ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ 2005

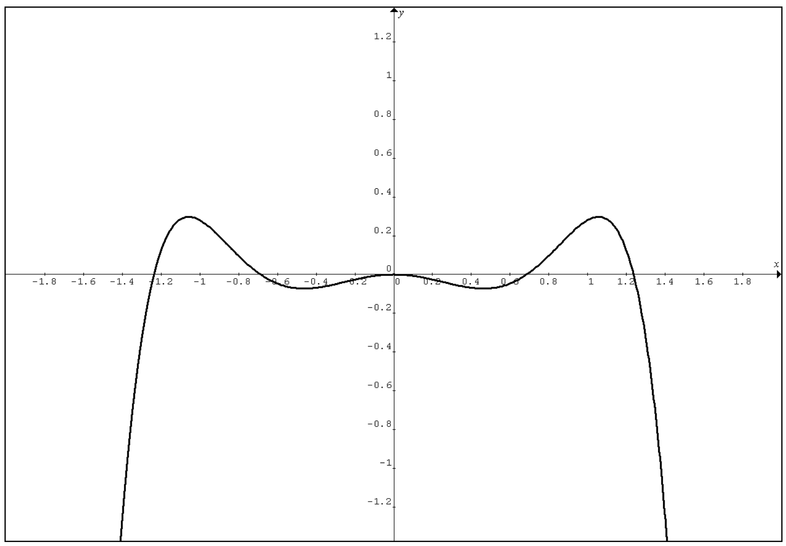
ΑΣΚΗΣΗ 1

ΚΙΝΗΣΗ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ ΣΕ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Για το παρακάτω πρόβλημα δεν υπάρχουν γενικές αναλυτικές λύσεις έτσι η επεξεργασία θα γίνει με την βοήθεια του NDSolve.

Θεωρείστε σωματίδιο μάζας $m = 1$ το οποίο κινείται μέσα σε δυναμικό της μορφής

$$\mathrm{V}(x) = -\frac{1}{2}a^2x^2 + 2x^4 - x^6 , 0 < a^2 < 2 \tag{1.1}$$



α) Περίπτωση χωρίς τριβή.

Η εξίσωση κίνησης είναι

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a^2x - 8x^3 + 6x^5 \tag{1.2}$$

- Να σχεδιαστεί το δυναμικό (στο ίδιο σχήμα) για τις τιμές του $a^2 = \left(0.25, 1.25, 1.9\right)$. Τι συμβαίνει όταν $a^2 \leq 0$ η $a^2 \geq 2$;
- Να μελετηθεί η κίνηση για διάφορες αρχικές τιμές $x\left(0\right) \geq 0$ λύνοντας την διαφορική εξίσωση με την βοήθεια του **NDSolve** θεωρώντας ότι η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου είναι μηδέν. Χρησιμοποιείστε τιμές της εκλογής σας, αρκετές πάντως ώστε να μπορεί να βγεί συμπέρασμα. Σε κάθε περίπτωση να υπολογίζεται και η ενέργεια

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \mathrm{V}(x)$$

από την διατήρηση της οποίας καταλαβαίνουμε την σταθερότητα της λύσης. Να σχεδιαστεί μία λύση, και πάνω στο σχήμα να φαίνεται η αρχική τιμή $x\left(0\right)$ καθώς και η τιμή της ενέργειας.

- Να δειχθεί ότι το παραπάνω πρόβλημα επιδέχεται μία αναλυτική λύση της μορφής

$$x(t)=\frac{c}{\sqrt{1+c_1\cosh(bt)}} \quad . \tag{1.3}$$

Να υπολογισθούν οι παράμετροι της λύσης αυτής συναρτήσει των παραμέτρων του δυναμικού, να υπολογισθεί η ενέργεια καθώς και η φυσική σημασία της λύσης.

β) Περίπτωση με τριβή.

Στην περίπτωση αυτή η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2}{t}\frac{dx}{dt}=a^2x-8x^3+6x^5 \tag{1.4}$$

Η εξίσωση αυτή είναι μιά ισχυρά μη γραμμική εξίσωση η οποία εμφανίζεται στην θεωρία των μη τοπολογικών σολιτονίων (Q-balls) η στην εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας των αστέρων (Eden-Fowler).

