τανυστή Riemann $R^a{}_{bcd}$ των υπερεπιφανειών Σ με τον τετραδιάστατο τανυστή Riemann ${}^4R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ του χωροχρόνου M (προς αποφυγή σύγχυσης, στο εξής θα χρησιμοποιούμε όπου χρειάζεται το δείκτη (4) για να δηλώσουμε ότι μια ποσότητα είναι τετραδιάστατη).

[3] Η ιδιότητα αυτή προκύπτει αναπτύσσοντας τη συναλλοίωτη παράγωγο της συνθήκης κανονικοποίησης $n_\alpha n^\alpha = -1$. Η παράγωγος αυτή θα είναι ίση με το μηδέν αφού πρόκειται για παράγωγο βαθμωτού μεγέθους.

Για να γίνει αυτό, χρειάζεται να λάβουμε μια πλήρως χωρική προβολή του ${}^4R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$, καθώς και μία ακόμη προβολή με τον ένα δείκτη να προβάλλεται κατά την κάθετη διεύθυνση. Οι προβολές αυτές δίνονται από τις εξισώσεις *Gauss–Codazzi* και *Codazzi–Mainardi* αντίστοιχα[4], για τη λεπτομερή εξαγωγή των οποίων μπορεί κανείς ν' ανατρέξει στα [3, 24, 11]. Λόγω του ότι η εξαγωγή τους είναι ιδιαίτερα μακροσκελής, εδώ χρησιμοποιούμε κατευθείαν την τελική μορφή των σχέσεων. Οι εξισώσεις *Gauss–Codazzi* λοιπόν, που εκφράζουν την πλήρη προβολή του τανυστή Riemann στις χωρικές υπερεπιφάνειες είναι

$$\gamma^{\alpha}{}_{a}\gamma^{\beta}{}_{b}\gamma^{\gamma}{}_{c}\gamma^{\delta}{}_{d}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{abcd} + K_{ac}K_{bd} - K_{ad}K_{bc} \;, \tag{1.35}$$

ενώ εφαρμόζοντας μία φορά συστολή με το κάθετο διάνυσμα στην προβολή του τανυστή Riemann πάνω στις υπερεπιφάνειες προκύπτουν οι εξισώσεις *Codazzi–Mainardi*

$$\gamma^{\alpha}{}_{a}\gamma^{\beta}{}_{b}\gamma^{\gamma}{}_{c}n^{\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = D_bK_{ac} - D_aK_{bc} \;. \tag{1.36}$$

Σημειώνουμε ότι καθώς ο ${}^4R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ περιλαμβάνει δεύτερες παραγώγους του μετρικού τανυστή ως προς το χρόνο και ο $R^{a}{}_{bcd}$ περιλαμβάνει μόνο χωρικές παραγώγους, το γεγονός ότι στις παραπάνω σχέσεις εμφανίζεται ο τανυστής εξωτερικής καμπυλότητας και οι παράγωγοί του είναι αναμενόμενο.

Εφαρμόζοντας δύο φορές συστολή στη σχέση (1.35) παίρνουμε την παρακάτω έκφραση

$$\gamma^{\alpha\gamma}\gamma^{\beta\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R + K^2 - K_{ab}K^{ab} \;, \tag{1.37}$$

όπου K είναι το ίχνος της εξωτερικής καμπυλότητας. Το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης σε συνδυασμό και με τις σχέσεις (1.7) και (1.1) γράφεται

$$\begin{aligned}\gamma^{\alpha\gamma}\gamma^{\beta\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \left(g^{\alpha\gamma} + n^{\alpha}n^{\gamma}\right)\left(g^{\beta\delta} + n^{\beta}n^{\delta}\right)R_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= R + 2n^{\gamma}n^{\delta}R_{\gamma\delta} \\ &= 2n^{\gamma}n^{\delta}G_{\gamma\delta} \;,\end{aligned} \tag{1.38}$$

όπου $G_{\gamma\delta}$ είναι ο τανυστής Einstein. Επομένως, από τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι

$$2n^{\gamma}n^{\delta}G_{\gamma\delta} = R + K^2 - K_{ab}K^{ab} \tag{1.39}$$

και αν ορίσουμε ως $\rho_E = n^{\alpha}n^{\beta}T_{\alpha\beta}$ την πυκνότητα ενέργειας που μετρούν οι παρατηρητές Euler τοπικά και χρησιμοποιήσουμε την απλή μορφή των εξισώσεων Einstein (1.3) προκύπτει

$$R + K^2 - K_{ab}K^{ab} = 16\pi\rho_E \;. \tag{1.40}$$

[4]Οι εξισώσεις αυτές, στη βιβλιογραφία της διαφορικής γεωμετρίας, αναφέρονται επίσης ως εξισώσεις Gauss και Codazzi αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι αυτή η σχέση δεν περιέχει άμεσα χρονικές παραγώγους και συνεπώς δεν πρόκειται για εξίσωση εξέλιξης αλλά για περιορισμό ο οποίος πρέπει να ικανοποιείται ανά πάσα στιγμή από τη λύση. Η σχέση (1.40) ονομάζεται *Χαμιλτονιανός περιορισμός* ή *περιορισμός της ενέργειας*.

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε συστολή στη σχέση (1.36) και παίρνουμε την παρακάτω έκφραση

$$\gamma^{\alpha}{}_{a}\gamma^{\beta\gamma}n^{\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = D_b K_a{}^{b} - D_a K \ . \tag{1.41}$$

Το αριστερό μέλος της προηγούμενης σχέσης, αξιοποιώντας και τις συμμετρίες του τανυστή ${}^4R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ και τη σχέση (1.1) γράφεται

$$\begin{aligned}
\gamma^{\alpha}{}_{a}\gamma^{\beta\gamma}n^{\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -\gamma^{\alpha}{}_{a}\left(g^{\beta\gamma}+n^{\beta}n^{\gamma}\right)n^{\delta}R_{\beta\alpha\gamma\delta} \\
&= -\gamma^{\alpha}{}_{a}n^{\delta}R_{\alpha\delta}\,\underbrace{-\gamma^{\alpha}{}_{a}n^{\beta}n^{\gamma}n^{\delta}R_{\beta\alpha\gamma\delta}}_{0} \\
&= -\gamma^{\beta}{}_{a}n^{\delta}G_{\beta\delta}
\end{aligned} \tag{1.42}$$

και συνεπώς η σχέση (1.41) παίρνει τη μορφή

$$D_b K_a{}^{b} - D_a K = -\gamma^{\beta}{}_{a}n^{\delta}G_{\beta\delta} \ . \tag{1.43}$$

Αν τώρα στην προηγούμενη σχέση ανεβάσουμε το δείκτη a, χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (1.3) και ορίσουμε ως $j^a = -\gamma^{a}{}_{\alpha}n_{\beta}T^{\alpha\beta}$ την πυκνότητα ορμής όπως μετριέται από τους παρατηρητές Euler, καταλήγουμε στη σχέση

$$D_b\left(K^{ab} - \gamma^{ab}K\right) = 8\pi j^a \ , \tag{1.44}$$

η οποία αποτελεί τον *περιορισμό της ορμής*. Όπως στη σχέση (1.40), έτσι κι εδώ παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν παράγωγοι ως προς το χρόνο και άρα όντως η (1.44) είναι περιορισμός κι όχι δυναμική εξίσωση.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι οι περιορισμοί (1.40) και (1.44), όχι μόνο δεν περιέχουν χρονικές παραγώγους, αλλά είναι επίσης ανεξάρτητοι και από τις συναρτήσεις βαθμίδας α και β^{α}. Αυτό το γεγονός καταδεικνύει ότι οι περιορισμοί Einstein είναι σχέσεις που αναφέρονται αποκλειστικά σε μια δεδομένη υπερεπιφάνεια. Η ύπαρξη των περιορισμών υπονοεί, όπως αναφέραμε και στην αρχή αυτής της ενότητας, ότι στο φορμαλισμό $3+1$ δεν είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε αυθαίρετα τις ποσότητες γ_{ab} και K_{ab} ως αρχικές συνθήκες. Τα αρχικά μας δεδομένα, θα πρέπει να ικανοποιούν *ήδη* τους περιορισμούς διαφορετικά θα λύνουμε κάποιο άλλο πρόβλημα κι όχι τις εξισώσεις Einstein.

1.5 Εξισώσεις εξέλιξης

Έχοντας προσδιορίσει τις εξισώσεις των περιορισμών στην προηγούμενη ενότητα, αυτό που απομένει για να μπορούμε να θέσουμε τις εξισώσεις Einstein σε μορφή προβλήματος Cauchy είναι να βρούμε τις εξισώσεις εξέλιξης για τον τριδιάστατο μετρικό τανυστή γ_{ab} και την εξωτερική καμπυλότητα K_{ab}.

Για την εύρεση της εξίσωσης εξέλιξης του γ_{ab}, χρησιμοποιούμε μία ιδιότητα της παραγώγου Lie σύμφωνα με την οποία, εφόσον το διάνυσμα $\vec{n}$ είναι κάθετο στην υπερεπιφάνεια Σ τότε για κάθε βαθμωτή συνάρτηση ϕ ισχύει η σχέση

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}}\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{\phi}\mathcal{L}_{\phi\mathbf{n}}\gamma_{\alpha\beta} \ .$$

Αν επιλέξουμε ως βαθμωτή συνάρτηση, τη συνάρτηση εξέλιξης α και εφαρμόσουμε την παραπάνω ιδιότητα, τότε έχουμε ότι

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}}\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}_{\alpha\mathbf{n}}\gamma_{\alpha\beta} \ . \tag{1.45}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (1.34) και χρησιμοποιώντας επίσης την (1.14) προκύπτει η εξής έκφραση

$$\begin{aligned} K_{ab} &= -\frac{1}{2}\gamma^{\alpha}{}_{a}\gamma^{\beta}{}_{b}\mathcal{L}_{\mathbf{n}}\gamma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\alpha}\gamma^{\alpha}{}_{a}\gamma^{\beta}{}_{b}\mathcal{L}_{\alpha\mathbf{n}}\gamma_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2\alpha}\gamma^{\alpha}{}_{a}\gamma^{\beta}{}_{b}\left(\mathcal{L}_{\mathbf{t}} - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}}\right)\gamma_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2\alpha}\left[\partial_t\gamma_{ab} - \gamma^{\alpha}{}_{a}\gamma^{\beta}{}_{b}\left(\nabla_{\alpha}\beta_{\beta} + \nabla_{\beta}\beta_{\alpha}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{2\alpha}\left(\partial_t\gamma_{ab} - D_a\beta_b - D_b\beta_a\right) \ , \end{aligned} \tag{1.46}$$

από την οποία μπορούμε να έχουμε άμεσα την εξίσωση εξέλιξης για τον τριδιάστατο μετρικό τανυστή

$$\partial_t\gamma_{ab} = -2\alpha K_{ab} + D_a\beta_b + D_b\beta_a \ . \tag{1.47}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για την εξαγωγή της παραπάνω σχέσης εξέλιξης χρησιμοποιήσαμε αποκλειστικά γεωμετρικές έννοιες και όχι τις εξισώσεις πεδίου του Einstein. Θα μπορούσαμε να πούμε λοιπόν ότι η σχέση (1.47) αποτελεί μία κινηματική εξίσωση, ενώ η δυναμική του συστήματος εμπεριέχεται στις εξισώσεις εξέλιξης της εξωτερικής καμπυλότητας.

Προκειμένου να βρούμε αυτές τις εξισώσεις, μας είναι απαραίτητη μία προβολή του τετραδιάστατου τανυστή Riemann πάνω στις υπερεπιφάνειες Σ αφού πρώτα έχει υποστεί συστολή *δύο* φορές με το κάθετο διάνυσμα. Υπενθυμίζουμε ότι μέχρι στιγμής έχουμε πάρει μία πλήρως χωρική προβολή του ${}^4R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ και μία προβολή του με προηγούμενη συστολή με το κάθετο διάνυσμα. Η προβολή που παίρνουμε τώρα με τους δύο δείκτες του τανυστή Riemann να προβάλλονται στην κάθετη διεύθυνση, είναι η τελευταία που μπορούμε να πάρουμε διότι όλες οι υπόλοιπες πιθανές προβολές είναι εκ ταυτότητος ίσες με το μηδέν. Αυτό συμβαίνει λόγω των συμμετριών του τανυστή Riemann. Μία ανάλυση λοιπόν του τετραδιάστατου Riemann σε χωρικά και κάθετα μέρη περιλαμβάνει αυτούς τους τρεις διαφορετικούς τύπους προβολών. Η συγκεκριμένη προβολή αυτή, δίνεται από την *εξίσωση Ricci*, την οποία επίσης δεν αποδεικνύουμε, αλλά χρησιμοποιούμε κατευθείαν. Για λεπτομέρειες σχετικά με τον τρόπο εξαγωγής της μπορεί κανείς ν' ανατρέξει στο [3].

$$\gamma^{\alpha}{}_{a}\gamma^{\gamma}{}_{c}n^{\beta}n^{\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}K_{ab} + K_{ac}K^{c}{}_{b} + \frac{1}{\alpha}D_aD_b\alpha \tag{1.48}$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση περιέχει και τη συνάρτηση εξέλιξης α, ενώ υπάρχει και όρος με την παράγωγο Lie της εξωτερικής καμπυλότητας κατά μήκος της κάθετης διεύθυνσης, γεγονός που αντιστοιχεί σε χρονική εξέλιξη.

Εφαρμόζοντας συστολή στη σχέση (1.35), χρησιμοποιώντας και τον τριδιάστατο μετρικό τανυστή σε ανταλλοίωτη μορφή και αξιοποιώντας και τις συμμετρίες του τανυστή Riemann προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\gamma^{\alpha}{}_{a}\gamma^{\beta}{}_{b}\left(n^{\gamma}n^{\delta}R_{\alpha\gamma\beta\delta} + R_{\alpha\beta}\right) = R_{ab} + KK_{ab} - K_{ac}K^{c}{}_{b}\ . \tag{1.49}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση Ricci και χρησιμοποιώντας και τις σχέσεις (1.14) και (1.45) για ν' αντικαταστήσουμε την παράγωγο Lie στην σχέση (1.48) έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbf{t}}K_{ab} - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}}K_{ab} =& \alpha\left(-\gamma^{\alpha}{}_{a}\gamma^{\beta}{}_{b}R_{\alpha\beta} + R_{ab} + KK_{ab} - 2K_{ac}K^{c}{}_{b}\right)\\ &- D_aD_b\alpha\end{aligned} \tag{1.50}$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Einstein (1.2) για να διώξουμε τον τανυστή Ricci $R_{\alpha\beta}$ και αναλύσουμε τις παραγώγους Lie στο αριστερό μέλος της προηγούμενης σχέσης προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\partial_t K_{ab} =& - D_aD_b\alpha + \alpha\left(R_{ab} + KK_{ab} - 2K_{ac}K^{c}{}_{b}\right)\\ &+ \beta^c D_c K_{ab} + K_{ac}D_b\beta^c + K_{bc}D_a\beta^c\\ &- 8\pi\alpha\left[S_{ab} - \frac{\gamma_{ab}}{2}\left(S - \rho_E\right)\right]\ ,\end{aligned} \tag{1.51}$$

όπου $S_{ab} = \gamma^{\alpha}{}_{a}\gamma^{\beta}{}_{b}T_{\alpha\beta}$ είναι ο τανυστής τάσης μετρούμενος από παρατηρητές Euler και S είναι το ίχνος του. Εδώ αναφέρουμε και μία χρήσιμη συστολή της προηγούμενης εξίσωσης εξέλιξης που μας δίνει ουσιαστικά τη χρονική εξέλιξη της μέσης καμπυλότητας K.

$$\partial_t K = -D^2\alpha + \alpha\left[K_{ab}K^{ab} + 4\pi\left(\rho_E + S\right)\right] + \beta^c D_c K \tag{1.52}$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι για τις συναρτήσεις βαθμίδας α και β^α δεν υπάρχουν εξισώσεις εξέλιξης, διότι οι συγκεκριμένες ποσότητες αντικατοπτρίζουν την ελευθερία που έχουμε να επιλέξουμε τις συντεταγμένες που θα χρησιμοποιήσουμε.

1.6 Εξέλιξη με και χωρίς περιορισμούς

Στις δύο προηγούμενες ενότητες διακρίναμε τις εξισώσεις Einstein σε εξισώσεις εξέλιξης και σε περιορισμούς. Ένα σημαντικό ερώτημα που τίθεται σχετικά με αυτή τη διάκριση, αφορά το αν οι περιορισμοί συνεχίζουν να ικανοποιούνται κατά τη διάρκεια της εξέλιξης του συστήματος αν υποθέσουμε ότι ικανοποιούνται αρχικά. Αποδεικνύεται, ότι οι ταυτότητες Bianchi

$$\nabla_\epsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\delta R_{\alpha\beta\epsilon\gamma} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta\epsilon} = 0$$

μας εξασφαλίζουν ακριβώς αυτό το ζητούμενο, όμως πρέπει να έχουμε υπόψιν ότι αυτό αφορά τις *ακριβείς λύσεις*. Εφόσον όμως μας ενδιαφέρουν αριθμητικές προσομοιώσεις το πρόβλημα αυτό παραμένει και εξαρτάται κατά βάση από την ποιότητα της αριθμητικής υλοποίησης του προβλήματος.

Στην αντιμετώπιση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, θα πρέπει να επιλέξουμε αν θα βασίσουμε την αριθμητική επίλυση στις εξισώσεις περιορισμών ή στις εξισώσεις εξέλιξης. Υπάρχουν δύο βασικές δυνατότητες, εκ των οποίων η πρώτη συνίσταται στο να ξεκινήσουμε την αριθμητική λύση χρησιμοποιώντας ως *αρχικά δεδομένα* μία λύση των εξισώσεων περιορισμών και στη συνέχεια η χρονική εξέλιξη αυτών των δεδομένων να γίνει λύνοντας τις εξισώσεις εξέλιξης για τις ποσότητες γ_{ab} και K_{ab}. Σ' αυτήν την περίπτωση, έχουμε τη λεγόμενη *ελεύθερη εξέλιξη* ή εξέλιξη χωρίς περιορισμούς καθώς οι περιορισμοί απλώς παρακολουθούνται κατά τη διάρκεια της εξέλιξης και ελέγχεται το κατά πόσον παραβιάζονται. Έτσι παίρνουμε μια ιδέα της ακρίβειας της προσομοίωσης που κάνουμε. Η δεύτερη δυνατότητα που έχουμε, είναι να λύσουμε μερικές ή όλες τις εξισώσεις των περιορισμών *σε κάθε χρονικό βήμα* για ένα συγκεκριμένο *υποσύνολο* των στοιχείων του τριδιάστατου μετρικού τανυστή και της εξωτερικής καμπυλότητας. Τα υπόλοιπα στοιχεία των γ_{ab} και K_{ab} εξελίσσονται χρονικά χρησιμοποιώντας κανονικά τις εξισώσεις εξέλιξης.

