

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ - ΟΜΑΔΑ Β

Ιανουάριος 2009

1. Ένας ομογενής δισκοειδής γαλαξίας σταθερού ύψους z_0 χάνει μάζα με ρυθμό ανάλογο της συνολικής του μάζας παραμένοντας συνεχώς ομογενής. Αν σε χρόνο $T_0=2$ γαλαξιακές χρονικές μονάδες χάσει το 50% της μάζας του, ζητείται να βρεθεί ο χρόνος που θα του έχει απομείνει μόνο το 25% της αρχικής του μάζας.

(Απ. $T=4$).

2. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\omega=\omega(r)$ του Γαλαξία μας είναι φθίνουσα συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο του. Αν για την κυκλική ταχύτητα περιστροφής του ισχύει

$$\frac{d\Theta}{dr} = \frac{\omega}{2},$$

ζητείται να βρεθεί και να σχεδιαστεί η μορφή της καμπύλης $\omega=\omega(r)$.

(Απ. $\omega=k/r^2$)

3. Ένα τούβλο αρχικής θερμοκρασίας 20°C τοποθετείται σε φούρνο του οποίου η θερμοκρασία τη χρονική στιγμή t είναι $70+5t^\circ\text{C}$. Ζητείται να βρεθεί η θερμοκρασία του τούβλου τη χρονική στιγμή t . Η σταθερή αναλογίας στο νόμο του Newton να ληφθεί ίση με τη μονάδα..

(Απ. $T(t) = 65 + 5t - 45e^{-t}$)

4. Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y'^2 + y' + x = 0.$$

(Απ. $x = p^2 - p, y = -2p^3/3 - p^2/2 + C$)

5. Να λυθεί η Δ.Ε.

$$xy' + 1 = e^y.$$

(Απ. $y = -\ln(Cx+1), Cx+1 > 0$)

6. Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y(y-1)y'' + y'^2 = 0.$$

(Απ. $y - \ln|y| - C_1x = C_2$)

7. Υποθέτουμε ότι ο νόμος της παγκόσμιας έλξης έχει τη μορφή

$$F(r) = -k \frac{mM}{r^3},$$

όπου r είναι η απόσταση, M, m οι μάζες των δύο σωμάτων και k σταθερά. Δείξτε ότι ο χρόνος ελεύθερης πτώσης ενός σώματος από ύψος h από την επιφάνεια της Γης, δίνεται από τη σχέση

$$T = \frac{\delta \sqrt{\delta^2 - R^2}}{\sqrt{kM}},$$

όπου M, R η μάζα και η ακτίνα της Γης αντίστοιχα και $\delta = R + h$ η αρχική απόσταση του σώματος από το κέντρο της Γης.

8. Η Δ.Ε της πτώσης ενός σώματος μάζας m το οποίο δέχεται αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας είναι

$$m \frac{dv}{dt} = kv - mg, \quad (1)$$

όπου $v(0)=0, k=0.1, m=1$. Τι συμβαίνει όταν $k=0$;

(Απ. $v(t) = 10g(e^{-0.1t} - 1)$)

9. Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\frac{dx(t)}{dt} = x^2(t) - 1,$$

όταν $x(0) = 0$.

(Απ. $x(t) = (1 - e^{2t}) / (1 + e^{2t})$)

10. Η εξέλιξη του πληθυσμού $P(t)$ κάποιου είδους εντόμων περιγράφεται από τη Δ.Ε.

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P)$$

όπου $k > 0, M > 0$ είναι σταθερές. Λύστε την εξίσωση όταν $k=1, M=1000$ και $P(0)=100$.

(Απ. $P(t) = 1000 / (1 + 9e^{-1000kt})$).

11. Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y' - 3y = e^{3x} \sin x$$

(Απ. $ye^{-3x} + \cos x = C$)

12. Ένα μεταλικό δοχείο νερού 100°C τοποθετείται σε δωμάτιο με θερμοκρασία 25°C και σε 30 λεπτά η θερμοκρασία του κατεβαίνει στους 80°C . Χρησιμοποιώντας το νόμο της ψύξεως του Newton, ζητείται να βρεθεί η τιμή της σταθερής αναλογίας k . Πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να φθάσει το νερό την θερμοκρασία του δωματίου;

(Απ. $T=25+75e^{kt}$, $k=-0.0103$)

13. Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y^2 - x^2 - 2xyy' = 0$$

(Απ. $x^2 + y^2 = x/C$)

14. Να λυθεί η Δ.Ε.

$$x^2 - y + (y^2 - x)y' = 0$$

(Απ. $x^3 + y^3 - 3xy = C$)

15. Δείξτε ότι η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'' + y = 0,$$

μπορεί να γραφεί με τη μορφή $y = A_0 \sin(x + \varphi_0)$, όπου A_0, φ_0 είναι αυθαίρετες σταθερές.

