

Ανάλυση II

Σεπτέμβριος 2012

(Λύσεις)

Θέμα 1ο: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μερικής παραγώγου να βρείτε τις τιμές των παραγώγων $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2} - \left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)^{1/2}, x > 0, y > 0.$$

Λύση:

Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 - \left[\frac{(\Delta x)^2}{4}\right]^{1/2}}{\Delta x} = -\frac{1}{2}$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει

$$f_y(0, 0) = -1.$$

Θέμα 2ο: (α) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x, y) = (2x^2 + y^2)^{1/2}, x > 0, y > 0, \quad (1)$$

στο σημείο $P(0, 1)$ κατά την κατεύθυνση της κλίσης του. (β) Να βρεθεί αν υπάρχουν κατευθύνσεις όπου η παράγωγος κατά κατεύθυνση της συνάρτησης 1 στο σημείο $P(0, 1)$ παίρνει τις τιμές 1, -1, 2.

Λύση:

Βρίσκουμε

(i)

$$(\nabla f)_P = \mathbf{e}_y = \mathbf{a}_0, D_{\mathbf{a}}f = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1$$

(ii)

Αν θέσουμε τώρα

$$\mathbf{a}_0 = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y$$

Τότε

$$(\nabla f)_P \cdot \mathbf{a}_0 = \sin \theta$$

Και επιτρέπονται μόνο οι τιμές ± 1 .

Θέμα 3ο: Να εξετασθεί η ύπαρξη ή όχι των ορίων

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} \quad \text{και} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^2 + y^2}.$$

Λύση: α) Αντικαθιστώντας $y = mx^3$, βλέπουμε ότι το όριο εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου m . Συνεπώς δεν υπάρχει.

β) Έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 x}{x^2 + y^2}.$$

Ισχύουν επίσης οι σχέσεις

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \quad \text{και} \quad \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{y^2 x}{x^2 + y^2} \right| \leq |x|.$$

Όμως, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 = \lim_{y \rightarrow 0} y$. Επομένως,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

Θέμα 4ο: Ο ρυθμός μεταβολής της περιστροφής ($\vec{\omega}$) ενός ιδανικού ρευστού με ταχύτητα $\vec{u}$, δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}). \quad (2)$$

Έστω ότι $\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$ και $\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z$, με $u_x = u_x(x), u_y = u_y(y)$ και $\omega_z = \omega_z(z)$.

Με αυτά τα δεδομένα και γνωρίζοντας ότι $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$, να προσδιορίσετε τη μορφή της σχέσης 2. Με βάση την τελευταία, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της περιστροφής ενός διαστελλόμενου ρευστού ελαττώνεται με τον χρόνο, ενώ αυτός ενός συσπασμένου αυξάνει.

Λύση: Από τους ορισμούς του εξωτερικού γινομένου και της στροφής προκύπτουν οι σχέσεις

$$\vec{u} \times \vec{\omega} = u_y \omega_z \vec{e}_x - u_x \omega_z \vec{e}_y$$

και

$$\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) = \frac{\partial}{\partial z} (u_x \omega_z) \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial z} (u_y \omega_z) \vec{e}_y - \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_x \omega_z) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y \omega_z) \right] \vec{e}_z,$$

αντίστοιχα. Άρα, εφόσον $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = \partial \omega_z / \partial z = 0$ και $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y$, η εξίσωση 2 γράφεται

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\vec{\omega}.$$

Συνεπώς, στην περίπτωση διαστολής, δηλαδή όταν $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} > 0$, ο ρυθμός περιστροφής ελαττώνεται. Αντίθετα, η συστολή αυξάνει την περιστροφή.

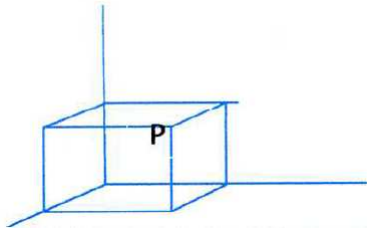
Θέμα 5ο: Αν $w = f(x, y, z)$ και τα (x, y, z) επαληθεύουν τη συνάρτηση $g(x, y, z) = 3$ και στο σημείο $P(0, 0, 0)$ έχουμε $\nabla f = (1, 2, 2)$ και $\nabla g = (2, -1, -1)$. Υπολογίστε τις τιμές των παραγώγων (α) $\partial z / \partial x$, (β) $\partial w / \partial x$, στο σημείο P .

Λύση: Από τη σχέση $g(x, y, z) = 3$ και $\nabla g = (2, -1, -1)$ έχουμε

$$g_x + g_z(\partial z / \partial x) = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 2,$$

όμοια βρίσκουμε ότι $(\partial w / \partial x) = 5$.

Θέμα 6ο: Να υπολογισθεί ο μέγιστος όγκος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου του σχήματος, αν το σημείο P της κορυφής που είναι διαγώνια στο σημείο $(0, 0, 0)$ κινείται πάνω στην επιφάνεια $x^2 + y^2 + z = 1$.



Λύση: Ο όγκος $V = xyz = xy(1 - x^2 - y^2)$ και τα ακρότατα υπολογίζονται από τις σχέσεις $V_x = V_y = 0$. Αν υποθέσουμε ότι $x > 0$, $y > 0$, τότε $(x, y) = (1/2, 1/2)$. Υπολογίζοντας στο σημείο αυτό τις παραγώγους $V_{xx}(1/2, 1/2) = -3/2$, $V_{yy}(1/2, 1/2) = -3/2$, $V_{xy}(1/2, 1/2) = -1/2$, $V_{xy}^2 - V_{xx}V_{yy} < 0$ και καταλήγουμε ότι ο όγκος είναι μέγιστος.