Εκτός από τις δύο προαναφερθείσες δυνατότητες, υπάρχει και μία ακόμη εναλλακτική που ονομάζεται *εξέλιξη με περιορισμό του μετρικού τανυστή* (*con-*

strained metric evolution). Σ' αυτήν την περίπτωση, επιβάλλουμε μία πρόσθετη συνθήκη στον τριδιάστατο μετρικό τανυστή και απαιτούμε την ικανοποίησή της καθ' όλη τη διάρκεια της χρονικής εξέλιξης. Ένα παράδειγμα τέτοιας συνθήκης αποτελεί η επιβολή της συνθήκης χωρικά σύμμορφης επιπεδότητας (*conformal flatness*) η οποία απλοποιεί σε σημαντικό βαθμό τις εξισώσεις που έχουμε να λύσουμε[5]. Ωστόσο, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η επιβολή πρόσθετων συνθηκών στο μετρικό τανυστή γ_{ab}, εν γένει, δεν συμβαδίζει με τις εξισώσεις πεδίου του Einstein. Επομένως, η λύση που παίρνουμε μ' αυτόν τον τρόπο είναι *προσέγγιση* της αριθμητικής λύσης που προκύπτει λύνοντας αποκλειστικά το πλήρες σύστημα εξισώσεων Einstein χωρίς να εισάγουμε άλλες υποθέσεις. Το αν μια τέτοια προσέγγιση είναι αρκετά καλή ή όχι δεν μπορεί να απαντηθεί εκ των προτέρων, αλλά εξαρτάται από το υπό μελέτη φυσικό σύστημα και τις πληροφορίες που στοχεύουμε να εξάγουμε από την αριθμητική μας προσομοίωση.

Η εξέλιξη ενός συστήματος λύνοντας τις εξισώσεις περιορισμών σε κάθε χρονικό βήμα λειτουργεί καλύτερα σε συστήματα με υψηλό βαθμό συμμετρίας, όπως η σφαιρική. Είναι όμως αρκετά δυσκολότερο να χρησιμοποιηθεί για προσομοιώσεις σε τρεις διαστάσεις. Επίσης, η μελέτη του κατά πόσον το σύστημα των εξισώσεων είναι *καλώς ορισμένο* είναι πιο δύσκολη στην περίπτωση μιας μεθόδου με περιορισμούς. Τέλος, οι περιορισμοί είναι ουσιαστικά ελλειπτικές εξισώσεις οι οποίες έχουν υψηλότερο υπολογιστικό κόστος για να λυθούν αριθμητικά στις τρεις διαστάσεις σε σχέση με μια μέθοδο ελεύθερης εξέλιξης. Κατά συνέπεια, πολλές φορές είναι προτιμότερο να επιλέξουμε την ελεύθερη εξέλιξη του συστήματος, χωρίς όμως αυτό να είναι απόλυτο. Το φυσικό σύστημα που μελετούμε, οι υπολογιστικοί πόροι που έχουμε στη διάθεσή μας και η επιθυμητή ακρίβεια των αριθμητικών λύσεων είναι οι βασικοί παράγοντες που θα μας υπαγορεύσουν την κατάλληλη μέθοδο.

[5] Στην παρούσα εργασία γίνεται ακριβώς αυτή η επιλογή.

Κεφάλαιο 2

Η προσέγγιση CFC

2.1 Επισκόπηση

Η *προσέγγιση χωρικά σύμμορφης επιπεδότητας* (*Conformal Flatness Condition*, στο εξής CFC) είναι μια συνθήκη σύμφωνα με την οποία ο τριδιάστατος μετρικός τανυστής του φορμαλισμού $3+1$ είναι πάντοτε σύμμορφα επίπεδος.

$$\gamma_{ab} = \psi^4 n_{ab} \tag{2.1}$$

Ο όρος *σύμμορφη επιπεδότητα* σημαίνει ότι η βαρύτητα επηρεάζει τις μετρήσεις ίδιων μηκών ισοτροπικά. Αυτή είναι η προσέγγιση που υιοθετούμε για το πλήρες σύστημα, παρά το γεγονός ότι το σχήμα του αστέρα παραμορφώνεται λόγω περιστροφής. Στην παραπάνω σχέση, ο σύμμορφος παράγοντας ψ είναι μια θετική βαθμωτή συνάρτηση που περιγράφει το λόγο μεταξύ της κλίμακας μήκους στον καμπύλο χώρο ως προς τον επίπεδο χώρο. Επίσης, $n_{ab} = \delta_{ab}$ είναι ο μετρικός τανυστής του επίπεδου, τριδιάστατου χώρου Minkowski, όπου δ_{ab} είναι το δέλτα του Kronecker. Επιλέγοντας σφαιρικές συντεταγμένες, έχουμε ότι $n_{ab} = \mathrm{diag}[1, r^2, r^2 \sin^2\theta]$ και συνεπώς

$$\gamma_{ab} = \psi^4 n_{ab} = \psi^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^4 & 0 & 0 \\ 0 & \psi^4 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \psi^4 r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} . \tag{2.2}$$

Στην προσέγγιση CFC, ο μετρικός τανυστής του χωροχρόνου περιγράφεται συναρτήσει του σύμμορφου παράγοντα ψ, του διανύσματος μετατόπισης β^α και της συνάρτησης εξέλιξης α. Αξιοποιώντας και τη σχέση (1.24) προκύπτει ότι ένας χωροχρόνος που δεν αποκλίνει ιδιαίτερα από τη σφαιρική συμμετρία θα πρέπει να προσεγγίζεται ικανοποιητικά από το μετρικό τανυστή

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_i \beta^i & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \psi^4 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \psi^4 r^2 & 0 \\ \beta_3 & 0 & 0 & \psi^4 r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Για δεδομένες πηγές, οι ποσότητες ψ και β^α, μπορούν να προσδιοριστούν ανά πάσα χρονική στιγμή (δηλαδή σε κάθε χρονικό βήμα) λύνοντας τους περιορισμούς ενέργειας (Hamiltonian) και ορμής (Ενότητα 1.4), αντί για το δυναμικό μέρος των εξισώσεων. Η συνάρτηση εξέλιξης α μπορεί να προσδιοριστεί επιλέγοντας τη *συνθήκη μέγιστης διαμέρισης* (*maximal slicing*), $K = 0$, ως συνθήκη βαθμίδας, όπου K είναι το ίχνος της εξωτερικής καμπυλότητας. Σημειώνουμε ότι η επιλογή $K = 0$ για μία συγκεκριμένη χωρική υπερεπιφάνεια (π.χ την αρχική) σημαίνει ότι η υπερεπιφάνεια έχει μέγιστο όγκο. Αν υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει μόνο για μία υπερεπιφάνεια αλλά για κάθε χρονική στιγμή, τότε θα πρέπει να ισχύει επίσης, $\partial_t K = 0$.

Η τεχνική που περιγράψαμε παραπάνω προτάθηκε από τον Isenberg [13] και τους Wilson και Mathews [25] ως μία μέθοδος που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την εξέλιξη δεδομένων από διπλά συστήματα αστέρων νετρονίων δημιουργώντας μια σειρά λύσεων ισορροπίας, αποφεύγοντας τη λύση των εξισώσεων εξέλιξης σε πλήρη ΓΘΣ. Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε συστήματα που είτε ισορροπούν είτε βρίσκονται πολύ κοντά στην ισορροπία. Εφόσον ικανοποιείται αυτή η συνθήκη, αναμένεται ότι μπορούμε να έχουμε μια ικανοποιητική περιγραφή του συστήματος χρησιμοποιώντας ένα υποσύνολο των εξισώσεων Einstein.

Στην περίπτωση ισορροπίας, όπως για ένα μεμονωμένο περιστρεφόμενο αστέρα, υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο τόσο η πρώτη όσο και η δεύτερη χρονική παράγωγος του μετρικού τανυστή είναι μηδέν. Αυτό, στο φορμαλισμό $3+1$, σημαίνει ότι οι χρονικές παράγωγοι του τριδιάστατου μετρικού τανυστή γ_{ab} και της εξωτερικής καμπυλότητας K_{ab} είναι μηδέν. Στην περίπτωση που το σύστημα βρίσκεται κοντά στην ισορροπία (quasi–equilibrium), όπως για ένα διπλό σύστημα εφόσον η εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας είναι μικρή, οι χρονικές παράγωγοι είναι μικρές και συνεπώς τα στοιχεία του μετρικού τανυστή και της εξωτερικής καμπυλότητας δε θα μεταβληθούν ιδιαίτερα σε σχέση με τις αρχικές τους τιμές. Η προσέγγιση που κάνουμε συνίσταται στο να θέσουμε τις χρονικές παραγώγους *ακριβώς* ίσες με το μηδέν σ' ένα επιλεγμένο υποσύνολο των εξισώσεων Einstein και ν' αγνοήσουμε τις υπόλοιπες δυναμικές εξισώσεις. Ως αποτέλεσμα, παίρνουμε ένα μικρότερο σύστημα εξισώσεων πεδίου το οποίο μπορούμε να χειριστούμε ευκολότερα.

Ως σημείωση ιστορικού ενδιαφέροντος αναφέρουμε ότι πρώτος ο Isenberg, ως υποψήφιος διδάκτορας υπό την επίβλεψη του Misner, ανέπτυξε το θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου CFC το 1978. Ωστόσο, η σχετική εργασία που υπέβαλλε στο Physical Review D δεν δημοσιεύτηκε, διότι δεν είχε προχωρήσει στην αριθμητική υλοποίηση της μεθόδου. Η μόνη μνεία στη δουλειά του αυτή, υπήρχε ως σύντομη αναφορά στο τέλος ενός άρθρου που έγραψε μαζί με τον Nester για το Einstein Centenary volume "General relativity and Gravitation" (1980). Μερικά χρόνια αργότερα, ο Friedman που είχε υπόψιν το άρθρο των Isenberg και Nester, διαπίστωσε ότι η μέθοδος των Mathews και Wilson η οποία είχε παρουσιαστεί εν τω μεταξύ, παρουσίαζε πολλές ομοιότητες με του Isenberg. Πρότεινε λοιπόν η μέθοδος CFC να ονομάζεται επίσης και IWM (Isenberg–Wilson–Mathews). Επίσης παρότρυνε τον Isenberg να δημοσιεύσει την αρχική εργασία του 1978 ώστε να υπάρχει διαθέσιμη κάποια σχετική αναφορά στον Isenberg και αυτό τελικά έγινε [13].

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε τις βασικές εξισώσεις που έχουμε να λύσουμε στην προσέγγιση CFC. Σημειώνουμε ότι όταν έχουμε να κάνουμε με σύμμορφους μετασχηματισμούς, όπως στη σχέση (2.1), μας είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε πως μετασχηματίζονται βαθμωτά, διανυσματικά και τανυστικά μεγέθη καθώς και άλλες ποσότητες που σχετίζονται με τον τριδιάστατο μετρικό τανυστή. Για μια πλήρη μαθηματική ανάπτυξη του συγκεκριμένου θέματος, μπορεί κανείς ν' ανατρέξει στο [24, Appendix D] ή για μια πιο συνοπτική παρουσίαση στο [9, Section 3.3.2]. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε κατευθείαν τις σχέσεις που χρειαζόμαστε χωρίς απόδειξη.

Από τον περιορισμό της ενέργειας (1.40), τη συνθήκη μέγιστης διαμέρισης και από τον ορισμό της βαθμωτής καμπυλότητας για τη συγκεκριμένη μορφή του μετρικού τανυστή,

$$R = -\frac{8}{\psi^5}\nabla^2\psi \ , \tag{2.4}$$

έχουμε ότι

$$\nabla^2\psi = -\psi^5\left(\frac{1}{8}K_{ab}K^{ab} + 2\pi\rho_E\right) \ . \tag{2.5}$$

Στην παραπάνω σχέση, $\rho_E = n^\alpha n^\beta T_{\alpha\beta}$ είναι η πυκνότητα ενέργειας όπως μετριέται από έναν παρατηρητή με τετραταχύτητα n^α. Τόσο στη σχέση (2.5) όσο και στα επόμενα, χρειαζόμαστε και μία έκφραση για την εξωτερική καμπυλότητα K_{ab}. Γι' αυτό επιστρέφουμε στη εξίσωση χρονικής εξέλιξης του γ_{ab} (1.47)

$$\partial_t\gamma_{ab} = -2\alpha K_{ab} + D_a\beta_b + D_b\beta_a \ ,$$

η οποία μπορεί ν' αναλυθεί σε μία εξίσωση για το ίχνος της

$$\partial_t \ln\gamma^{1/2} = -\alpha K + D_c\beta^c \ , \tag{2.6}$$

και μία για το υπόλοιπο μέρος

$$\gamma^{1/3}\partial_t(\gamma^{-1/3}\gamma_{ab}) = -2\alpha\left(K_{ab} - \frac{1}{3}\gamma_{ab}K\right) + D_a\beta_b + D_b\beta_a - \frac{2}{3}\gamma_{ab}D_c\beta^c\ . \quad (2.7)$$

Η σχέση (2.6) προκύπτει εφαρμόζοντας τη σχέση του Jacobi για την παράγωγο της ορίζουσας ενός πίνακα $d[\det(A)] = tr[\mathrm{adj}(A)d(A)]$ στον τανυστή γ_{ab}, ενώ η σχέση (2.7) προκύπτει αφαιρώντας από την (1.47) ένα πολλαπλάσιο της (2.6). Καθώς έχουμε υποθέσει ότι ο τριδιάστατος μετρικός τανυστής είναι σύμμορφα επίπεδος ισχύει ότι $\partial_t(\gamma^{-1/3}\gamma_{ab}) = 0$. Συνεπώς από την (2.7) κι επειδή επίσης $K = 0$, έχουμε ότι

$$K_{ab} = \frac{1}{2\alpha}\left(D_a\beta_b + D_b\beta_a - \frac{2}{3}\gamma_{ab}D_c\beta^c\right) \quad (2.8)$$

Από τον περιορισμό της ορμής (1.44) και τη συνθήκη $K = 0$ έχουμε

$$D_bK^{ab} = 8\pi j^a\ , \quad (2.9)$$

όπου $j^a = -\gamma^a{}_\alpha n_\beta T^{\alpha\beta}$ είναι η πυκνότητα ορμής όπως μετριέται από έναν παρατηρητή με τετραταχύτητα n^α. Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς που αναφέρονται στα [24, 9], η παράγωγος της εξωτερικής καμπυλότητας γράφεται ως εξής

$$D_bK^{ab} = \psi^{-10}\nabla_b(\psi^{10}K^{ab}) \quad (2.10)$$

και τελικά συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.8) και (2.10), ο περιορισμός για την ορμή (2.9) γράφεται ως

$$\begin{aligned}\nabla^2\beta^a + \frac{1}{3}\nabla^a(\nabla_c\beta^c) =& \nabla_b\ln\left(\psi^{-6}|\alpha|\right)\times\left(\nabla^b\beta^a + \nabla^a\beta^b - \frac{2}{3}n^{ab}\nabla_c\beta^c\right)\\ &+ 16\pi\alpha\psi^4 j^a\ . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.52) και υποθέτοντας ότι $\partial_tK = 0$, δηλαδή θεωρώντας ότι έχουμε διατήρηση της συνθήκης μέγιστης διαμέρισης σε όλες τις χρονικές στιγμές, παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση για τη συνάρτηση εξέλιξης

$$\nabla^2(\alpha\psi) = \alpha\psi^5\left[\frac{7}{8}K_{ab}K^{ab} + 2\pi\left(\rho_E + 2S\right)\right]\ , \quad (2.12)$$

όπου $S = \gamma_{ab}S^{ab}$ και $S^{ab} = \gamma^a{}_\alpha\gamma^b{}_\beta T^{\alpha\beta}$ είναι ο τανυστής τάσης μετρούμενος από παρατηρητή με τετραταχύτητα n^α.

Οι εξισώσεις (2.5), (2.11) και (2.12) αποτελούν το σύστημα που έχουμε να λύσουμε στην προσέγγιση CFC. Στην περίπτωση ενός μεμονωμένου, αξονικά συμμετρικού αστέρα σε σφαιρικές συντεταγμένες, το διάνυσμα μετατόπισης β^α έχει όλες του τις συνιστώσες ίσες με μηδέν εκτός της β^ϕ. Τότε έχουμε

$$K_{ab}K^{ab} = \frac{\sin^2\theta}{2\alpha^2}\left[\left(r\partial_r\beta^\phi\right)^2 + \left(\partial_\theta\beta^\phi\right)^2\right] . \tag{2.13}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω σχέση σε συνδυασμό με τις (2.5), (2.11) και (2.12) το σύστημα των εξισώσεων που έχουμε να λύσουμε στην προσέγγιση CFC εξειδικεύεται για την περίπτωση μεμονωμένου, αξονικά συμμετρικού αστέρα και για δεδομένες πηγές ρ_E και j_ϕ έχουμε

$$\nabla^2\psi = -\psi^5\left\{\frac{\sin^2\theta}{16\alpha^2}\left[\left(r\partial_r\beta^\phi\right)^2 + \left(\partial_\theta\beta^\phi\right)^2\right] + 2\pi\rho_E\right\} \tag{2.14}$$

$$\nabla^2\left(\alpha\psi\right) = \alpha\psi^5\left\{\frac{7\sin^2\theta}{16\alpha^2}\left[\left(r\partial_r\beta^\phi\right)^2 + \left(\partial_\theta\beta^\phi\right)^2\right] + 2\pi(\rho_E + 2S)\right\} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{2\cot\theta}{r^2}\partial_\theta\right)\beta^\phi =& \partial_r \ln\left(\psi^{-6}|\alpha|\right)\partial_r\beta^\phi \\ &+ \frac{1}{r^2}\partial_\theta \ln\left(\psi^{-6}|\alpha|\right)\partial_\theta\beta^\phi + \frac{16\pi\alpha}{r^2\sin^2\theta}j_\phi .\end{aligned} \tag{2.16}$$

2.2 Εφαρμογές και ακρίβεια

Η μέχρι σήμερα εικόνα από τις εφαρμογές της CFC έχει δείξει ότι η τελευταία μπορεί να δώσει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα ως προσέγγιση πολύπλοκων συστημάτων, για τα οποία κάτι τέτοιο πιθανόν δε θα ήταν αναμενόμενο εξ' αρχής. Η CFC έχει δοκιμαστεί σε αρκετές περιπτώσεις, αλλά σίγουρα όχι τόσο εκτεταμένα όσο άλλα αριθμητικά σχήματα όπως το BSSNOK. Εν γένει, η ακρίβειά της κυμαίνεται από ικανοποιητική έως εξαιρετική ανάλογα και με το πόσο ακραία μοντέλα κατασκευάζουμε. Γι' αυτό το λόγο αποτελεί αντικείμενο έντονης μελέτης έτσι ώστε να εξεταστεί η χρησιμότητά της και σε άλλους τομείς αστροφυσικού ενδιαφέροντος. Στη συνέχεια αναφέρουμε ενδεικτικά ορισμένα προβλήματα στα οποία εφαρμόστηκε η CFC με πολύ καλά αποτελέσματα.