- Να μελετηθεί η κίνηση για διάφορες αρχικές τιμές $x(0)\geq 0$ λύνοντας την διαφορική εξίσωση με την βοήθεια του **NDSolve** θεωρώντας ότι η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου είναι μηδέν. Χρησιμοποιείστε τιμές της εκλογής σας, αρκετές πάντως ώστε να μπορεί να βγεί συμπέρασμα.. Εδώ βέβαια δεν υπάρχει διατήρηση ενέργειας ώστε να μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για την σταθερότητα της λύσης. Να σχεδιαστούν δύο αντιπροσωπευτικές λύσεις και πάνω στο σχήμα να φαίνεται η αρχική τιμή $x(0)$.
- Δείξτε ότι και εδώ υπάρχει λύση ανάλογη της (1.3) δηλαδή $x(0)=x_0$ και $x(t)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$.

  Να ευρεθούν αριθμητικά και να σχεδιαστούν δύο τέτοιες λύσεις για $a^2=(0.2,1.9)$.

  Χρησιμοποιώντας το πακέττο **NonlinearFit** του **Mathematica** προσαρμόστε τις αριθμητικές τιμές των λύσεων αυτών στην εξίσωση (1.3) και εκτιμείστε την ακρίβεια της προσαρμογής σχεδιάζοντας στο ίδιο σχήμα την αριθμητική λύση με την προσαρμογή της.

Σχέδιο προγράμματος:

α)

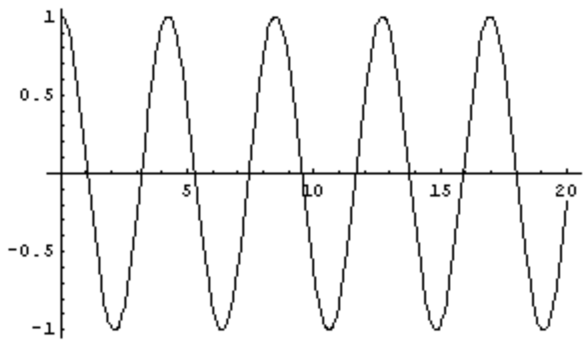
```
In[1]:= a = 0.2; c1 = 1.;

In[2]:= eq1 = x''[t] == a^2 x[t] - 8 x[t]^3 + 6 x[t]^5;

In[3]:= f = NDSolve[{eq1, x[0] == c1, x'[0] == 0}, x,
          {t, 0, 20}][[1, 1, 2]]

Out[3]= InterpolatingFunction[{{0., 20.}}, <>]

In[4]:= Plot[f[t], {t, 0, 20}]
```




```
Out[4]= - Graphics -
```

β) Στην περίπτωση αυτή υπάρχει μικρή περιπλοκή λόγω της φαινόμενης ασυνέχειας για $t=0$. Η λύση του προβλήματος είναι να αρχίσουμε την ολοκλήρωση από την χρονική στιγμή $t=t_0 \approx 0$ π.χ. $t_0 = 0.001$. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να προσαρμόσουμε ανάλογα τις αρχικές συνθήκες. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η ακριβής λύση με μορφή δυναμοσειράς μπορεί να γραφεί σαν

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{6}a^2 x_0 t^2 + \cdots$$

οπότε οι αρχικές συνθήκες μπορούν να γραφούν $x(t_0) \approx x_0$ και $x'(t_0) \approx \frac{1}{3}a^2 x_0 t_0$.

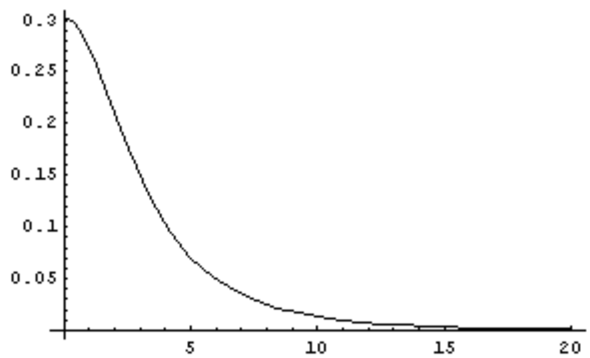
In[5]:=
```
a = 0.2; c1 = 0.302;
```

In[6]:=
```
eq2 = x''[t] + 2 / t x'[t] == a ^ 2 x[t] - 8 x[t] ^ 3 + 6 x[t] ^ 5;
```

In[8]:=
```
f =
 NDSolve[{eq2, x[0.001] == c1,
    x'[0.001] == 1 / 3 a ^ 2 * c1 * 0.001}, x,
   {t, 0.001, 20}][[1, 1, 2]]
```

Out[8]=
```
InterpolatingFunction[{{0.001, 20.}}, <>]
```

In[9]:=
```
Plot[f[x], {x, .01, 20}]
```



Out[9]=
```
- Graphics -
```