16. Οι ταχύτητες ενός σωματιδίου το οποίο εκτελεί επίπεδη κίνηση δίνονται από τις εξισώσεις: $v_x = x$, $v_y = x + y$. Ζητείται να βρεθεί η τροχιά του σωματιδίου.

(Απ. $y = (C + \ln x)x$, $x > 0$)

17. Σωματίδιο με μάζα ίση με τη μονάδα εκτελεί μονοδιάστατη κίνηση σύμφωνα με την Δ.Ε.

$$\ddot{x} + x = e^t,$$

και υπόκειται στις αρχικές συνθήκες $x(0) = 0$, $x(\pi) + \dot{x}(\pi) = 0$. Ζητείται να βρεθεί η θέση του σωματιδίου την χρονική στιγμή t .

(Απ. $x = -\frac{1}{2} \cos t + (\frac{1}{2} + e^{\pi}) \sin t + \frac{1}{2} e^t$)

18. Σύμφωνα με τους ψυχολόγους, ο αριθμός των λέξεων χωρίς κανένα νόημα που μπορεί να αποστηθίσει ένας άνθρωπος, χωρίς κανένα χρονικό περιορισμό στη μελέτη του είναι περιορισμένος. Αν δεχτούμε ότι ο ρυθμός εκμάθησης είναι ανάλογος των λέξεων που δεν έχουν απομνημονευθεί και το όριο είναι 100 λέξεις, ζητείται να βρεθεί ο αριθμός των λέξεων που μπορεί να απομνημονευθεί σε 2 ώρες όταν $k=0.03$.

(Απ. 6 λέξεις)

19. Δεχόμαστε ότι η ταχύτητα αύξησης του πληθυσμού μιας χώρας είναι ανάλογη του πληθυσμού της. Αν ο πληθυσμός της διπλασιαστεί σε 30 χρόνια σε πόσα χρόνια θα πενταπλασιαστεί; Αν δεχτούμε ότι θα υποδιπλασιαστεί σε 30 χρόνια πόσα χρόνια χρειάζονται για να μείνει το $1/10$ του αρχικού πληθυσμού στη χώρα;

(Απ. $T_\alpha=70$ χρόνια, $T_\beta=100$ χρόνια .)

20. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα λύστε την Δ.Ε.

$$\frac{dy}{dx} + xy = x,$$

που υπόκειται στην αρχική συνθήκη $y(0) = 0$.

(Απ. $y = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$)

21. Δείξτε ότι η γενική λύση της Δ.Ε.

$$2xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2,$$

μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$x = K(x^2 - y^2)$$

όπου K είναι σταθερή.

22. Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y' = \frac{3xy^2 + x}{2x^2y - 1}.$$

(Απ. $y = \left\{ \left[C(2x^2 - 1)^{3/2} - 1 \right] / 3 \right\}^{1/2}$)

23. Να λυθεί η Δ.Ε.

$$7x(x - y)dy = 2(x^2 + 6xy - 5y^2)dx,$$

αν για $x=1$ είναι $y=0$.

(Απ. $2x = \left[\frac{x+3y}{x} \right]^{4/3} \left[\frac{2x-y}{x} \right]$)

24. Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{y},$$

που υπακούει στις αρχικές συνθήκες $y = 4$ όταν $x = 1$.

25. Μια χημική βιομηχανία μολύνει με τοξικά απόβλητα παρακείμενη λίμνη με τέτοιο ρυθμό ώστε η συγκέντρωση u των τοξικών ουσιών να ακολουθεί τη Δ.Ε.

$$\frac{du}{dt} - 0.52u = 0.02.$$

Αν η ισχύει $u(0) = 0$, ζητείται να βρεθεί η μορφή της συνάρτησης $u = u(t)$. Σε πόσο χρονικό διάστημα θα έχουμε $u = 0.02$;

$$(\text{Απ. } u = \frac{1}{26}(e^{0.52t} - 1))$$