Όταν προτάθηκε η μέθοδος CFC από τον Wilson, η αρχική ιδέα ήταν να εφαρμοστεί για την εξέλιξη δεδομένων από διπλά συστήματα αστέρων νετρονίων, ενώ θεωρούνταν πιθανή και η επέκτασή της σε διπλά συστήματα μελανών οπών. Οι Cook, Shapiro και Teukolsky, διαπίστωσαν την ανάγκη να μελετηθεί η προταθείσα μέθοδος σε κάποιο απλούστερο σύστημα και συγκεκριμένα για την περίπτωση *μεμονωμένων περιστρεφόμενων αστέρων* [8]. Ένα τέτοιο σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και άρα η προσέγγιση CFC *πρέπει* να λειτουργεί ικανοποιητικά σ' αυτήν την απλή περίπτωση, προκειμένου να «πειστεί» κανείς για τη χρησιμότητά της σε άλλα πιο πολύπλοκα συστήματα. Στη συγκεκριμένη εργασία, οι συγγραφείς αρχικά κατασκευάζουν μια ακολουθία μοντέλων ισορροπίας σταθερής μάζας ηρεμίας και αυξανόμενης στροφορμής από την πολυτροπική καταστατική εξίσωση με $N = 0.5$ λύνοντας το πλήρες σύστημα εξισώσεων Einstein. Κάθε μέλος της ακολουθίας χαρακτηρίζεται από δύο παράγοντες: το λόγο της πολικής προς την ισημερινή ακτίνα και την κεντρική πυκνότητα μάζας ηρεμίας. Στη συνέχεια υπολογίζουν μια προσεγγιστική ακολουθία με τις ίδιες τιμές για τις δύο αυτές παραμέτρους για κάθε μοντέλο και συγκρίνουν διάφορα μεγέθη μεταξύ των αντίστοιχων μοντέλων (όπως τα στοιχεία του μετρικού τανυστή, τη συνολική μάζα και στροφορμή κλπ). Τα αποτελέσματά τους είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικά για την ακρίβεια της προσέγγισης CFC, καθώς τα σχετικά σφάλματα που αναφέρουν είναι μικρότερα από 2% υποθέτοντας ομογενή περιστροφή, ενώ το σφάλμα δεν υπερέβη το 5% σε καμία από τις ποσότητες που έλεγξαν.

Ένα άλλο πρόβλημα αστροφυσικού ενδιαφέροντος είναι η αξιοπιστία της προσέγγισης CFC στην περίπτωση *συγκλίνοντος ζεύγους αστέρων νετρονίων* (*inspiral of binary neutron stars*). Οι Miller και Suen [16] ασχολήθηκαν μεταξύ άλλων και με το συγκεκριμένο ζήτημα μελετώντας διπλά συστήματα αστέρων νετρονίων ίδιας μάζας από την πολυτροπική καταστατική εξίσωση με $N = 1$ σε σύγχρονη περιστροφή (corotating). Η παράμετρος που μετέβαλλαν σ' αυτά τα συστήματα ήταν η απόσταση μεταξύ των αστέρων. Για την αξιολόγηση της ποιότητας της προσέγγισης CFC κατασκευάζουν τη διαγνωστική ποσότητα $\langle H \rangle$. Για να καταλήξουν στον ορισμό της $\langle H \rangle$, ξεκινούν από τον τανυστή Bach B_{ijk} (ο οποίος μηδενίζεται στη CFC) και παίρνουν τον τανυστή Cotton–York, $H_{ij} = \epsilon^{mn}{}_{j} B_{mni}$. Στη συνέχεια ορίζουν το βαθμωτό μέγεθος H ως τη norm πίνακα του τανυστή H_{ij}[6] κανονικοποιημένη με το μέγεθος της συναλλοίωτης παραγώγου του τριδιάστατου τανυστή Ricci. Η ποσότητα αυτή ολοκληρώνεται στο εσωτερικό του αστέρα και στη συνέχεια λαμβάνεται ο σταθμισμένος μέσος όρος του H ως προς τη μάζα ηρεμίας, καταλήγοντας τελικά στη διαγνωστική ποσότητα $\langle H \rangle$. Τα δεδομένα τα οποία εξελίσσουν, αρχικά ικανοποιούν τη συνθήκη σύμμορφης επιπεδότητας και συνεπώς η ποσότητα $\langle H \rangle$ ξεκινά από την τιμή μηδέν. Σε όλες τις περιπτώσεις που αναφέρουν, η ποσότητα $\langle H \rangle$ αυξάνεται από το μηδέν μέχρι μία μέγιστη τιμή σ' ένα κλάσμα μιας τροχιακής περιόδου και στη συνέχεια μειώνεται σταδιακά. Η μέγιστη τιμή που παρατηρείται συνδέεται με το πόσο κοντά είναι τα μέλη του διπλού συστήματος και είναι μεγαλύτερη για τα «στενότερα» συστήματα, χωρίς ωστόσο να υπερβαίνει το 5%. Συνεπώς, η προσέγγιση CFC μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά το χωροχρόνο ενός τέτοιου διπλού συστήματος τουλάχιστον κατά τη φάση της σύγκλισης.

Οι Ott et al [19] μελέτησαν τη βαρυτική κατάρρευση πυρήνων σιδήρου περι-

[6] Η norm πίνακα του τανυστή H_{ij} ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της μέγιστης ιδιοτιμής της έκφρασης $H_{ij} H^{j}{}_{k}$.

στρεφόμενων αστέρων υιοθετώντας μια καταστατική εξίσωση διακριτής θερμοκρασίας και λαμβάνοντας υπόψιν την αρπαγή ηλεκτρονίων καθώς και την εκπομπή νετρίνο κατά τη διάρκεια της κατάρρευσης. Υποθέτοντας ήπια διαφορική περιστροφή, υπολόγισαν την εξέλιξη του συστήματος τόσο σε πλήρη ΓΘΣ με βάση την αριθμητική μέθοδο BSSNOK, όσο και στην προσέγγιση CFC. Το σημείο στο οποίο εστίασαν ήταν η εκπομπή βαρυτικών κυμάτων από τα στάδια της κατάρρευσης, της αναπήδησης του πυρήνα και των στιγμών αμέσως μετά την αναπήδηση. Οι κυματομορφές που υπολόγισαν από την πλήρως σχετικιστική προσομοίωση παρουσιάζουν πολύ καλή συμφωνία με τις κυματομορφές που εξήγαγαν χρησιμοποιώντας τον τύπο τετραπολικής ροπής στην προσομοίωση που βασιζόταν στη CFC. Συγκεκριμένα, οι φάσεις των κυματομορφών ταιριάζουν σχεδόν *απόλυτα*, ενώ στα πλάτη τους παρατηρούνται μικρές αποκλίσεις μερικά msec μετά την αναπήδηση του πυρήνα. Επομένως, η προσέγγιση CFC παρέχει ικανοποιητική ακρίβεια για τη μελέτη υπερκαινοφανών από κατάρρευση πυρήνων, τουλάχιστον όταν το αποτέλεσμα της κατάρρευσης είναι αστέρας νετρονίων.

Όσον αφορά στην αξιολόγηση της ακρίβειας της προσέγγισης CFC υπάρχουν δύο βασικές δυνατότητες. Η πρώτη είναι να γίνει άμεσα, συγκρίνοντας τις αριθμητικές λύσεις που παίρνουμε με την υπόθεση CFC και τις λύσεις σε πλήρη ΓΘΣ. Βρίσκοντας τα σχετικά σφάλματα για τα διάφορα χαρακτηριστικά μεγέθη του υπολογιζόμενου μοντέλου μπορούμε να εξάγουμε απευθείας πληροφορίες για την ποιότητα της προσέγγισής μας. Ακόμη, έχουμε τη δυνατότητα να διακρίνουμε αν η προσέγγιση που κάνουμε λειτουργεί το ίδιο ικανοποιητικά για όλα τα χαρακτηριστικά μεγέθη του μοντέλου που μελετούμε και να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα. Εναλλακτικά, ως μέτρο της ακρίβειας της CFC, μπορούμε να αξιοποιήσουμε, όπως προαναφέραμε, τον τανυστή Bach ο οποίος έχει την ιδιότητα να μηδενίζεται στην προσέγγιση αυτή. Ο τανυστής Bach υπολογίζεται στις λύσεις πλήρους ΓΘΣ και εφόσον βρίσκεται αρκετά κοντά στο μηδέν, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η προσέγγιση CFC περιγράφει ικανοποιητικά το σύστημά μας. Θα πρέπει, ωστόσο, να σημειώσουμε ότι σ' αυτήν την περίπτωση μια βαθμονόμηση είναι απαραίτητη έτσι ώστε να μην υπάρχει ασάφεια στην προαναφερθείσα φράση «αρκετά κοντά στο μηδέν». Τόσο η μία όσο και η άλλη δυνατότητα για την αξιολόγηση της ακρίβειας της προσέγγισης CFC χρησιμοποιούνται εξίσου στους υπολογιστικούς κώδικες και τη σχετική βιβλιογραφία.

2.3 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα

Το προφανές μεινονέκτημα της προσέγγισης CFC είναι ακριβώς το γεγονός ότι πρόκειται για *προσέγγιση* κι όχι για την ακριβή λύση. Επίσης σε κάθε χρονικό βήμα έχουμε να λύσουμε ελλειπτικές εξισώσεις, το οποίο «κοστίζει» υπολογιστικά. Ακόμη, υπάρχουν περιπτώσεις όπου ο ακριβής χωροχρόνος δεν μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά με την υπόθεση της σύμμορφης επιπεδότητας. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι για μία μελανή οπή Kerr δεν υπάρχουν σύμμορφα επίπεδες επιφάνειες για το χωροχρόνο Kerr. Έτσι, ενώ η CFC είναι ικανοποιητική προσέγγιση του ακριβούς χωροχρόνου ακόμα και για την περίπτωση μη σφαιρικού περιστρεφόμενου αστέρα νετρονιών, δεν ισχύει το ίδιο για μία μέγιστα περιστρεφόμενη μελανή οπή [9]. Ένα ακόμη ζήτημα είναι ότι με την προσέγγιση CFC χάνουμε οποιαδήποτε πληροφορία για τα βαρυτικά κύματα, καθώς εφόσον τα μη διαγώνια στοιχεία του τριδιάστατου μετρικού τανυστή είναι μηδέν όπως φαίνεται από την (2.3), τότε ο μετρικός τανυστής του χωροχρόνου δεν συμπεριλαμβάνει τη βαρυτική ακτινοβολία.

Το βασικό κίνητρο για τη χρησιμοποιήση της προσέγγισης CFC είναι το γεγονός ότι η υπόθεση σύμμορφης επιπεδότητας μειώνει την πολυπλοκότητα του προβλήματος. Αντί να λύσει κανείς το πλήρες σύστημα Einstein των εξισώσεων εξέλιξης και των περιορισμών, αρκεί να λύσει το σύστημα πέντε εξισώσεων που δεν εξαρτώνται άμεσα από το χρόνο. Τότε σε κάθε επιφάνεια, η κατανομή της ύλης στο χώρο είναι αυτή που προσδιορίζει το μετρικό τανυστή. Αν συγκρίνουμε με το πλήρες σύστημα εξισώσεων, θα παρατηρήσουμε ότι έχουμε σημαντικά λιγότερους όρους που εμπεριέχουν χρονικές παραγώγους. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η προσέγγιση CFC έχει ευκολότερη υλοποίηση και μας επιτρέπει να έχουμε περισσότερο ευσταθή εξέλιξη της αριθμητικής λύσης. Ακόμη, όπως αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, μπορεί με τη CFC να μην παίρνουμε την ακριβή λύση μεν, εν τούτοις η απόκλιση από την πλήρη ΓΘΣ περιορίζεται περίπου στο 5% ακόμη και για ακραία μοντέλα. Για περισσότερο τυπικές περιπτώσεις η απόκλιση είναι αρκετά μικρότερη.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι παρά την απώλεια των βαρυτικών κυμάτων με τη CFC, η γενική παρατήρηση στην πλειοψηφία των συστημάτων που έχουν μελετηθεί, είναι ότι η βαρυτική ακτινοβολία αποτελεί ένα πολύ μικρό ποσοστό της συνολικής ενέργειας και άρα η απώλειά της σ' αυτήν την προσέγγιση είναι «αποδεκτή» [25]. Ακόμη κι έτσι όμως υπάρχει τρόπος ν' ανακτηθεί κάποια πληροφορία για τη βαρυτική ακτινοβολία, έστω κατά προσέγγιση, χρησιμοποιώντας τον τύπο τετραπολικής ροπής (*quadrupole formula*) [9, Appendix C], [24, Section 4.4]. Συνοψίζοντας αξίζει να τονίσουμε ότι η CFC *δεν* ισοδυναμεί με τη ΓΘΣ αφαιρώντας απλώς τα βαρυτικά κύματα. Στη CFC έχουμε μεν ένα χωροχρόνο όπου απουσιάζει η βαρυτική ακτινοβολία αλλά υπάρχουν και περαιτέρω περιορισμοί. Άλλωστε, όπως αναφέραμε και παραπάνω, υπάρχουν χωροχρόνοι χωρίς βαρυτικά κύματα όπως ο χωροχρόνος Kerr, οι οποίοι δεν περιγράφονται ικανοποιητικά από ένα σύμμορφα επίπεδο μετρικό τανυστή.

Κεφάλαιο 3

Αριθμητικοί υπολογισμοί CFC

3.1 Μοντέλα περιστρεφόμενων αστέρων

Οι βασικές υποθέσεις που κάνουμε για όλα τα μοντέλα που κατασκευάζουμε είναι ότι βρίσκονται σε ισορροπία, περιστρέφονται και παρουσιάζουν αξονική συμμετρία, χωρίς να υπάρχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο (στάσιμα μοντέλα). Τότε το γραμμικό στοιχείο σε σφαιρικές συντεταγμένες $\{t, r, \theta, \phi\}$ έχει τη μορφή

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\psi}(d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\mu}(dr^2 + r^2 d\theta^2) , \tag{3.1}$$

όπου ν, ψ, ω και μ είναι τέσσερις *μετρικές συναρτήσεις* (ή *δυναμικά*) που εξαρτώνται μόνο από τις συντεταγμένες r και θ. Καθώς υπάρχει εξάρτηση από το θ, αναμένουμε ότι η γεωμετρία του αστέρα δεν θα είναι, εν γένει, σφαιρικά συμμετρική. Στο εξωτερικό του αστέρα, στο κενό, οι παραπάνω συναρτήσεις μπορούν να μειωθούν σε τρεις κάνοντας την επιλογή

$$e^{\psi} = r \sin\theta B e^{-\nu} , \tag{3.2}$$

όπου το B είναι επίσης συνάρτηση μόνο των r και θ. Ακόμη, υποθέτουμε ότι η ύλη του αστέρα συμπεριφέρεται ως ιδανικό ρευστό και άρα ο τανυστής τάσης–ενέργειας–ορμής έχει τη μορφή

$$T^{\alpha\beta} = (\epsilon + p)u^{\alpha}u^{\beta} + pg^{\alpha\beta} . \tag{3.3}$$

Στην παραπάνω σχέση, ϵ είναι η συνολική πυκνότητα ενέργειας και p είναι η πίεση του αστέρα, όπως μετριούνται από ένα παρατηρητή ο οποίος κινείται μαζί με το ρευστό. Αυτός ο παρατηρητής έχει τετραταχύτητα u^{α}. Ως καταστατική εξίσωση επιλέγουμε την πολυτροπική εξίσωση

$$p = K\rho^{\Gamma} \ , \tag{3.4}$$

$$\Gamma = 1 + \frac{1}{N} \ , \tag{3.5}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα μάζας ηρεμίας, K η πολυτροπική σταθερά και N ο πολυτροπικός δείκτης.

