ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 1.

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y\cos x + (\sin x + 3y^2)\,y' = 0$

Λύση

Η ΔΕ γράφεται $y\cos x\,dx + (\sin x + 3y^2)dy = 0 \qquad (Pdx + Qdy = 0)$

Έλεγχος Πληρότητας

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos x = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{ΔΕ} \quad \text{πληρης}$$

Η λύση θα είναι της μορφής Φ(x,y)=C, με $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = P \quad \& \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = Q$. Έτσι

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y\cos x \Rightarrow (\int_x \ ) \Rightarrow \Phi = y\sin x + c(y) \quad (1)$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \sin x + \frac{\partial c}{\partial y} = Q = \sin x + 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 3y^2 \quad \Rightarrow \quad c = y^3 + \sigma\tau\alpha\theta.$$

Ετσι για σταθ.=0, η (1) μας δίνει $\Phi = y\sin x + y^3$, δηλαδή η γενική λύση θα είναι η

$$y\sin x + y^3 = C$$

ΘΕΜΑ 2.

Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας καμπύλων

$$r = c\left(1 + \sin\theta\right),$$

όπου r,θ πολικές συντεταγμένες και c η αυθαίρετη σταθερά. Ποιες συγκεκριμένες καμπύλες τέμνονται κάθετα στο σημείο $x = y = \sqrt{2}$.

*Η γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ με την εφαπτομένη της καμπύλης $r = r(\theta)$ δίνεται από τη σχέση $\tan\theta = r\dfrac{d\theta}{dr}$. Επίσης $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln\left|\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right|$.

Λύση

Η δοθείσα οικογένεια αποτελεί λύση της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης

$$\left.\begin{aligned} r &= c(1+\sin\theta) \\ \frac{dr}{d\theta} &= c\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} r &= c(1+\sin\theta) \\ c &= \frac{1}{\cos\theta}\frac{dr}{d\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{rd\theta}{dr} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

Έτσι οι ορθογώνιες τροχιές θα δίνονται ως λύση της ΔΕ

$$\frac{rd\theta}{dr} = -\frac{1}{\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}} \quad \Rightarrow \quad \frac{rd\theta}{dr} = -\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}d\theta = \frac{dr}{r}$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών, παίρνουμε τη ζητούμενη οικογένεια ορθογώνιων καμπύλων

$$\int \frac{dr}{r} = -\int \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} d\theta = -\int \frac{d\theta}{\cos\theta} - \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta} d\theta \quad \Rightarrow \ln r = -\ln\left|\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right| + \ln|\cos\theta| + c \Rightarrow$$

$$\ln r = \ln\left|\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}\right| + c = \ln\left|\frac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}\right| + c = \ln|1-\sin\theta| + c \quad \Rightarrow \quad r = c(1-\sin\theta)$$

Οι αρχικές συνθήκες $x = y = \sqrt{2}$ αντιστοιχούν σε $r = 2, \quad \theta = 45^{o}$.

Για την καμπύλη $r = c\left(1+\sin\theta\right)$ έχουμε $2 = c(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow c = \dfrac{4}{2+\sqrt{2}}$

Για την καμπύλη $r = c\left(1-\sin\theta\right)$ έχουμε $2 = c(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow c = \dfrac{4}{2-\sqrt{2}}$.

Άρα οι καμπύλες $r = \dfrac{4}{2+\sqrt{2}}\left(1+\sin\theta\right)$ και $r = \dfrac{4}{2-\sqrt{2}}\left(1-\sin\theta\right)$ περνούν από το σημείο $x = y = \sqrt{2}$ και τέμνονται κάθετα.

ΘΕΜΑ 3.

Μια μάζα 10Kgr αναρτάται από ελατήριο με σταθερά k=140N/m. Η μάζα τίθεται σε κίνηση στον άξονα Ox από την θέση ισορροπίας με αρχική ταχύτητα -1m/sec και με την εφαρμογή εξωτερικής δύναμης $F(t)$=5sin$t$ N. Προσδιορίστε την κίνηση $x=x(t)$ που θα προκύψει αν η δύναμη που οφείλεται στην αντίσταση του αέρα είναι ίση με $F_a = -90\dot{x}$ N.

Λύση

Η ΔΕ που περιγράφει την κίνηση είναι η

$$m\ddot{x} = -kx + F_a + F_{\varepsilon\xi} \quad \Rightarrow \quad 10\ddot{x} + 90\dot{x} + 140x = 5\sin t$$

Έχουμε λοιπόν μια 2^{ης} τάξης πλήρη γραμμική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο (ΧΠ) της ομογενούς είναι το $10\rho^2 + 90\rho + 140 = 0$ με ρίζες τις –2 και –7. Άρα η γενική λύση της ομογενούς θα είναι η

$$x_o = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-7t}$$

Μια μερική λύση της πλήρους μπορεί να είναι της μορφής $x_1 = A\sin t + B\cos t$ αφού το $\pm\mathbf{i}$ δεν αποτελεί ρίζα του Χ.Π. Αντικαθιστώντας την x_1 στην ΔΕ βρίσκουμε ότι την ικανοποιεί για A=13/500 και B=-9/500, δηλαδή

$$x_1 = \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$$

Επομένως η γενική λύση θα είναι η

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-7t} + \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$$

και επίσης

$$\dot{x} = -2c_1 e^{-2t} - 7c_2 e^{-7t} + \frac{13}{500}\cos t + \frac{9}{500}\sin t$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις τις αρχικές συνθήκες $x(0)=0$ και $\dot{x}(0) = -1$, βρίσκουμε

$$c_1 = -\frac{90}{500}, \quad c_2 = \frac{99}{500} \qquad \to \qquad x = -\frac{90}{500}e^{-2t} + \frac{99}{500}e^{-7t} + \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$$

ΘΕΜΑ 4.

Κύμα, που διαδίδεται με ταχύτητα υ κατά την διεύθυνση του άξονα O*x,* έχει πλάτος y που περιγράφεται από την εξίσωση κύματος

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Να βρεθεί η γενική λύση $y=y(x,t)$.

Λύση

Έχουμε μια γραμμική ΔΕΜΠ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Την γράφουμε με τη βοήθεια των τελεστών παραγώγισης D_x, D_t ως

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \upsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (D_t^2 - \upsilon^2 D_x^2)y = 0 \quad \Rightarrow \quad (D_t - \upsilon D_x)(D_t + \upsilon D_x)y = 0$$

Άρα η ΔΕΜΠ είναι αναγώγιμη και η λύση της θα είναι το άθροισμα των λύσεων των δύο παραγόντων-εξισώσεων

$$(D_t - \upsilon D_x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial t} - \upsilon \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \phi_1(x + \upsilon t)$$

$$(D_t + \upsilon D_x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \phi_2(x - \upsilon t)$$

όπου ϕ_1, ϕ_2 αυθαίρετες συναρτήσεις.

Άρα η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης είναι η

$$y = \phi_1(x + \upsilon t) + \phi_2(x - \upsilon t)$$