Αριθμητική Ολοκλήρωση Διαφορικών Εξίσώσεων

6 Μαΐου 2010

Η εύρεση της αριθμητικής τιμής της $y(x)$ μέσω της ΔΕ

$$y' = f(x, y) \quad \text{με} \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

σε κάποιο σημείο x μπορεί να υπολογισθεί άν είναι γνωστοί οι συντελεστές του αναπτύγματος Taylor στην περιοχή του αρχικού σημείου x_0. Η λύση θα είναι:

$$y(x) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + \cdots \tag{2}$$

όπου$h = x - x_0$. Αρα απαιτείται ο προσδιορισμός των συντελεστών:

$$y'' = f'(x, y), \quad y''' = f''(x, y), \ldots \tag{3}$$

Θα βρούμε την τιμή $y(1)$ της ΔΕ

$$y' = x + y \quad \omega\iota\tau\eta \quad y(0) = 1 \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
y'(x_0) &= y'(0) = 0 + 1 = 1 \\
y'' &= 1 + y' = 1 + x + y = 1 + y' \\
y''(x_0) &= 1 + y'(0) = 2 \\
y''' &= 1 + y' \\
y'''(x_0) &= 1 + y'(0) = 2 \\
y^{(4)} &= 1 + y' \\
y^{(4)}(x_0) &= 1 + y'(0) = 2
\end{aligned}$$

Οπότε

$$y(0 + h) = 1 + h + h^2 + \frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{12} + \cdots \tag{5}$$

και το σφάλμα θα είναι

$$E = \frac{y^{(5)}(\xi)}{5!} h^5 \quad \text{για} \quad 0 < \xi < h \tag{6}$$

Σειρές Taylor : Παράδειγμα

x	y	Ακριβής	Σφάλμα	Σφάλμα [1]
0	1	1		
0.1	1.110342	1.110342	1.7×10^{-7}	
0.2	1.24280	1.24281	5.5×10^{-6}	3.7×10^{-7}
0.3	1.39968	1.39972	4.3×10^{-5}	6.2×10^{-7}
0.4	1.383467	1.383649	1.8×10^{-4}	9.1×10^{-7}
:				
1.0	3.416667	3.436564	2×10^{-2}	4.2×10^{-6}

Πίνακας:

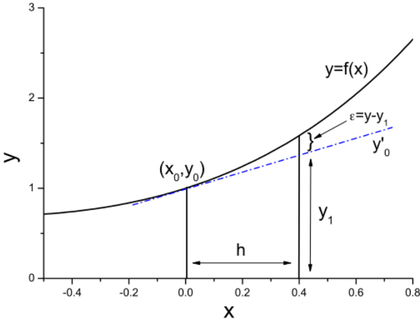
[1] Εδώ χρησιμοποιούμε διαδοχικά βήματα $h = 0.1$

- **EULER** Διατηρούμε μόνο τον πρώτο όρο του αναπτύγματος Taylor:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) \quad (7)$$

με προφανές σφάλμα:

$$E = \frac{y''(\xi)}{2} h^2 \quad \text{για} \quad 0 < \xi < h$$



- **EULER - HEUN** : Αυτή είναι μια μέθοδος **Πρόβλεψης - Διόρθωσης**

$$\text{1ο ΒΗΜΑ}: \quad y_{n+1} = y_n + hy'_n + O(h^2) \quad (8)$$

$$\text{2ο ΒΗΜΑ}: \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(y'_n + y'_{n+1}\right) + O(h^3) \quad (9)$$

Πως εξηγείτε το μικρότερο σφάλμα ;

Αν θεωρήσουμε την 1ης τάξης ΔΕ $y' = f(x, y)$, με $y(x_0) = y_0$ τότε αν Y_n η αριθμητική τιμή στο σημείοx_n και y_n η ακριβής τιμή, το σφάλμα στο x_n θα είναι:

$$\varepsilon_n = y_n - Y_n \tag{10}$$

Ας προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τη διάδοση του σφάλματος στη μέθοδο του Euler

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= y_{n+1} - Y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right) - Y_n - hf\left(x_n, Y_n\right) \\ &= \varepsilon_n + h\frac{\left(f\left(x_n, y_n\right) - f\left(x_n, Y_n\right)\right)}{y_n - Y_n}\varepsilon_n = \varepsilon_n\left(1 + hf_y\left(x_n, y_n\right)\right) \\ &= \left(1 + hk\right)\varepsilon_n + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_n) \quad \text{όπου} \quad k = \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \tag{11}$$