Όπως προαναφέραμε, το γραμμικό στοιχείο (3.1) είναι ανεξάρτητο από το χρόνο t (*stationary*) και το ϕ (*axisymmetric*). Τα δύο διανύσματα Killing που συνδέονται με αυτές τις συμμετρίες είναι τα διανύσματα t^{α} και ϕ^{α} αντίστοιχα. Υποθέτοντας ότι δεν έχουμε κυκλοφορία του ρευστού κατά τους μεσημβρινούς, η τετραταχύτητα του ρευστού u^{α}, μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των διανυσμάτων Killing ως εξής

$$u^{\alpha} = u^{t}\left(t^{\alpha} + \Omega\phi^{\alpha}\right) \ , \tag{3.6}$$

όπου Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του ρευστού ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται σε ηρεμία στο άπειρο.

$$\Omega = \frac{u^{\phi}}{u^{t}} \tag{3.7}$$

Ένας αστέρας περιστρέφεται *ομογενώς* αν το Ω είναι σταθερό. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.1) και τη συνθήκη κανονικοποίησης $u^{\alpha}u_{\alpha} = -1$, οι συνιστώσες της τετραχύτητας είναι

$$u^{\alpha} = u^{t}\left(1, 0, 0, \Omega\right) \ , \tag{3.8}$$

$$u^{t} = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1 - \upsilon^{2}}} \ , \tag{3.9}$$

όπου υ είναι η ίδια ταχύτητα του ρευστού ως προς έναν *παρατηρητή μηδενικής στροφορμής* (*zero angular momentum observer, ZAMO*)

$$\upsilon = \left(\Omega - \omega\right) e^{\psi - \nu} \ . \tag{3.10}$$

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε μια σημαντική διαφορά στο πως περιγράφεται ένας αστέρας στο πλαίσιο της ΓΘΣ και στη νευτώνεια βαρύτητα. Το διάνυσμα Killing ϕ^{α} συνδέεται με τη στροφορμή $L = p_{\alpha}\phi^{\alpha}$ ενός ελεύθερου σωματιδίου με τετραορμή $p^{\alpha} = mu^{\alpha}$. Η στροφορμή L διατηρείται και συνεπώς για $L = 0$ (ή ισοδύναμα για ένα ZAMO) έχουμε

$$u_{\phi} = u_{\alpha}\phi^{\alpha} = 0 \ . \tag{3.11}$$

Αξιοποιώντας και τη σχέση (3.1) έχουμε $u_\phi = g_{t\phi}u^t + g_{\phi\phi}u^\phi$ και άρα

$$\begin{aligned} e^{2\psi}\left(u^\phi - \omega u^t\right) &= 0 \\ \Rightarrow \omega = \frac{u^\phi}{u^t} &= \Omega \,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι ένα σωματίδιο που αρχικά βρίσκεται στο άπειρο και «πέφτει» ακτινικά προς τον αστέρα με *μηδενική* στροφορμή, τελικά θα αποκτήσει μη μηδενική γωνιακή ταχύτητα προς την κατεύθυνση της περιστροφής του αστέρα ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο άπειρο. Αυτό το φαινόμενο είναι σχετικιστικό και δεν παρατηρείται στη νευτώνεια βαρύτητα. Σημειώνουμε επίσης ότι καθώς οι παρατηρητές που εκτελούν ελεύθερη πτώση είναι αδρανειακοί, αυτή η παράσυρση των ελεύθερων σωματιδίων ονομάζεται *παράσυρση των αδρανειακών συστημάτων* (*dragging of inertial frames*)[7] και το δυναμικό ω περιγράφει ακριβώς αυτό το φαινόμενο.

Ένα ακόμη στοιχείο που απαιτείται στη μελέτη μας είναι η εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας. Αυτή προκύπτει εφαρμόζοντας τον τανυστή προβολής, ο οποίος προβάλλει κάθετα στην τετραταχύτητα u^α, στη σχέση διατήρησης του τανυστή ενέργειας–ορμής, $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$. Έτσι παίρνουμε τις σχετικιστικές εξισώσεις Euler που δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι εξισώσεις κίνησης του ρευστού

$$\frac{\nabla_\alpha p}{(\epsilon + p)} = -u^\beta \nabla_\beta u_\alpha \,.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $u^t = u^\alpha \nabla_\alpha t$, $u_\phi = u_\alpha \phi^\alpha$ και (3.6), η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\frac{\nabla_\alpha p}{(\epsilon + p)} = \nabla_\alpha \ln u^t - u^t u_\phi \nabla_\alpha \Omega \,. \tag{3.13}$$

Υποθέτοντας τώρα ότι έχουμε βαροτροπική ροή, δηλαδή $\epsilon = \epsilon(p)$, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση η οποία αποτελεί τη γενίκευση της συνάρτησης πίεσης όπως τη γνωρίζουμε από τη μηχανική συνεχών μέσων.

$$H(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\epsilon(p') + p'} \tag{3.14}$$

Η παραπάνω συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση

$$\nabla H = \nabla \ln h - \frac{T}{h}\nabla s \,, \tag{3.15}$$

όπου $h = (\epsilon + p)/\rho$ είναι η *ειδική ενθαλπία* (ενθαλπία ανά μονάδα μάζας ηρεμίας),

[7] Για την απόδοση στα ελληνικά των διάφορων όρων, ακολουθούμε την ορολογία που υιοθετείται στο [26].

T η θερμοκρασία και s η *ειδική εντροπία* (εντροπία ανά μονάδα μάζας ηρεμίας). Από τις σχέσεις (3.13) και (3.15) συνεπάγεται ότι

$$\nabla \left(H - \ln u^t\right) = -F \nabla \Omega \,, \tag{3.16}$$

όπου έχουμε θέσει $F = u^t u_\phi$. Όπως έχουμε αναφέρει ήδη, στην περίπτωση ομογενούς περιστροφής ισχύει $\Omega =$ σταθερό. Για την περίπτωση διαφορικής περιστροφής θα πρέπει να ισχύει $F = F(\Omega)$ και τότε ολοκληρώνοντας την (3.15) παίρνουμε

$$H - \ln u^t + \int_{\Omega_0}^{\Omega} F(\Omega') d\Omega' = \text{σταθερό} \,.$$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε στην προηγούμενη σχέση, όπου Ω_0, την τιμή του Ω σ' έναν πόλο (όπου τα H και v μηδενίζονται) παίρνουμε το ολοκλήρωμα της εξίσωσης υδροστατικής ισορροπίας

$$H - \ln u^t + \int_{\Omega_{\rm pole}}^{\Omega} F(\Omega') d\Omega' = \nu \,|_{\rm pole} \,. \tag{3.17}$$

Το τελευταίο που χρειάζεται για τον προσδιορισμό ενός περιστρεφόμενου μοντέλου σε ισορροπία, είναι ένας νόμος περιστροφής $F = F(\Omega)$. Μια επιλογή για το νόμο διαφορικής περιστροφής είναι η εξής

$$F(\Omega) = A^2(\Omega_c - \Omega) = \frac{(\Omega - \omega) e^{2(\psi - \nu)}}{1 - (\Omega - \omega)^2 e^{2(\psi - \nu)}} \,, \tag{3.18}$$

όπου A είναι μία σταθερά που προσδιορίζει την κλίμακα μήκους κατά την οποία μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα στο εσωτερικό του αστέρα και Ω_c είναι η γωνιακή ταχύτητα στο κέντρο του συστήματος συντεταγμένων (ισοδύναμα στον άξονα περιστροφής). Παρατηρούμε ότι καθώς $A \to \infty$ καταλήγουμε σε ομογενή περιστροφή, $\Omega_c = \Omega$. Στο νευτώνειο όριο κι όταν $A \to 0$ καταλήγουμε σε περιστροφή όπου διατηρείται η *ειδική στροφορμή* $j = h u_\phi$. Στην περιστροφή αυτού του τύπου ικανοποιείται το κριτήριο Rayleigh για τοπική δυναμική ευστάθεια σε αξονικά συμμετρικές διαταραχές, δηλαδή με άλλα λόγια το j δεν θα πρέπει να μειώνεται προς τα έξω, $dj/d\Omega < 0$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι για έναν αστέρα νετρονίων, η διαφορική περιστροφή είναι πιο πιθανή κατά τη γέννησή του και καθώς αυτός ψύχεται η δράση διαφόρων μηχανισμών, όπως η μαγνητική πέδηση της διαφορικής περιστροφής μέσω κυμάτων Alfvén, επιβάλλει την επικράτηση της ομογενούς περιστροφής. Ο νόμος περιστροφής εξαρτάται από την περιστροφή των «προγόνων» του αστέρα νετρονίων και τον τρόπο σχηματισμού του τελευταίου, π.χ από τη βαρυτική κατάρρευση ενός αστέρα, την κατάρρευση ενός λευκού νάνου με προσαύξηση μάζας, Πίνακας 3.1: Φυσικά μεγέθη για μοντέλα σε ισορροπία

βαρυτική μάζα	$M = -2\int \left(T_\alpha{}^\beta - \frac{1}{2}\delta_\alpha{}^\beta T\right) t^\alpha n_\beta dV$
μάζα ηρεμίας	$M_0 = \int \rho u^\beta n_\beta dV$
εσωτερική ενέργεια	$U = \int u u^\beta n_\beta dV$
βαρυτική ενέργεια σύνδεσης	$W = M - M_0 - T - U$
στροφορμή	$J = \int T_\alpha{}^\beta \phi^\alpha n_\beta dV \equiv \int dJ$
κινητική ενέργεια	$T = \frac{1}{2}\int \Omega dJ$
ροπή αδράνειας	$I = J/\Omega$

την ένωση δύο άλλων αστέρων νετρονίων κλπ. Η επιλογή (3.18) που έχουμε κάνει, βασίζεται σε αποτελέσματα στο νευτώνειο όριο [14] και είναι ίσως η απλούστερη δυνατή. Για περισσότερο ρεαλιστικούς νόμους περιστροφής απαιτείται λεπτομερής αριθμητική μελέτη του *σχηματισμού* των περιστρεφόμενων σχετικιστικών αστέρων.

Με τα παραπάνω δεδομένα στη διάθεσή μας, μπορεί κανείς να υπολογίσει ορισμένες φυσικές ποσότητες, που χαρακτηρίζουν το μοντέλο και οι οποίες παρουσιάζονται συνοπτικά στον πίνακα 3.1. Σημειώνουμε ότι $u = \epsilon - \rho$ είναι η πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας, ενώ το T αναφέρεται σε κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής.

3.2 Αριθμητική μέθοδος ΚΕΗ

3.2.1 Βασικές εξισώσεις

Η μέθοδος ΚΕΗ, η οποία αναπτύχθηκε από τους Komatsu, Eriguchi και Hachisu [14, 15], βασίζεται στο μετασχηματισμό των εξισώσεων πεδίου σε ολοκληρωτική μορφή χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις Green. Ξεκινώντας από μια αρχική πρόβλεψη για τη λύση, η επαναληπτική διαδικασία διαρκεί μέχρι να ικανοποιούνται οι εξισώσεις πεδίου και το ολοκλήρωμα της εξίσωσης υδροστατικής ισορροπίας. Σ' όλη την επαναληπτική διαδικασία, η κεντρική πυκνότητα και ο λόγος της πολικής προς την ισημερινή ακτίνα r_p/r_e διατηρούνται σταθερά.

Για να γραφούν οι εξισώσεις πεδίου σε ολοκληρωτική μορφή με τη χρήση συναρτήσεων Green, εισάγονται οι νέες μεταβλητές

$$\gamma = \ln B \tag{3.19}$$

$$\rho = 2\nu - \ln B \,, \tag{3.20}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην έκφραση του γραμμικού στοιχείου (3.1) έχουμε

$$ds^2 = -e^{\gamma+\rho}dt^2 + e^{\gamma-\rho}r^2\sin^2\theta(d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\mu}(dr^2 + r^2d\theta^2) \ . \tag{3.21}$$

Οι εξισώσεις για τις μετρικές συναρτήσεις ρ, ω και γ είναι

$$\nabla^2\left[\rho e^{\gamma/2}\right] = S_\rho(r,\mu) \ , \tag{3.22}$$

$$\nabla^2\left[r\sin\theta\cos\phi\omega e^{(\gamma-2\rho)/2}\right] = r\sin\theta\cos\phi S_\omega(r,\mu) \ , \tag{3.23}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\varpi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\varpi\gamma e^{\gamma/2}\right] = \varpi S_\gamma(r,\mu) \ , \tag{3.24}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την τριδιάστατη, Λαπλασιανή σε σφαιρικές συντεταγμένες (∇^2) και τη διδιάστατη Λαπλασιανή σε κυλινδρικές συντεταγμένες $\{\varpi = r\sin\theta \ , \ z = r\cos\theta\}$. Οι όροι πηγής S_ρ, S_ω και S_γ στις παραπάνω ελλειπτικές εξισώσεις, δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις

$$\begin{aligned} S_\rho(r,\theta) =& e^{\gamma/2}\left[8\pi e^{2\mu}(\epsilon+p)\frac{1+\upsilon^2}{1-\upsilon^2} + r^2\sin^2\theta e^{-2\rho}\left[\omega_{,r}^2 + \frac{1}{r^2}\omega_{,\theta}^2\right]\right. \\ &+\frac{1}{r}\gamma_{,r} + \frac{1}{r^2}\cot\theta\gamma_{,\theta} + \frac{\rho}{2}\left\{16\pi e^{2\mu}p - \gamma_{,r}\left(\frac{1}{2}\gamma_{,r} + \frac{1}{r}\right)\right. \\ &\left.\left.-\frac{1}{r^2}\gamma_{,\theta}\left[\frac{1}{2}\gamma_{,\theta} + \cot\theta\right]\right\}\right] \ , \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} S_\omega(r,\theta) =& e^{(\gamma-2\rho)/2}\left[16\pi e^{2\mu}\frac{(\Omega-\omega)(\epsilon+p)}{1-\upsilon^2} + \omega\left\{-8\pi e^{2\mu}\frac{[(1+\upsilon^2)\epsilon + 2\upsilon^2 p]}{1-\upsilon^2}\right.\right. \\ &-\frac{1}{r}\left(2\rho_{,r} + \frac{1}{2}\gamma_{,r}\right) - \frac{1}{r^2}\cot\theta\left(2\rho_{,\theta} + \frac{1}{2}\gamma_{,\theta}\right) + \frac{1}{4}\left[(4\rho_{,r}^2 - \gamma_{,r}^2)\right. \\ &\left.\left.\left.+\frac{1}{r^2}(4\rho_{,\theta}^2 - \gamma_{,\theta}^2)\right] - r^2\sin^2\theta e^{-2\rho}\left[\omega_{,r}^2 + \frac{1}{r^2}\omega_{,\theta}^2\right]\right\}\right] \ , \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$S_\gamma(r,\theta) = e^{\gamma/2}\left\{16\pi e^{2\mu}p + \frac{\gamma}{2}\left[16\pi e^{2\mu}p - \frac{1}{2}(\gamma_{,r}^2 + \gamma_{,\theta}^2)\right]\right\} \ . \tag{3.27}$$

Για τη μετρική συνάρτηση μ έχουμε την εξής συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned}\mu_{,\theta} =& \nu_{,\theta} + \sin\theta \left\{ \sin^2\theta(1 + rB^{-1}B_{,r})^2 + \left[\cos\theta + \sin\theta B^{-1}B_{,\theta}\right]^2 \right\}^{-1} \\ &\times \{ \left[\nu_{,\theta}^2 - r^2\nu_{,r}^2 - \frac{1}{2}B^{-1}(r^2B_{,rr} - B_{,\theta\theta}) \right] \left[\cos\theta + \sin\theta B^{-1}B_{,\theta}\right] \\ &+ rB^{-1}B_{,r} \left[\cos\theta \left(\frac{1}{2} + rB^{-1}B_{,r} \right) - \frac{1}{2}\sin\theta B^{-1}B_{,\theta} \right] \\ &+ r\sin\theta \left[2\nu_{,r}\nu_{,\theta} + B^{-1}B_{,r\theta}(1 + rB^{-1}B_{,r}) \right] \\ &+ \frac{1}{4}r^2\sin^3\theta B^2 e^{-4\nu} \left[(\cot\theta + B^{-1}B_{,\theta})(r^2\omega_{,r}^2 - \omega_{,\theta}^2) \right. \\ &\left. -2r\omega_{,r}\omega_{,\theta}(1 + rB^{-1}B_{,r}) \right] \} \ . \end{aligned} \tag{3.28}$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει εξαχθεί για την περίπτωση ισοτροπικού τανυστή ενέργειας–ορμής και συνεπώς δεν είναι κατάλληλη για τη μελέτη μοντέλων που έχουν και μαγνητικό πεδίο.

3.2.2 Ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων

Ο μετασχηματισμός των ελλειπτικών εξισώσεων (3.22), (3.23) και (3.24) από διαφορική μορφή σε ολοκληρωτική γίνεται προκειμένου να μπορούμε να χειριστούμε ευκολότερα τις συνοριακές συνθήκες. Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις Green για την τριδιάστατη, επίπεδη Λαπλασιανή σε σφαιρικές συντεταγμένες και για τη διδιάστατη, επίπεδη Λαπλασιανή σε κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνουμε τις παρακάτω ολοκληρωτικές εκφράσεις για τις συναρτήσεις ρ, ω και γ [14, 5, 7].

$$\rho = -\frac{e^{-\gamma/2}}{4\pi} \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' r'^2 \frac{S_\rho(r',\theta')}{\mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid} \tag{3.29}$$

$$\omega = -\frac{e^{(2\rho-\gamma)/2}}{4\pi r\sin\theta\cos\phi} \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' \sin^2\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' r'^3 \cos\phi' \frac{S_\omega(r',\theta')}{\mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid} \tag{3.30}$$

$$\gamma = \frac{e^{-\gamma/2}}{2\pi r\sin\theta} \int_0^\infty dr' \int_0^{2\pi} d\theta' r'^2 \sin\theta' S_\gamma(r',\theta') \log \mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid \tag{3.31}$$

Στη σχέση (3.31) η πηγή S_γ επεκτείνεται αναλυτικά στο διάστημα $\pi < \theta \leq 2\pi$ ορίζοντας ότι $S_\gamma(r,\theta) = S_\gamma(r,\theta-\pi)$. Τα ολοκληρώματα στις παραπάνω σχέσεις υπολογίζονται χρησιμοποιώντας αναπτύγματα σε σειρά των συναρτήσεων Green

$$\log \mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid = \frac{1}{2} \log \left[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') \right]$$
$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r_<^n}{r_>^n} \left(\cos n\theta \cos n\theta' + \sin n\theta \sin n\theta' \right) + \log \left(r_> \right) \ , \quad (3.32)$$
$$\frac{1}{\mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} \left[P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta') \right.$$
$$\left. + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta') \cos m(\phi - \phi') \right] \ , \quad (3.33)$$

όπου $r_< = \min(r, r')$, $r_> = \max(r, r')$, P_n είναι τα πολυώνυμα Legendre και P_n^m είναι οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre. Στις σχέσεις (3.29), (3.30) και (3.31) οι συνθήκες ασυμπτωτικής επιπεδότητας, $\rho \sim O(1/r)$, $\gamma \sim O(1/r^2)$ και $\omega \sim O(1/r^3)$ για $r \to \infty$ ικανοποιούνται αυτόματα.

