

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

1η Ομάδα Προβλημάτων 18 Μαρτίου 2011¹

1. Επαναλάβετε το λυμένο παράδειγμα με τις βολές προσθέτοντας την αντίσταση του αέρα που θα είναι $-bu$ για $0 \leq b \leq 1$.
2. Ένα βλήμα εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $20m/sec$ με γωνία 30° . Λίγο αργότερα διασπάται σε δύο τμήματα ένα εκ των οποίων έχει διπλάσια μάζα από το δεύτερο. Τα δύο βλήματα προσγειώνονται συγχρόνως. Το ελαφρύτερο σε απόσταση $20m$ από το σημείο εκτόξευσης προς τη διεύθυνση που εκτοξεύτηκε αρχικά το βλήμα.
 - Που προσγειώνεται το έτερο βλήμα;
 - Δημιούργησε τις γραφικές παραστάσεις των δύο τροχιών, αλλά και αυτή του κέντρου μάζης.
 - Δημιούργησε μια συνάρτηση που θα δημιουργεί το γράφημα της κίνησης των δύο τμημάτων και του κέντρου μάζης όταν δίνονται: η αρχική ταχύτητα, η μάζα των τμημάτων και το σημείο πρόσπτωσης του ενός από τα τμήματα.
3. Στο πρόβλημα των συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών δοκιμάστε για τις ίδιες αρχικές τιμές τις τιμές $c_1 = 40 Nm^{-1}$, $c_2 = 30 Nm^{-1}$ και $c = 10 Nm^{-1}$
4. Θεωρήστε το πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή με μια εξωτερική δύναμη διέγερσης για τον οποίον η εξίσωση κίνησης γράφεται ως

$$x''(t) + \gamma x'(t) + \omega_0^2 x(t) = Q_0 \cos(\omega_d t)$$

όπου $4\omega_0^2 > \gamma$. Η λύση θα είναι η υπέρθεση της λύσης της ομογενούς ΔΕ και μιας μερικής λύσης.

- (α) Βρείτε τη λύση της ομογενούς ΔΕ.
 - (β) Υποθέστε ότι η μερική λύση είναι της μορφής $A \cos(\omega_d t + \delta_f)$ και υπολογίστε τα A και δ_f . Γράψτε τη γενική μορφή της λύσης.
 - (γ) Δημιουργήστε γραφικές παραστάσεις της λύσης ως συνάρτηση του ω_0 και του t . Δημιουργήστε γραφικές παραστάσεις του A ως συνάρτηση του ω_0 και του γ . Παρατηρήστε τους συντονισμούς για $\omega_0 = \omega_d$.
 - (δ) Δημιουργήστε διαγράμματα φάσης.
5. Θεωρήστε τη μη-γραμμική ΔΕ

$$q''(t) - aq'(t) + bq^3(t) = 0$$

υποθέστε ότι $b > 0$ και a θετικό ή αρνητικό. Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως *εξίσωση Duffing*.

- (α) Λύστε αριθμητικά την ΔΕ και δημιουργήστε τις γραφικές παραστάσεις των $q(t)$ και $q'(t)$. Δώστε αρχικές τιμές π.χ. $q(0) = 0$ και $q'(0) = 0.001$. Ψποθέστε για τις παραμέτρους τα παρακάτω ζεύγη τιμών ($b = 0.05, a = -1$) ($b = 0.05, a = 4$). Τι παρατηρείτε για κάθε ένα από τα ζεύγη των παραμέτρων.

¹Επιστροφή ως την 11η Απριλίου

- (β) Δημιουργήστε διαγράμματα φάσης για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις.
- (γ) Δημιουργήστε προσομοιώσεις των παραπάνω περιπτώσεων.
- (δ) (Προαιρετικό πρόβλημα) Θα μπορούσατε να δημιουργήσετε γραφήματα του δυναμικού για την παραπάνω εξίσωση σαν συνάρτηση του q και να εξετάσετε την εξάρτηση από το a .

6. Θεωρήστε τη μη-γραμμική ΔΕ

$$q''(t) = aq(t) - bq^3(t) - \gamma q'(t) + Q_0 \cos(\omega t)$$

με αρχικές συνθήκες $q(0) = 0$ $q'(0) = 0.001$. Υποθέστε $a = 0.4$, $b = 0.5$, $\gamma = 0.2$ και $\omega = 1/8$ και θεωρήστε δύο τροχιές μία για $Q_0 = 0$ και μια για $Q_0 = 0.1$.

- (α) Να λύσετε αριθμητικά τις εξισώσεις κίνησης και για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις και να δημιουργήσετε γραφικές παραστάσεις για τα $q(t)$ και $q'(t)$.
- (β) Δημιουργήστε τα διαγράμματα φάσης, και χρησιμοποιήστε το μετασχηματισμό Fourier για τον υπολογισμό της συχνότητας.

7. **Γενικευμένο πρόβλημα Kepler.** Το δυναμικό δίνεται από τη σχέση $V = -k/r - b/r^2$

- (α) Λύστε την εξίσωση Kepler για $u[\phi]$ και εκφράστε τη λύση στη μορφή $u(\phi) = u_0(1 + e \cos[\phi(1 - \delta)])$ όπου $u_0 = k m / (\ell^2 - 2 b m)$.
- (β) Δημιουργήστε γραφικές παραστάσεις και εξετάστε τις ελλειπτικές τροχιές, τι παρατηρήτε.
- (γ) Συγκρίνετε τις τροχιές των δυναμικών $V = -k/r - b/r^3$ και $V = -k/r + b/r^3$.
- (δ) Συγκρίνετε τις τροχιές των δυναμικών $V = -k/r^{1.1}$ και $V = -k/r^{0.9}$.