3.2.3 Η νέα μεταβλητή s

Μια βελτίωση της αρχικής μεθόδου ΚΕΗ έγινε από τους Cook, Shapiro και Teukolsky [5, 7, 6], οι οποίοι εισήγαγαν μία νέα ακτινική μεταβλητή s, με το μετασχηματισμό

$$r = r_e \frac{s}{1-s} \ , \quad (3.34)$$

όπου r_e είναι η συντεταγμένη ισημερινή ακτίνα. Με αυτό το μετασχηματισμό, αντί να αποκόψουμε τον υπολογιστικό χώρο σε κάποια μεγάλη αλλά πεπερασμένη τιμή για την ακτίνα, το ακτινικό άπειρο απεικονίζεται στο σημείο $s = 1$. Δηλαδή, το διάστημα $[0, \infty)$ απεικονίζεται στο πεπερασμένο διάστημα $[0, 1]$. Αυτή η επιλογή, βελτιώνει την ακρίβεια στον υπολογισμό των ακτινικών ολοκληρωμάτων στις σχέσεις (3.29), (3.30) και (3.31) και οι συνοριακές συνθήκες, δηλαδή ο μηδενισμός των δυναμικών στο άπειρο, ικανοποιούνται *ακριβώς*.

3.2.4 Περιγραφή του αλγορίθμου

Ένα μοντέλο συμπαγούς αστέρα σε ισορροπία χρειάζεται τουλάχιστον δύο παραμέτρους ώστε να προσδιοριστεί κατά μοναδικό τρόπο, υποθέτοντας ότι έχουμε επιλέξει ήδη κάποια καταστατική εξίσωση. Η μία παράμετρος σχετίζεται με το πόσο συμπαγής είναι ο αστέρας, ενώ η άλλη με το πόσο γρήγορα περιστρέφεται. Για την περίπτωση ομογενούς περιστροφής, δύο κατάλληλες παράμετροι είναι η κεντρική πυκνότητα ενέργειας, ϵ_c, και ο λόγος της πολικής προς την ισημερινή ακτίνα, r_p/r_e. Για την περίπτωση διαφορικής περιστροφής, χρειάζεται επιπλέον να επιλέξουμε κι ένα νόμο περιστροφής. Αν διαλέξουμε ως νόμο περιστροφής τη σχέση (3.18), τότε ένα μοντέλο θα προσδιορίζεται μοναδικά[8] από τις παραμέτρους ϵ_c, r_p/r_e και A.

Υπάρχουν αρκετοί υπολογιστικοί κώδικες που υλοποιούν τη μέθοδο KEH με μικρές παραλλαγές. Η περιγραφή του αλγορίθμου της μεθόδου KEH που παρουσιάζουμε εδώ, βασίζεται στον κώδικα RNS [21, 23], ο οποίος είναι αυτός που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία.

1. Για την έναρξη της επαναληπτικής διαδικασίας, γίνεται μία πρώτη πρόβλεψη για τις συναρτήσεις ρ, γ, ω, μ, την πυκνότητα ενέργειας ϵ και τη γωνιακή ταχύτητα $\Omega(\varpi)$. Η αρχική πρόβλεψη μπορεί να είναι ένα μη περιστρεφόμενο μοντέλο (λύση Tolman–Oppenheimer–Volkoff) ή κάποιο κοντινό μοντέλο που έχει υπολογιστεί προηγουμένως.

2. Γίνεται κανονικοποίηση των δυναμικών ρ, γ και μ διαιρώντας με το r_e^2, ενώ το ω διαιρείται με το $1/r_e$.

3. Εξισώνοντας το ολοκλήρωμα της υδροστατικής ισορροπίας (3.17) στη θέση όπου συναντούμε το μέγιστο της πυκνότητας ενέργειας με την τιμή του ίδιου ολοκληρώματος στον πόλο του αστέρα, βρίσκουμε μια νέα τιμή για το r_e.

4. Ομοίως, εξισώνοντας το ολοκλήρωμα της υδροστατικής ισορροπίας (3.17) στον ισημερινό με την τιμή αυτού του ολοκληρώματος στον πόλο, βρίσκουμε μια νέα τιμή για το Ω_e.

5. Η νέα τιμή για το Ω_e χρησιμοποιείται για την εύρεση μιας νέας τιμής για το Ω_c, επιλύοντας τη σχέση του νόμου περιστροφής (3.18) στον ισημερινό.

6. Με αυτά τα στοιχεία στη διάθεση μας, μπορούμε να λύσουμε την (3.18) με κάποια μέθοδο εύρεσης ριζών και να βρούμε έτσι το $\Omega_(\varpi)$ σε κάθε σημείο στο εσωτερικό του αστέρα.

7. Χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση του αστέρα σε συνδυασμό με τη σχέση (3.17) υπολογίζουμε τις νέες κατανομές της ενθαλπίας, της πυκνότητας ενέργειας και της πίεσης παντού μέσα στον αστέρα.

8. Τέλος, από τις σχέσεις (3.29), (3.31), (3.30) και (3.28), υπολογίζουμε νέες κατανομές για τις συναρτήσεις ρ, γ, ω και μ και η διαδικασία επαναλαμβάνεται από το βήμα 2 μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση.

Η σύγκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας ελέγχεται με βάση το σχετικό σφάλμα στην ισημερινή ακτίνα του αστέρα από τη μία επανάληψη στην επόμενη. Όταν αυτό το σφάλμα γίνει μικρότερο από μία επιθυμητή τιμή που έχουμε ορίσει, π.χ 10^{-5}, τότε η διαδικασία τερματίζεται.

[8]Σημειώνουμε πάντως ότι, λόγω διακλάδωσης στην ακολουθία, υπάρχουν και περιπτώσεις μοντέλων που έχουν ακριβώς τις ίδιες παραμέτρους ϵ_c, r_p/r_e και A.

Πίνακας 3.2: Ορισμοί φυσικών μεγεθών

ϵ_c	κεντρική πυκνότητα ενέργειας
r_p/r_e	λόγος αξόνων (πολική προς ισημερινή ακτίνα)
M	βαρυτική μάζα
M_0	μάζα ηρεμίας
$T/\|W\|$	περιστροφική κινητική ενέργεια / βαρυτική ενέργεια σύνδεσης
Ω_c	γωνιακή ταχύτητα στον άξονα περιστροφής
$\Omega_{\max}$	γωνιακή ταχύτητα στη θέση όπου $\epsilon = \epsilon_{\max}$
Ω_e	γωνιακή ταχύτητα στην επιφάνεια, στο ισημερινό επίπεδο
Ω_K	γωνιακή ταχύτητα ελεύθερου σωματιδίου σε κυκλική τροχιά (γωνιακή ταχύτητα Kepler ή mass–shedding limit)
R_e	περιφερειακή ακτίνα στον ισημερινό (ίδια περιφέρεια: $2\pi R_e$)

3.3 Υλοποίηση της προσέγγισης CFC

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήσαμε τον κώδικα RNS [21, 23], ο οποίος υλοποιεί τη μέθοδο KEH των Komatsu, Eriguchi και Hachisu [14, 15] ενσωματώνοντας και τις βελτιώσεις των Cook, Shapiro και Teukolsky [5, 7, 6]. Ο κώδικας είναι γραμμένος σε γλώσσα C και κατασκευάζει μοντέλα ταχέως περιστρεφόμενων, σχετικιστικών, συμπαγών αστέρων από κάποια καταστατική εξίσωση που προσδιορίζει ο χρήστης. Στη συνέχεια για το συγκεκριμένο μοντέλο που κατασκευάστηκε, υπολογίζονται διάφορα φυσικά μεγέθη (Πίνακας 3.2).

Μία βασική παρατήρηση είναι ότι το σύστημα εξισώσεων που έχουμε να λύσουμε στην προσέγγιση CFC (ενότητα 2.1) παρουσιάζει τους ίδιους ελλειπτικούς τελεστές όπως και το σύστημα εξισώσεων στη μέθοδο KEH για την ακριβή λύση. Επομένως, για την υλοποίηση της προσέγγισης CFC υπάρχουν δύο δυνατές επιλογές. Η πρώτη και προφανής επιλογή είναι να γραφεί ένας νέος κώδικας εκ του μηδενός, ο οποίος θα λύνει τις εξισώσεις που παρουσιάσαμε στην ενότητα 2.1. Υπάρχει όμως και η δυνατότητα να βασιστεί κανείς σε έναν εύρωστο, ήδη δοκιμασμένο κώδικα όπως ο RNS [18, 2], και να τον επεκτείνει κατάλληλα. Κατ' αυτόν τον τρόπο, γίνεται ευκολότερη η σύγκριση μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και CFC, αλλάζοντας απλώς μια επιλογή στα flags του ίδιου κώδικα και τρέχοντας άλλη μια φορά το ίδιο μοντέλο. Ουσιαστικά λοιπόν επεκτείναμε τον κώδικα RNS ενσωματώνοντας σ' αυτόν και τη δυνατότητα για κατασκευή μοντέλων στην προσέγγιση CFC. Ο σκοπός μας είναι να ελέγξουμε την ακρίβεια της CFC σε σχέση με την πλήρη ΓΘΣ τόσο στην περίπτωση ομογενώς περιστρεφόμενων αστέρων [8] όσο και στην περίπτωση διαφορικής περιστροφής.

Έχουμε αναφέρει ήδη ότι το μετρικό στοιχείο στο φορμαλισμό $3+1$ δίνεται από τη σχέση (1.26). Χρησιμοποιώντας τη βασική υπόθεση της προσέγγισης CFC, δηλαδή ότι ο μετρικός τανυστής γ_{ab} είναι σύμμορφα επίπεδος (σχέση (2.2)) καθώς και το γεγονός ότι για έναν αξονικά συμμετρικό αστέρα σε σφαιρικές συντεταγμένες το διάνυσμα μετατόπισης β^α έχει μόνο μία μη μηδενική συνιστώσα, την β^ϕ, έχουμε

$$
\begin{aligned}
ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \Rightarrow \\
ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \psi^4(dr^2 + r^2 d\theta^2) + \psi^4 r^2 \sin^2\theta(d\phi + \beta^\phi dt)^2
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Αν αντιπαραβάλλουμε τώρα τη σχέση (3.35) που μας δίνει το μετρικό στοιχείο στην προσέγγιση CFC με τη σχέση (3.21)

$$
ds^2 = -e^{\gamma+\rho}dt^2 + e^{\gamma-\rho}r^2\sin^2\theta(d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\mu}(dr^2 + r^2 d\theta^2)
$$

που μας δίνει το μετρικό στοιχείο στην πλήρη ΓΘΣ, παρατηρούμε ότι προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

$$
\alpha = e^{(\gamma+\rho)/2} \tag{3.36}
$$

$$
\psi = e^{\mu/2} = e^{(\gamma-\rho)/4} \tag{3.37}
$$

$$
\beta^\phi = -\omega\ . \tag{3.38}
$$

Από τη σχέση (3.37) προκύπτει άμεσα ότι

$$
\mu = \frac{\gamma - \rho}{2}\ . \tag{3.39}
$$

Η παραπάνω σχέση παρουσιάζει ενδιαφέρον από υπολογιστικής άποψης, καθώς αν διατηρήσουμε στη μέθοδο ΚΕΗ τις εξισώσεις για το γ, το ω και το ρ ως έχουν, αλλά αντικαταστήσουμε την εξίσωση για το μ με τη σχέση (3.39), τότε ουσιαστικά *επιβάλλουμε* την προσέγγιση CFC στη λύση. Αυτή η παρατήρηση, μας επιτρέπει να ενσωματώσουμε στον κώδικα RNS τη δυνατότητα για υπολογισμούς σε CFC, χωρίς να χρειαστούν εκτεταμένες αλλαγές. Επίσης μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το μέγεθος

$$
\Delta c = \frac{\mu_{\text{full GR}} - \mu_{\text{CFC}}}{\mu_{\text{CFC}}} = \frac{\mu - \frac{\gamma-\rho}{2}}{\mu}\ , \tag{3.40}
$$

το οποίο είναι μέτρο της ακρίβειας της CFC. Σημειώνουμε ότι στη δεύτερη ισότητα της σχέσης (3.40), όλες οι ποσότητες είναι υπολογισμένες σε πλήρη ΓΘΣ.

Τα μοντέλα που μελετήσαμε, ορίζονται στους πίνακες 3.3 και 3.4 και πρόκειται ουσιαστικά για τις ίδιες ακολουθίες που δίνονται στον πίνακα I του [22]. Σε όλα τα μοντέλα έχουμε υιοθετήσει μια πολυτροπική καταστατική εξίσωση με $N = 1$ και $K = 100$. Η ακολουθία A αποτελείται από διαφορικά περιστρεφόμενα μοντέλα σταθερής μάζας ηρεμίας $M_0 = 1.506 M_\odot$ (εδώ επιτρέπουμε μικρές διακυμάνσεις) και η ακολουθία B από διαφορικά περιστρεφόμενα μοντέλα σταθερής κεντρικής πυκνότητας μάζας ηρεμίας $\rho_c = 1.28 \times 10^{-3}$ ή ισοδύναμα σταθερής κεντρικής πυκνότητας ενέργειας ϵ_c. Οι ακολουθίες AU και BU είναι οι αντίστοιχες ακολουθίες των A και B, αλλά με ομογενή περιστροφή. Το μόνο επιπλέον στοιχείο σε σχέση με τα μοντέλα που παρατίθενται στο [22] είναι ότι εντοπίσαμε και προσθέσαμε δύο ακόμη ταχύτερα περιστρεφόμενα μέλη στις διαφορικά περιστρεφόμενες ακολουθίες (μοντέλα A12 και B13).

Κάθε μοντέλο υπολογίζεται δύο φορές: μία φορά λύνοντας τις εξισώσεις στην πλήρη ΓΘΣ και μία ακόμη στην προσέγγιση CFC αλλάζοντας κάθε φορά την τιμή του αρμόδιου flag. Τα δεδομένα για όλα τα υπολογιζόμενα φυσικά μεγέθη συγκεντρώνονται σε αρχεία, απ' όπου μπορούν στη συνέχεια να υπολογιστούν οι σχετικές διαφορές μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και CFC για κάθε φυσική ποσότητα (Πίνακες 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 και Σχήματα 3.1, 3.2, 3.3, 3.4). Επίσης, σύμφωνα με τη σχέση (3.40), κατασκευάζουμε σχήματα για το μέγεθος Δc στο ισημερινό επίπεδο για το ταχύτερα περιστρεφόμενο μοντέλο κάθε ακολουθίας (Σχήματα 3.5 και 3.6), καθώς σ' αυτά τα πιο ακραία μοντέλα αναμένονται οι μεγαλύτερες αποκλίσεις. Για τα συγκεκριμένα τέσσερα ταχύτερα περιστρεφόμενα μοντέλα (A12, AU5, B13, BU9) κατασκευάζουμε επίσης διδιάστατα σχήματα του Δc στο επίπεδο $x - z$ μέχρι την τιμή $s = 3/5$ (Σχήματα 3.7 και 3.8). Σημειώνουμε ότι στους πίνακες 3.9 και 3.10, δεν έχουμε συμπεριλάβει τις ακολουθίες ομογενούς περιστροφής AU και BU, διότι γι' αυτές ισχύει $\Omega_{\max} = 0$ και $\Omega_e = \Omega_c$. Αντιστοίχως στα Σχήματα 3.2 και 3.4 δεν συμπεριλαμβάνονται τα μεγέθη $\Omega_{\max}$ και Ω_e.

Πίνακας 3.3: Ακολουθίες A και AU: Διαφορικά και ομογενώς περιστρεφόμενα μοντέλα ισορροπίας, σταθερής μάζας ηρεμίας $M_0 = 1.506 M_\odot$.

Μοντέλο	ϵ_c $(\times 10^{-3})$	r_p/r_e	M	$T/\lvert W\rvert$ $(\times 10^{-1})$	Ω_c $(\times 10^{-2})$	Ω_e $(\times 10^{-2})$	$\mathrm{R_e}$
A0	1.444	1.0	1.40013	0.0000	0.000	0.000	9.58505
A1	1.300	0.930	1.40439	0.1770	2.012	0.756	10.0107
A2	1.187	0.875	1.40726	0.3264	2.575	0.975	10.3969
A3	1.074	0.820	1.40934	0.4853	2.940	1.124	10.8403
A4	0.961	0.762	1.41359	0.6639	3.193	1.233	11.3714
A5	0.848	0.703	1.41775	0.8580	3.337	1.302	12.0047
A6	0.735	0.643	1.42087	1.0692	3.381	1.336	12.7723
A7	0.622	0.579	1.42758	1.3111	3.340	1.337	13.7516
A8	0.509	0.513	1.43343	1.5801	3.199	1.301	15.0115
A9	0.396	0.444	1.43822	1.8842	2.952	1.223	16.6970
A10	0.283	0.370	1.44913	2.2362	2.605	1.101	19.0370
A11	0.170	0.294	1.45891	2.5966	2.187	0.945	21.9181
A12	0.110	0.250	1.45743	2.7431	1.965	0.859	23.3215
AU0	1.444	1.0	1.40013	0.0000	0.000	0.000	9.58505
AU1	1.300	0.919	1.40431	0.1963	1.296	1.296	10.1924
AU2	1.187	0.852	1.40756	0.3653	1.656	1.656	10.7895
AU3	1.074	0.780	1.41115	0.5502	1.888	1.888	11.5566
AU4	0.961	0.698	1.41523	0.7548	2.028	2.028	12.6441
AU5	0.863	0.575	1.41997	0.9542	2.084	2.084	14.9350

Πίνακας 3.4: Ακολουθίες B και BU: Διαφορικά και ομογενώς περιστρεφόμενα μοντέλα ισορροπίας, σταθερής κεντρικής πυκνότητας μάζας ηρεμίας $\rho_c = 1.28 \times 10^{-3}$ ή ισοδύναμα σταθερής κεντρικής πυκνότητας ενέργειας ϵ_c.

Μοντέλο	ϵ_c	r_p/r_e	M	$T/\|W\|$	Ω_c	Ω_e	$\mathrm{R_e}$
	$(\times 10^{-3})$			$(\times 10^{-1})$	$(\times 10^{-2})$	$(\times 10^{-2})$	
B0	1.444	1.0	1.40013	0.0000	0.000	0.000	9.58505
B1	1.444	0.950	1.43676	0.1249	1.800	0.666	9.74695
B2	1.444	0.900	1.47789	0.2573	2.574	0.994	9.92100
B3	1.444	0.849	1.52572	0.4004	3.200	1.163	10.1127
B4	1.444	0.800	1.57840	0.5462	3.728	1.342	10.3113
B5	1.444	0.750	1.64041	0.7041	4.227	1.504	10.5290
B6	1.444	0.700	1.71268	0.8718	4.707	1.651	10.7617
B7	1.444	0.650	1.79773	1.0500	5.186	1.789	11.0071
B8	1.444	0.600	1.89887	1.2393	5.684	1.921	11.2590
B9	1.444	0.550	2.02030	1.4396	6.233	2.052	11.5026
B10	1.444	0.500	2.16685	1.6497	6.890	2.192	11.7049
B11	1.444	0.450	2.33646	1.8673	7.780	2.359	11.7834
B12	1.444	0.400	2.53257	2.0721	9.119	2.584	11.6435
B13	1.444	0.340	2.71188	2.2769	11.93	3.010	10.9479
BU0	1.444	1.0	1.40013	0.0000	0.000	0.000	9.58505
BU1	1.444	0.95	1.43191	0.1199	1.075	1.075	9.82995
BU2	1.444	0.90	1.46626	0.2437	1.508	1.508	10.1049
BU3	1.444	0.85	1.50354	0.3701	1.829	1.829	10.4171
BU4	1.444	0.80	1.54353	0.4975	2.084	2.084	10.7760
BU5	1.444	0.75	1.58545	0.6232	2.290	2.290	11.1947
BU6	1.444	0.70	1.62754	0.7419	2.452	2.452	11.6926
BU7	1.444	0.65	1.66575	0.8439	2.569	2.569	12.2998
BU8	1.444	0.60	1.69174	0.9104	2.633	2.633	13.0664
BU9	1.444	0.58	1.69550	0.9198	2.642	2.642	13.4354

Πίνακας 3.5: Αριθμητικά αποτελέσματα για τη βαρυτική μάζα M και σύγκριση μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και προσέγγισης CFC.

Μοντέλο	πλήρης ΓΘΣ	CFC	Σχετική διαφορά	Μοντέλο	πλήρης ΓΘΣ	CFC	Σχετική διαφορά
A0	1.400125	1.400125	0.0	B0	1.400125	1.400125	0.0
A1	1.404392	1.404176	1.538032e-04	B1	1.436757	1.436573	1.280662e-04
A2	1.407257	1.406877	2.700289e-04	B2	1.477890	1.477489	2.713328e-04
A3	1.409340	1.408821	3.682575e-04	B3	1.525723	1.525047	4.430686e-04
A4	1.413593	1.413003	4.173761e-04	B4	1.578401	1.577417	6.234157e-04
A5	1.417748	1.417127	4.380186e-04	B5	1.640411	1.639060	8.235741e-04
A6	1.420872	1.420341	3.737142e-04	B6	1.712684	1.710903	1.039888e-03
A7	1.427584	1.427253	2.318603e-04	B7	1.797730	1.795429	1.279947e-03
A8	1.433425	1.433494	-4.813646e-05	B8	1.898871	1.895886	1.571987e-03
A9	1.438215	1.438999	-5.451202e-04	B9	2.020299	2.016400	1.929912e-03
A10	1.449134	1.451239	-1.452592e-03	B10	2.166852	2.157973	4.097649e-03
A11	1.458907	1.462417	-2.405911e-03	B11	2.336463	2.331529	2.111739e-03
A12	1.457429	1.460146	–1.864242e-03	B12	2.532568	2.511428	8.347259e-03
				B13	2.711878	2.656869	2.028447e-02
AU0	1.400125	1.400125	0.0	BU0	1.400125	1.400125	0.0
AU1	1.404309	1.404169	9.969316e-05	BU1	1.431905	1.431798	7.472563e-05
AU2	1.407561	1.407353	1.477733e-04	BU2	1.466265	1.466055	1.432210e-04
AU3	1.411146	1.410957	1.339337e-04	BU3	1.503544	1.503246	1.981984e-04
AU4	1.415232	1.415224	5.652783e-06	BU4	1.543532	1.543176	2.306399e-04
AU5	1.419974	1.420646	-4.732481e-04	BU5	1.585453	1.585157	1.866974e-04
				BU6	1.627535	1.627389	8.970621e-05
				BU7	1.665745	1.665962	-1.302720e-04
				BU8	1.691743	1.692492	-4.427386e-04
				BU9	1.695499	1.696485	-5.815397e-04

Πίνακας 3.6: Αριθμητικά αποτελέσματα για τη μάζα ηρεμίας M_0 και σύγκριση μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και προσέγγισης CFC.

Μοντέλο	πλήρης ΓΘΣ	CFC	Σχετική διαφορά	Μοντέλο	πλήρης ΓΘΣ	CFC	Σχετική διαφορά
A0	1.506134	1.506134	0.0	B0	1.506134	1.506134	0.0
A1	1.507027	1.506829	1.313845e-04	B1	1.546664	1.546493	1.105605e-04
A2	1.506894	1.506542	2.335931e-04	B2	1.592223	1.591856	2.304954e-04
A3	1.505600	1.505120	3.188098e-04	B3	1.645292	1.644676	3.744016e-04
A4	1.506337	1.505804	3.538385e-04	B4	1.703848	1.702963	5.194125e-04
A5	1.506538	1.505990	3.637479e-04	B5	1.772936	1.771742	6.734592e-04
A6	1.505102	1.504668	2.883526e-04	B6	1.853688	1.852151	8.291579e-04
A7	1.506936	1.506733	1.347104e-04	B7	1.949044	1.947122	9.861245e-04
A8	1.507021	1.507256	-1.559368e-04	B8	2.062950	2.060548	1.164352e-03
A9	1.504973	1.505976	-6.664571e-04	B9	2.200481	2.197505	1.352432e-03
A10	1.508307	1.510717	-1.597818e-03	B10	2.367733	2.359444	3.500817e-03
A11	1.509595	1.513477	-2.571551e-03	B11	2.562774	2.561208	6.110566e-04
A12	1.503556	1.506564	-2.000591e-03	B12	2.792360	2.773672	6.692547e-03
				B13	3.003666	2.948921	1.822606e-02
AU0	1.506134	1.506134	0.0	BU0	1.506134	1.506134	0.0
AU1	1.506470	1.506379	6.040611e-05	BU1	1.541007	1.540935	4.672269e-05
AU2	1.506312	1.506186	8.364801e-05	BU2	1.578709	1.578577	8.361262e-05
AU3	1.506111	1.506042	4.581336e-05	BU3	1.619626	1.619460	1.024928e-04
AU4	1.505943	1.506097	-1.022615e-04	BU4	1.663528	1.663369	9.558000e-05
AU5	1.506507	1.507408	-5.980722e-04	BU5	1.709552	1.709544	4.679589e-06
				BU6	1.755745	1.755989	-1.389723e-04
				BU7	1.797656	1.798387	-4.066406e-04
				BU8	1.826133	1.827509	-7.535048e-04
				BU9	1.830242	1.831886	-8.982419e-04

Πίνακας 3.7: Αριθμητικά αποτελέσματα για το λόγο $T/|W|$ και σύγκριση μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και προσέγγισης CFC.

Μοντέλο	πλήρης ΓΘΣ ($\times 10^{-2}$)	CFC ($\times 10^{-2}$)	Σχετική διαφορά	Μοντέλο	πλήρης ΓΘΣ ($\times 10^{-2}$)	CFC ($\times 10^{-2}$)	Σχετική διαφορά
A0	0.0	0.0	–	B0	0.0	0.0	–
A1	1.769951	1.767427	1.426028e-03	B1	1.248882	1.246936	1.558194e-03
A2	3.263808	3.259445	1.336782e-03	B2	2.572814	2.568606	1.635563e-03
A3	4.852785	4.846843	1.224452e-03	B3	4.004136	3.997362	1.691751e-03
A4	6.638761	6.631362	1.114515e-03	B4	5.462345	5.452794	1.748516e-03
A5	8.579799	8.571369	9.825405e-04	B5	7.040960	7.028189	1.813815e-03
A6	10.69171	10.68251	8.604798e-04	B6	8.718009	8.701465	1.897681e-03
A7	13.11132	13.10175	7.299036e-04	B7	10.50015	10.47898	2.016162e-03
A8	15.80120	15.79161	6.069159e-04	B8	12.39255	12.36529	2.199709e-03
A9	18.84174	18.83206	5.137530e-04	B9	14.39581	14.35887	2.566024e-03
A10	22.36205	22.34977	5.491446e-04	B10	16.49746	16.45960	2.294899e-03
A11	25.96644	25.94125	9.700983e-04	B11	18.67281	18.55666	6.220274e-03
A12	27.43083	27.39984	1.129751e-03	B12	20.72100	20.53846	8.809420e-03
				B13	22.76876	22.37067	1.748404e-02
AU0	0.0	0.0	–	BU0	0.0	0.0	–
AU1	1.962736	1.959760	1.516251e-03	BU1	1.199396	1.197281	1.763388e-03
AU2	3.652775	3.648482	1.175271e-03	BU2	2.436623	2.432640	1.634639e-03
AU3	5.502310	5.498182	7.502304e-04	BU3	3.700659	3.695406	1.419477e-03
AU4	7.548177	7.547041	1.504999e-04	BU4	4.975188	4.969708	1.101466e-03
AU5	9.542478	9.556226	-1.440716e-03	BU5	6.231882	6.227676	6.749165e-04
				BU6	7.418814	7.418471	4.623381e-05
				BU7	8.439136	8.446010	-8.145384e-04
				BU8	9.103916	9.122505	-2.041869e-03
				BU9	9.197882	9.222127	-2.635933e-03

Πίνακας 3.8: Αριθμητικά αποτελέσματα για τη γωνιακή ταχύτητα Ω_c και σύγκριση μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και προσέγγισης CFC.

Μοντέλο	πλήρης ΓΘΣ ($\times 10^{-2}$)	CFC ($\times 10^{-2}$)	Σχετική διαφορά	Μοντέλο	πλήρης ΓΘΣ ($\times 10^{-2}$)	CFC ($\times 10^{-2}$)	Σχετική διαφορά
A0	0.0	0.0	–	B0	0.0	0.0	–
A1	2.011616	2.010818	3.966960e-04	B1	1.800246	1.799279	5.371488e-04
A2	2.574704	2.574496	8.078599e-05	B2	2.573851	2.573226	2.428268e-04
A3	2.939741	2.940468	-2.473007e-04	B3	3.199966	3.200490	-1.637517e-04
A4	3.192889	3.194804	-5.997703e-04	B4	3.728224	3.730755	-6.788755e-04
A5	3.336783	3.340027	-9.721939e-04	B5	4.227435	4.233275	-1.381452e-03
A6	3.380723	3.385279	-1.347641e-03	B6	4.707347	4.718381	-2.343995e-03
A7	3.340312	3.346249	-1.777379e-03	B7	5.185887	5.205092	-3.703320e-03
A8	3.198612	3.205797	-2.246287e-03	B8	5.683909	5.716335	-5.704877e-03
A9	2.952207	2.960492	-2.806375e-03	B9	6.232895	6.287562	-8.770724e-03
A10	2.605328	2.614886	-3.668636e-03	B10	6.889845	6.989785	-1.450541e-02
A11	2.186566	2.196642	-4.608139e-03	B11	7.779631	7.944160	-2.114869e-02
A12	1.965314	1.973426	-4.127585e-03	B12	9.118694	9.449960	-3.632823e-02
				B13	11.93359	12.63515	-5.878868e-02
AU0	0.0	0.0	–	BU0	0.0	0.0	–
AU1	1.295972	1.295384	4.537135e-04	BU1	1.074501	1.073764	6.858998e-04
AU2	1.656370	1.656312	3.501633e-05	BU2	1.508222	1.507665	3.693090e-04
AU3	1.887704	1.888481	-4.116111e-04	BU3	1.828526	1.828560	-1.859421e-05
AU4	2.028484	2.030332	-9.110252e-04	BU4	2.083540	2.084545	-4.823522e-04
AU5	2.084175	2.087612	-1.649094e-03	BU5	2.289517	2.291855	-1.021176e-03
				BU6	2.451631	2.455659	-1.642988e-03
				BU7	2.568679	2.574614	-2.310526e-03
				BU8	2.633444	2.641233	-2.957724e-03
				BU9	2.641676	2.650058	-3.172986e-03

Πίνακας 3.9: Αριθμητικά αποτελέσματα για τη γωνιακή ταχύτητα Ω_{max} και σύγκριση μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και προσέγγισης CFC.

Μοντέλο	πλήρης ΓΘΣ ($\times 10^{-2}$)	CFC ($\times 10^{-2}$)	Σχετική διαφορά
A0	0.0	0.0	–
A1	2.011611	2.010820	3.932172e-04
A2	2.574695	2.574491	7.923269e-05
A3	2.939733	2.940457	-2.462809e-04
A4	3.192884	3.194801	-6.003976e-04
A5	3.336779	3.340020	-9.712960e-04
A6	3.380719	3.385275	-1.347642e-03
A7	3.340311	3.346248	-1.777379e-03
A8	3.198614	3.205798	-2.245973e-03
A9	2.952211	2.960500	-2.807726e-03
A10	2.605322	2.614881	-3.669028e-03
A11	1.897935	1.900550	-1.377813e-03
A12	1.570001	1.574078	-2.596814e-03
B0	0.0	0.0	–
B1	1.800244	1.799294	5.277062e-04
B2	2.573841	2.573222	2.404966e-04
B3	3.199953	3.200483	-1.656274e-04
B4	3.728211	3.730747	-6.802190e-04
B5	4.227424	4.233267	-1.382166e-03
B6	4.707337	4.718373	-2.344425e-03
B7	5.185879	5.205085	-3.703519e-03
B8	5.683905	5.716331	-5.704881e-03
B9	6.232897	6.287564	-8.770721e-03
B10	6.868096	6.834293	4.921743e-03
B11	6.805796	6.808860	-4.502045e-04
B12	6.908735	6.962573	-7.792744e-03
B13	7.469516	7.646062	-2.363553e-02

Πίνακας 3.10: Αριθμητικά αποτελέσματα για τη γωνιακή ταχύτητα Ω_e και σύγκριση μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και προσέγγισης CFC.

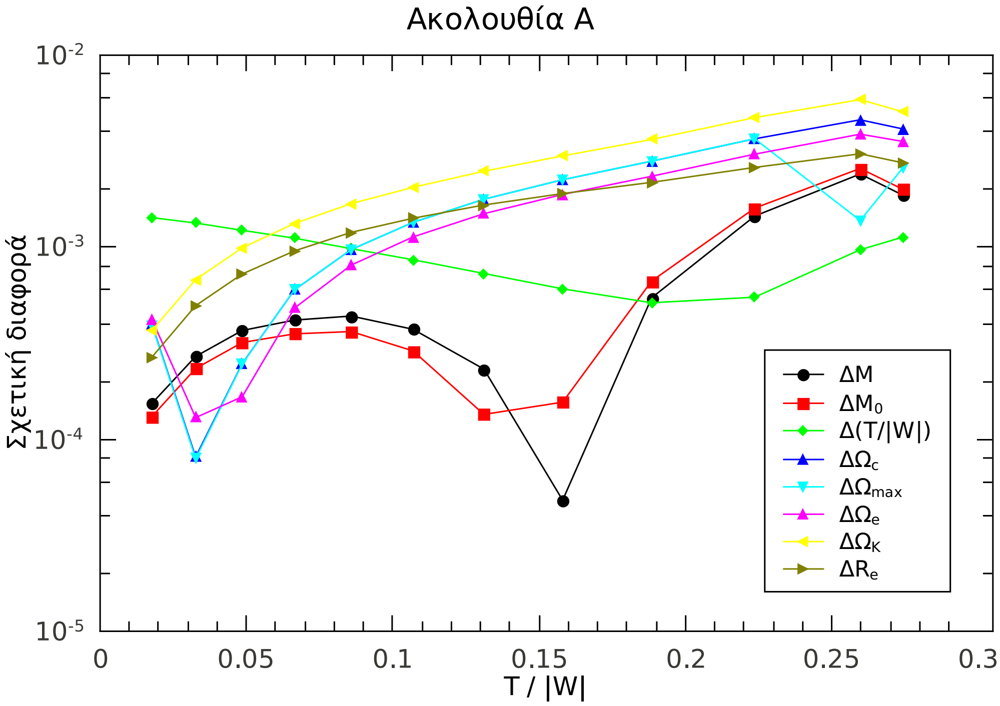
Μοντέλο	πλήρης ΓΘΣ ($\times 10^{-2}$)	CFC ($\times 10^{-2}$)	Σχετική διαφορά
A0	0.0	0.0	–
A1	0.7559140	0.7555964	4.201536e-04
A2	0.9754363	0.9753099	1.295830e-04
A3	1.123897	1.124084	-1.663854e-04
A4	1.232536	1.233130	-4.819332e-04
A5	1.302071	1.303122	-8.071756e-04
A6	1.335506	1.337017	-1.131406e-03
A7	1.337374	1.339373	-1.494720e-03
A8	1.300737	1.303186	-1.882779e-03
A9	1.222557	1.225420	-2.341813e-03
A10	1.101118	1.104478	-3.051444e-03
A11	0.9446849	0.9483503	-3.880024e-03
A12	0.8588730	0.8619247	-3.553145e-03
B0	0.0	0.0	–
B1	0.6656116	0.6652407	5.572319e-04
B2	0.9442858	0.9440100	2.920726e-04
B3	1.163446	1.163521	-6.446367e-05
B4	1.342067	1.342743	-5.037006e-04
B5	1.503898	1.505534	-1.087840e-03
B6	1.651452	1.654531	-1.864420e-03
B7	1.789143	1.794382	-2.928218e-03
B8	1.921049	1.929578	-4.439762e-03
B9	2.052413	2.066127	-6.681891e-03
B10	2.192107	2.215645	-1.073761e-02
B11	2.359479	2.395560	-1.529194e-02
B12	2.583907	2.650321	-2.570294e-02
B13	3.009641	3.135328	-4.176146e-02

Πίνακας 3.11: Αριθμητικά αποτελέσματα για τη γωνιακή ταχύτητα Ω_K και σύγκριση μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και προσέγγισης CFC.

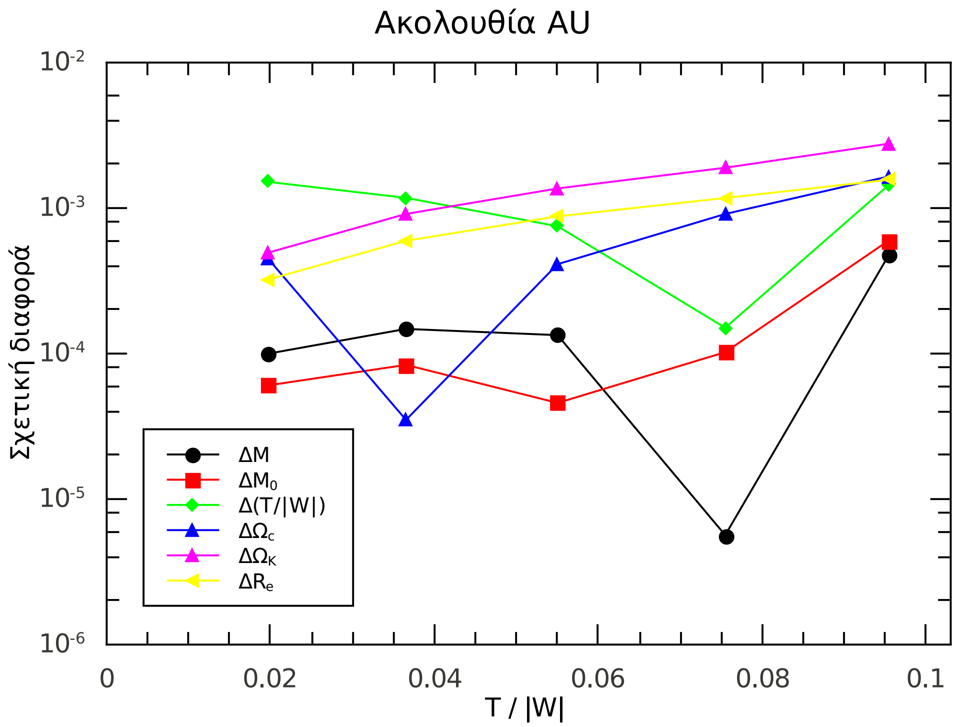
Μοντέλο	πλήρης ΓΘΣ ($\times 10^{-2}$)	CFC ($\times 10^{-2}$)	Σχετική διαφορά	Μοντέλο	πλήρης ΓΘΣ ($\times 10^{-2}$)	CFC ($\times 10^{-2}$)	Σχετική διαφορά
A0	3.987492	3.987492	0.0	B0	3.987492	3.987492	0.0
A1	3.729544	3.730921	-3.692140e-04	B1	3.920722	3.921842	-2.856617e-04
A2	3.540930	3.543331	-6.780705e-04	B2	3.878349	3.880885	-6.538865e-04
A3	3.345807	3.349127	-9.922868e-04	B3	3.838417	3.842743	-1.127027e-03
A4	3.139116	3.143288	-1.329037e-03	B4	3.801831	3.808312	-1.704705e-03
A5	2.920212	2.925136	-1.686179e-03	B5	3.766451	3.775747	-2.468106e-03
A6	2.687035	2.692546	-2.050960e-03	B6	3.734160	3.747162	-3.481908e-03
A7	2.435512	2.441568	-2.486541e-03	B7	3.707280	3.725336	-4.870417e-03
A8	2.165130	2.171600	-2.988273e-03	B8	3.690088	3.715364	-6.849701e-03
A9	1.874800	1.881624	-3.639855e-03	B9	3.690615	3.726685	-9.773439e-03
A10	1.572939	1.580382	-4.731906e-03	B10	3.724212	3.780028	-1.498733e-02
A11	1.307666	1.315343	-5.870765e-03	B11	3.824719	3.904198	-2.078035e-02
A12	1.210515	1.216654	-5.071395e-03	B12	4.035549	4.170378	-3.341032e-02
				B13	4.537836	4.771140	-5.141305e-02
AU0	3.987492	3.987492	0.0	BU0	3.987492	3.987492	0.0
AU1	3.633305	3.635095	-4.926644e-04	BU1	3.864836	3.866095	-3.257577e-04
AU2	3.358187	3.361248	-9.115037e-04	BU2	3.760455	3.763175	-7.233167e-04
AU3	3.054401	3.058569	-1.364588e-03	BU3	3.648790	3.653138	-1.191628e-03
AU4	2.692828	2.697927	-1.893548e-03	BU4	3.524894	3.531051	-1.746719e-03
AU5	2.104291	2.110120	-2.770054e-03	BU5	3.383998	3.392063	-2.383276e-03
				BU6	3.219844	3.229901	-3.123443e-03
				BU7	3.023403	3.035254	-3.919755e-03
				BU8	2.780692	2.793755	-4.697751e-03
				BU9	2.666387	2.679587	-4.950519e-03

Πίνακας 3.12: Αριθμητικά αποτελέσματα για την ακτίνα R_e και σύγκριση μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και προσέγγισης CFC.

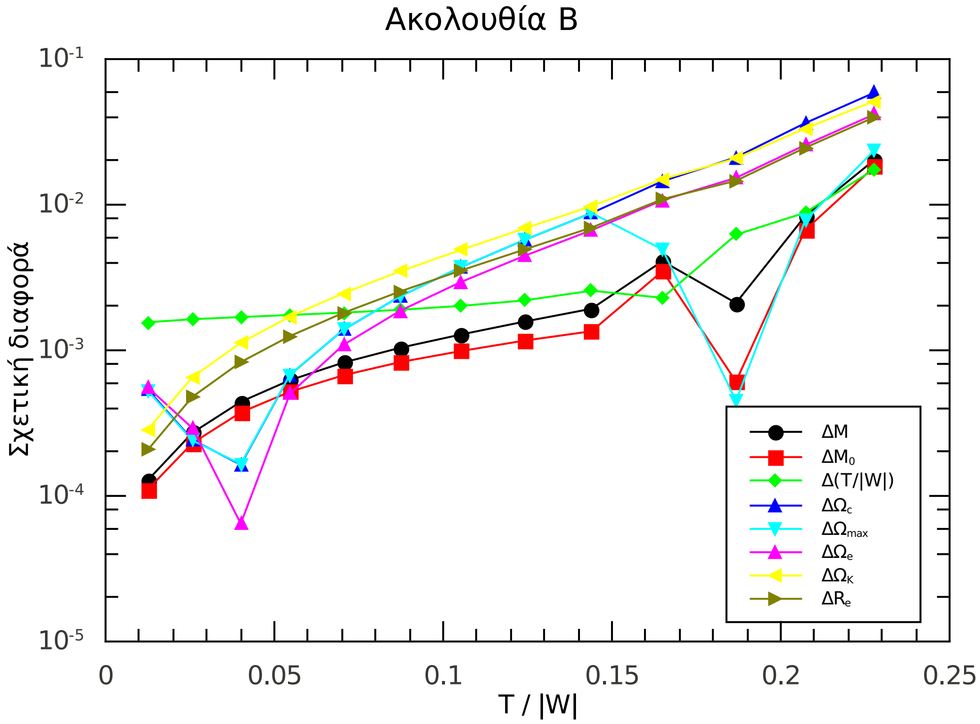
Μοντέλο	πλήρης ΓΘΣ	CFC	Σχετική διαφορά	Μοντέλο	πλήρης ΓΘΣ	CFC	Σχετική διαφορά
A0	9.585049	9.585049	0.0	B0	9.585049	9.585049	0.0
A1	10.01069	10.00801	2.677138e-04	B1	9.746953	9.744935	2.070391e-04
A2	10.39692	10.39176	4.963008e-04	B2	9.920999	9.916244	4.792864e-04
A3	10.84028	10.83242	7.250735e-04	B3	10.11271	10.10432	8.296490e-04
A4	11.37142	11.36054	9.567846e-04	B4	10.31130	10.29838	1.252994e-03
A5	12.00472	11.99037	1.195363e-03	B5	10.52903	10.51001	1.806434e-03
A6	12.77231	12.75423	1.415562e-03	B6	10.76171	10.73445	2.533055e-03
A7	13.75157	13.72875	1.659447e-03	B7	11.00709	10.96838	3.516824e-03
A8	15.01152	14.98295	1.903205e-03	B8	11.25900	11.20369	4.912514e-03
A9	16.69697	16.66063	2.176443e-03	B9	11.50257	11.42243	6.967139e-03
A10	19.03701	18.98744	2.603875e-03	B10	11.70490	11.57710	1.091850e-02
A11	21.91808	21.85089	3.065506e-03	B11	11.78335	11.61112	1.461639e-02
A12	23.32151	23.25738	2.749822e-03	B12	11.64347	11.35687	2.461466e-02
				B13	10.94789	10.51145	3.986522e-02
AU0	9.585049	9.585049	0.0	BU0	9.585049	9.585049	0.0
AU1	10.19235	10.18907	3.218100e-04	BU1	9.829952	9.827876	2.111913e-04
AU2	10.78953	10.78310	5.959481e-04	BU2	10.10488	10.10007	4.760076e-04
AU3	11.55658	11.54644	8.774222e-04	BU3	10.41713	10.40896	7.842851e-04
AU4	12.64405	12.62921	1.173675e-03	BU4	10.77603	10.76372	1.142350e-03
AU5	14.93502	14.91164	1.565448e-03	BU5	11.19466	11.17747	1.535554e-03
				BU6	11.69257	11.66944	1.978179e-03
				BU7	12.29976	12.26999	2.420372e-03
				BU8	13.06638	13.02958	2.816388e-03
				BU9	13.43543	13.39606	2.930312e-03



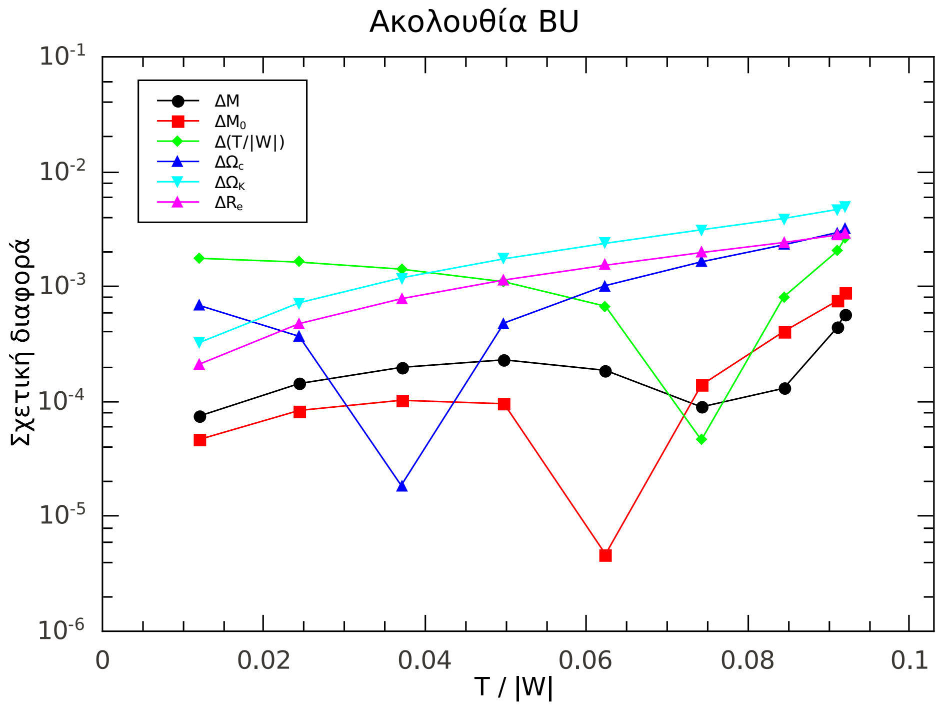
Σχήμα 3.1: Ακολουθία A: Σχετικές διαφορές μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και προσέγγισης CFC για όλα τα φυσικά μεγέθη.



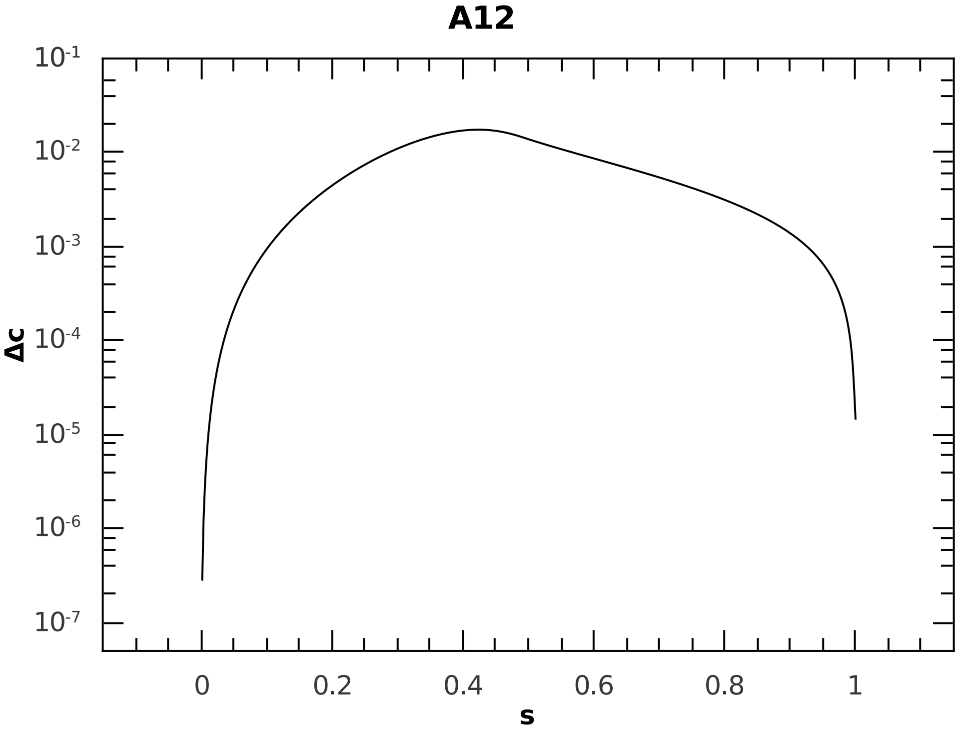
Σχήμα 3.2: Ακολουθία AU: Σχετικές διαφορές μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και προσέγγισης CFC για όλα τα φυσικά μεγέθη.



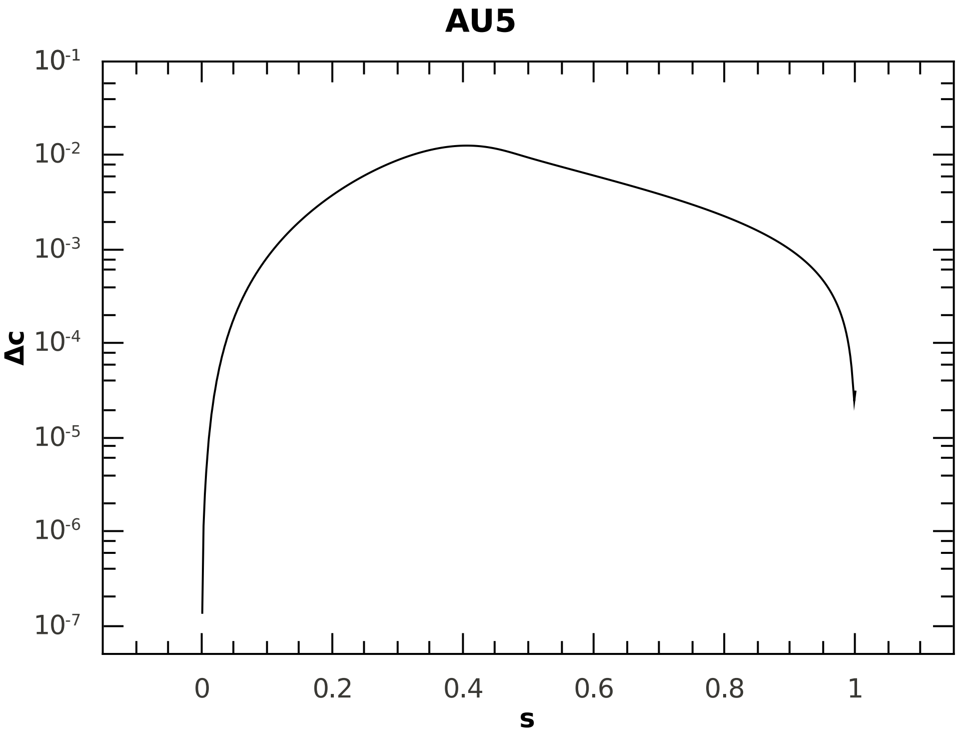
Σχήμα 3.3: Ακολουθία B: Σχετικές διαφορές μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και προσέγγισης CFC για όλα τα φυσικά μεγέθη.



Σχήμα 3.4: Ακολουθία BU: Σχετικές διαφορές μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και προσέγγισης CFC για όλα τα φυσικά μεγέθη.

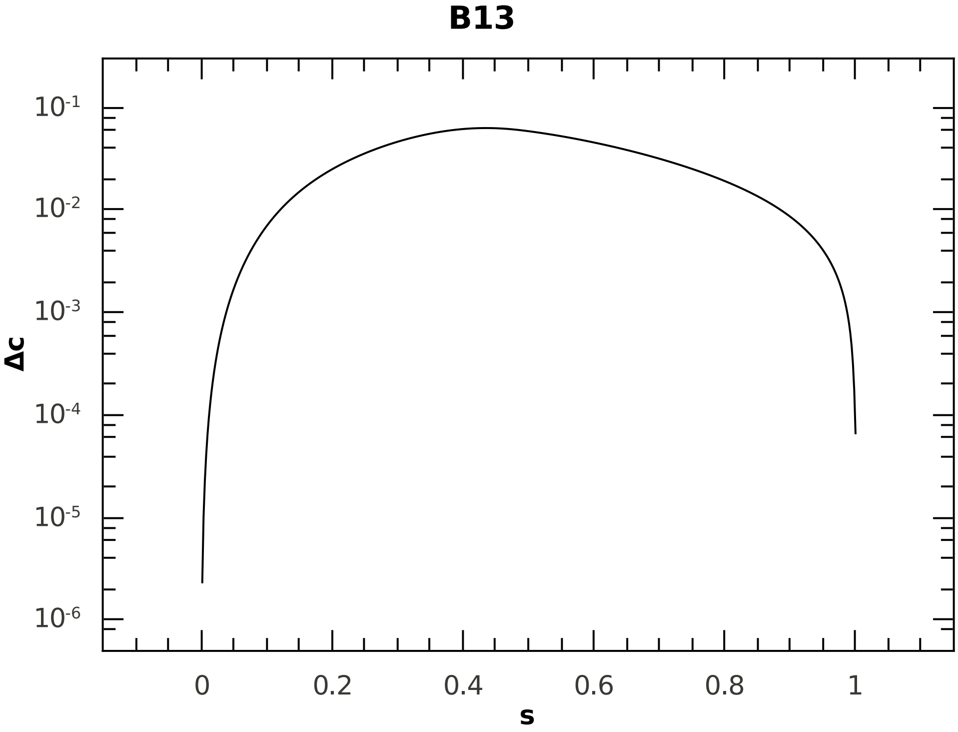


(α′) Μοντέλο A12, $r_p/r_e = 0.25$

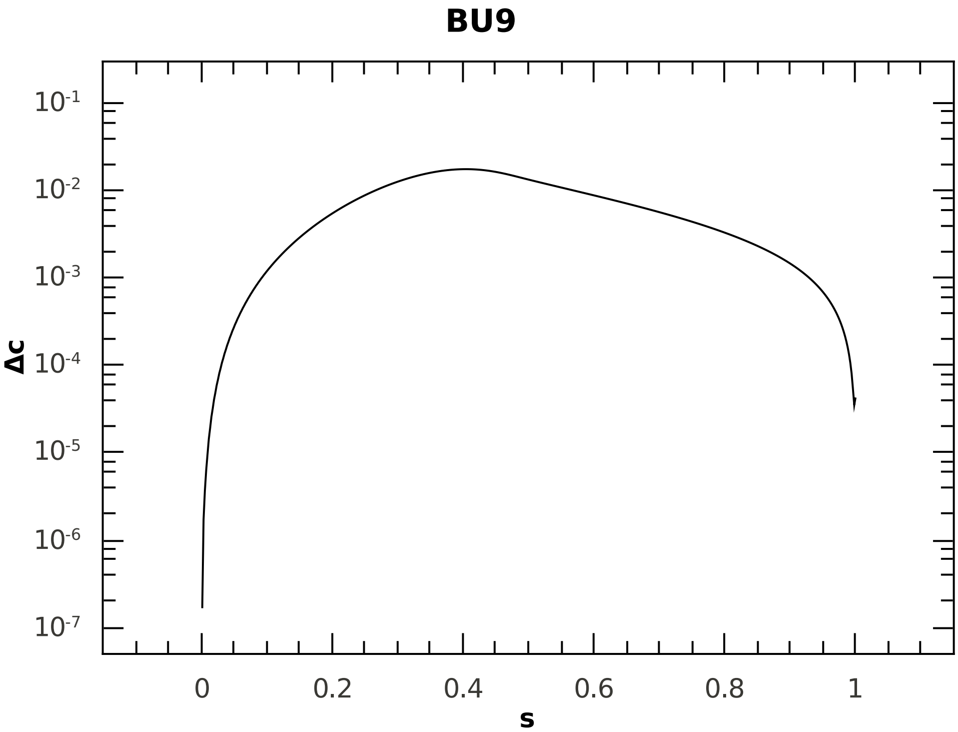


(β′) Μοντέλο AU5, $r_p/r_e = 0.575$

Σχήμα 3.5: Σχετική διαφορά Δc υπολογισμένη στο ισημερινό επίπεδο για το ταχύτερα περιστρεφόμενο μοντέλο κάθε ακολουθίας.

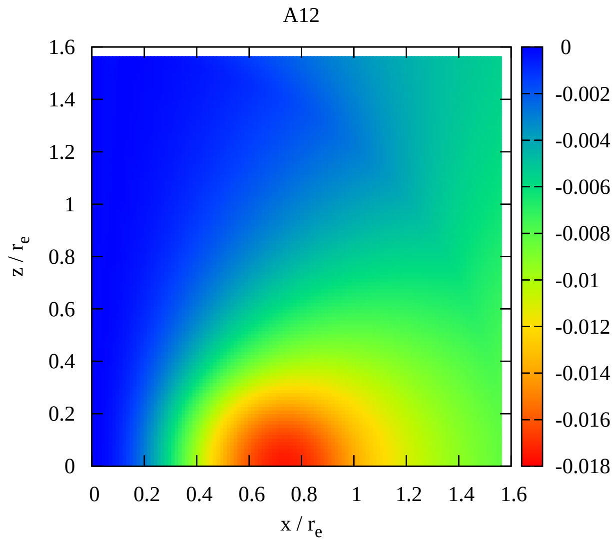


(α′) Μοντέλο B13, $r_p/r_e = 0.34$

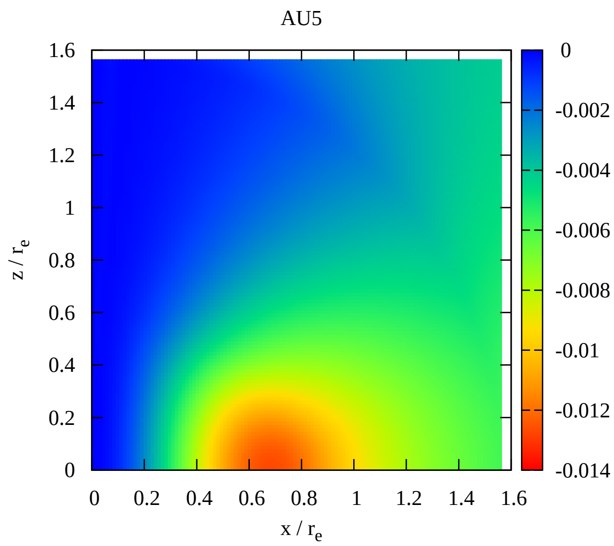


(β′) Μοντέλο BU9, $r_p/r_e = 0.58$

Σχήμα 3.6: Σχετική διαφορά Δc υπολογισμένη στο ισημερινό επίπεδο για το ταχύτερα περιστρεφόμενο μοντέλο κάθε ακολουθίας.

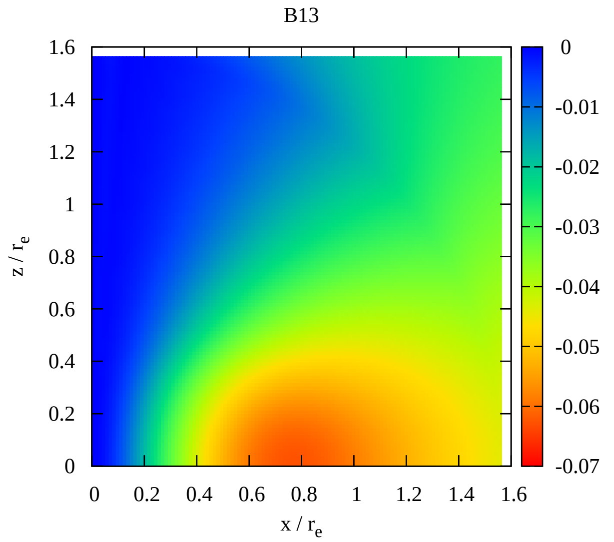


(α΄) Μοντέλο A12, $r_p/r_e = 0.25$

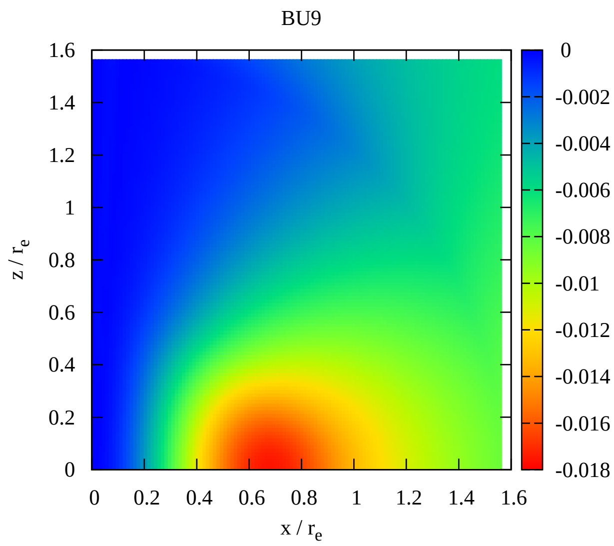


(β΄) Μοντέλο AU5, $r_p/r_e = 0.575$

Σχήμα 3.7: Σχετική διαφορά Δc στο επίπεδο $x - z$ για το ταχύτερο μοντέλο κάθε ακολουθίας.



(α΄) Μοντέλο B13, $r_p/r_e = 0.34$



(β΄) Μοντέλο BU9, $r_p/r_e = 0.58$

Σχήμα 3.8: Σχετική διαφορά Δc στο επίπεδο $x - z$ για το ταχύτερο μοντέλο κάθε ακολουθίας.

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου, αρχικά επαληθεύουμε δημοσιευμένα αποτελέσματα για την ακρίβεια της CFC στην περίπτωση ομογενούς περιστροφής [8]. Συγκεκριμένα, για τις ακολουθίες ομογενούς περιστροφής AU και BU, η σχετική διαφορά μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και CFC *για τα φυσικά μεγέθη* που μελετήθηκαν δεν υπερβαίνει σε καμία περίπτωση το 1% (Σχήματα 3.2 και 3.4). Μάλιστα είναι αρκετά μικρότερη και σε τάξη μεγέθους κυμαίνεται μεταξύ 10^{-5} και 10^{-3}. Τα ταχύτερα περιστρεφόμενα μοντέλα AU5 και BU9 παρουσιάζουν τις μεγαλύτερες τιμές σχετικών διαφορών, αλλά όπως προαναφέραμε ακόμη κι αυτές είναι ιδιαίτερα μικρές. Για τα μοντέλα AU5 και BU9, η διαγνωστική ποσότητα Δc, σχέση (3.40), που υπολογίσαμε συμφωνεί επίσης με τα αποτελέσματα των Cook, Shapiro και Teukolsky [8] καθώς η μέγιστη απόκλιση είναι μικρότερη του 2% όπως παρατηρούμε από τα σχήματα 3.5β′, 3.6β′, 3.7β′ και 3.8β′.

Το στοιχείο που εισάγει η παρούσα εργασία είναι η αξιολόγηση της ακρίβειας της προσέγγισης CFC για την περίπτωση διαφορικής περιστροφής. Στην ακολουθία A, η εικόνα που παρατηρείται δεν απέχει πολύ από την περίπτωση της ομογενούς περιστροφής. Συγκεκριμένα, για όλα τα φυσικά μεγέθη οι σχετικές διαφορές είναι μεν υψηλότερες σε σχέση με την ομογενή περιστροφή, αλλά παραμένουν αρκετά μικρές και κάτω από 1% (Σχήμα 3.1) ακόμη και για τα ταχύτερα περιστρεφόμενα μοντέλα αυτής της ακολουθίας. Οι τάξεις μεγέθους των σχετικών διαφορών κυμαίνονται από 10^{-4} έως 10^{-3}. Η διαγνωστική ποσότητα Δc για το ταχύτερα περιστρεφόμενο μοντέλο A12 (Σχήματα 3.5α′ και 3.7α′), παραμένει κάτω από το 2% και η μέγιστη απόκλιση παρατηρείται στο ισημερινό επίπεδο, στην επιφάνεια του αστέρα.

Στην ακολουθία B αρχίζουμε και παρατηρούμε σημαντικότερες αποκλίσεις. Συγκεκριμένα, για τις γωνιακές ταχύτητες που υπολογίζουμε καθώς και για την ακτίνα R_e, οι σχετικές διαφορές είναι μεγαλύτερες και ανέρχονται στα επίπεδα του 2-4% καθώς αυξάνεται η ταχύτητα περιστροφής (Σχήμα 3.3). Το ταχύτερα περιστρεφόμενο μοντέλο B13, παρουσιάζει για τις γωνιακές ταχύτητες Ω_c και Ω_K σχετικές διαφορές περίπου 6% και 5% αντίστοιχα. Αυτές είναι μεγαλύτερες τιμές σχετικών διαφορών που συναντήσαμε στο σύνολο των αριθμητικών υπολογισμών που εκτελέσαμε. Όμως, για τα φυσικά μεγέθη M, M_0 και $T/|W|$ οι σχετικές διαφορές παραμένουν στο 2%. Αυτό οφείλεται στο ότι τα συγκεκριμένα μεγέθη προκύπτουν από ολοκληρώματα, ενώ οι γωνιακές ταχύτητες είναι τοπικές τιμές και αντικατοπτρίζουν σε μεγαλύτερο βαθμό την αύξηση της περιστροφής, δηλαδή τη μείωση του λόγου r_p/r_e. Από τα σχήματα 3.6α′ και 3.8α′ για την ποσότητα Δc επιβεβαιώνεται επίσης ότι η μέγιστη απόκλιση από την πλήρη ΓΘΣ παρατηρείται στο ισημερινό επίπεδο, στην επιφάνεια του αστέρα και είναι της τάξης του 6%.

Όπως είναι αναμενόμενο η αύξηση της περιστροφής του αστέρα νετρονίων οδηγεί σε αύξηση των σχετικών διαφορών που υπολογίζουμε. Μπορεί λοιπόν η απόκλιση μεταξύ πλήρους ΓΘΣ και προσέγγισης CFC ν' αυξάνεται όσο μειώνεται ο λόγος r_p/r_e, όμως για να παρατηρήσουμε σημαντικές αποκλίσεις πρέπει να φτάσουμε σε επίπεδα πολύ ταχείας περιστροφής, δηλαδή σε αρκετά ακραία μοντέλα. Ακόμη κι εκεί όμως οι αποκλίσεις παραμένουν αρκετά κάτω από το 10%. Συνεπώς, όταν δεν έχουμε πολύ υψηλές απαιτήσεις ακρίβειας και σφάλματα μέχρι τα επίπεδα του 5% θεωρούνται ανεκτά, η προσέγγιση CFC μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη περιστρεφόμενων σχετικιστικών αστέρων, ενώ φαίνεται ότι αποτελεί μία εύρωστη επιλογή τόσο στην περίπτωση ομογενούς όσο και στην περίπτωση διαφορικής περιστροφής.

Βιβλιογραφία

[1] M. Alcubierre: *Introduction to 3+1 Numerical Relativity.* Oxford University Press, 2008.

[2] M. Ansorg, A. Kleinwächter, and R. Meinel: *Highly accurate calculation of rotating neutron stars.* Astron. Astrophys., 381:L49–L52, 2002.

[3] T. W. Baumgarte and S. L. Shapiro: *Numerical Relativity, Solving Einsteins 's Equations on the Computer.* Cambridge University Press, 2010.

[4] S. M. Carroll: *Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity.* Addison Wesley, 2003.

[5] G. B. Cook, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky: *Spin–up of a rapidly rotating star by angular momentum loss – Effects of general relativity.* Astrophys J., 398:203–223, 1992.

[6] G. B. Cook, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky: *Rapidly rotating neutron stars in general relativity: Realistic equations of state.* Astrophys J., 424:823–845, 1994.

[7] G. B. Cook, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky: *Rapidly rotating polytropes in general relativity.* Astrophys J., 422:227–242, 1994.

[8] G. B. Cook, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky: *Testing a simplified version of Einstein's equations for numerical relativity.* Phys. Rev. D, 53:5533–5540, 1996.

[9] H. Dimmelmeier: *General Relativistic Collapse of Rotating Stellar Cores in Axisymmetry.* PhD thesis, Physik–Department, Technische Universität München, 2001.

[10] J. L. Friedman and N. Stergioulas: *Rotating Relativistic Stars.* Cambridge University Press. Not yet published – available from April 2012.

[11] E. Gourgoulhon: *3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity.* arXiv:gr-qc/0703035v1, 2007.

[12] J. B. Hartle: *Gravity, An Introduction to Einstein's General Relativity.* Addison Wesley, 2002.

[13] J. A. Isenberg: *Waveless approximation theories of gravity.* Int. J. Mod. Phys. D., 17:265–273, 2008.

[14] H. Komatsu, Y. Eriguchi, and I. Hachisu: *Rapidly rotating general relativistic stars. I – Numerical method and its application to uniformly rotating polytropes.* Mon. Not. R. Astron. Soc., 237:355–379, 1989.

[15] H. Komatsu, Y. Eriguchi, and I. Hachisu: *Rapidly rotating general relativistic stars. II – Differentially rotating polytropes.* Mon. Not. R. Astron. Soc., 239:153–171, 1989.

[16] M. Miller and W.-M. Suen: *Towards a Realistic Neutron Star Binary Inspiral.* arXiv:gr-qc/0301112v1, 2003.

[17] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler: *Gravitation.* W. H. Freeman, 1973.

[18] T. Nozawa, N. Stergioulas, E. Gourgoulhon, and Y. Eriguchi: *Construction of highly accurate models of rotating neutron stars–comparison of three different numerical schemes.* Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 132:431–454, 1998.

[19] C. D. Ott, H. Dimmelmeier, A. Marek, H. T. Janka, I. Hawke, B. Zink, and E. Schnetter: *3D Collapse of Rotating Stellar Iron Cores in General Relativity including Deleptonization and a Nuclear Equation of State.* Phys. Rev. Lett., 98(26):261101, 2006.

[20] B. F. Schutz: *A First Course in General Relativity.* Cambridge University Press, 2nd edition, 2009.

[21] N. Stergioulas: *RNS.* http://www.gravity.phys.uwm.edu/rns. public domain code.

[22] N. Stergioulas, T. A. Apostolatos, and J. A. Font: *Non–linear pulsations in differentially rotating neutron stars: mass–shedding–induced damping and splitting of the fundamental mode.* Mon. Not. R. Astron. Soc., 352:1089–1101, 2004.

[23] N. Stergioulas and J. L. Friedman: *Comparing models of rapidly rotating relativistic stars constructed by two numerical methods.* Astrophys. J., 444:306–311, 1995.

[24] R. M. Wald: *General Relativity.* Chicago University Press, 1984.

[25] J. R. Wilson, G. J. Mathews, and P. Marronetti: *Relativistic numerical model for close neutron star binaries.* Phys. Rev. D, 54:1317–1331, 1996.

[26] N. K. Σπύρου: *Εισαγωγή στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.* Εκδόσεις Γαρταγάνη, δεύτερη έκδοση, 1989.