Δηλαδή η διάδοση του σφάλματος είναι γραμμική. Αν $|1 + hk| \geq 1$ το σφάλμα αυξάνεται ενώ αν $|1 + hk| \leq 1$ το σφάλμα ελλατώνεται. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στην παρακάτω συνθήκη για μή διάδοση του σφάλματος:

$$-2 < hk < 0 \quad \text{ή} \quad \partial f / \partial y < 0 \tag{12}$$

Σύγκλιση

Ας υποθέσουμε την ΔΕ της μορφής:

$$\frac{dy}{dx} = Ay \tag{13}$$

που επιδέχεται την προφανή λύση $y = e^{Ax}$. Η μέθοδος του Euler δίνει τη λύση μέσω της παρακάτω αναδρομικής σχέσης:

$$y_{n+1} = y_n + hAy_n = (1 + hA)y_n \quad \text{για} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Επομένως αν χρησιμοποιήσουμε την σχέση αυτή n-φορές λαμβάνουμε:

$$y_{n+1} = (1 + hA)^{n+1} y_0 \quad \text{φορ} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Αλλά για μικρό h γνωρίζουμε ότι ισχύει $1 + hA \approx e^{hA}$ επομένως

$$y_{n+1} = (1 + hA)^{n+1} y_0 \approx e^{(n+1)hA} y_0 = e^{(x_{n+1} - x_0)A} y_0 = e^{Ax_{n+1}} \tag{16}$$

όπου $h = (x_{n+1} - x_0)/(n + 1)$.
Αυτό σημαίνει ότι η αριθμητική λύση για μικρό h συγκλίνει στην αναλυτική λύση: $y = e^{Ax}$.

Ας θεωρήσουμε την ΔΕ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{17}$$

Μια πιθανή αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό του y_n θα μπορούσε να είναι της μορφής:

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 \tag{18}$$

όπου

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \tag{19}$$
$$k_2 = hf(x_n + Ah, y_n + Bk_1) \tag{20}$$

Ας προσπαθήσουμε να ταυτοποιήσουμε την παραπάνω σχέση με το ανάπτυγμα Taylor, δηλαδή

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f'(x_n, y_n) + \ldots \tag{21}$$

Αλλά επειδή:

$$\frac{df}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx} = f_x + f_y f \tag{22}$$

λαμβάνουμε

Ας σύγκρινουμε την παραπάνω σχέση με την εξίσωση (18), που γράφεται:

$$y_{n+1} = y_n + ahf\left(x_n, y_n\right) + bhf\left[x_n + Ah, y_n + Bhf\left(x_n, y_n\right)\right] \tag{24}$$

την οποία μπορούμε να γράψουμε με τη μορφή αναπτύγματος Taylor [2]

$$y_{n+1} = y_n + h\,(a+b)\,f_n + h^2\left(A\,b\,f_x + B\,b\,f\,f_y\right)_n \tag{25}$$

οπότε οδηγούμαστε στις ακόλουθες σχέσεις για τις άγνωστες σταθερές a, b, A και B:

$$a + b = 1, \qquad A \cdot b = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad B \cdot b = \frac{1}{2} \tag{26}$$

Θέτοντας $a = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\ \ldots$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες 3 άγνωστες ποσότητες. Ας επιλέξουμε $a = \frac{1}{2}$ τότε $b = \frac{1}{2}$ και $A = B = 1$, ι.ε.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \tag{27}$$

όπου

$$k_1 = hf\left(x_n, y_n\right), \quad k_2 = hf\left(x_n + h, y_n + k_1\right) \tag{28}$$

οπότε οδηγηθήκαμε ξανά στη μέθοδο Euler-Heun.

[2] Κάνουμε χρήση της $f\left(x_n + Ah, y_n + Bhf\left(x_n, y_n\right)\right) \approx \left(f + f_x Ah + f_y Bhf\right)_{x=x_n}$

4ης τάξης μέθοδος Runge - Kutta

Αν επαναλάβουμε την προηγούμενη διαδικασία για σειρές Taylor μέχρι και h^4, θα δημιουργήσουμε ένα σύστημα από 11 εξισώσεων με 13 αγνώστων. Με 'κατάλληλ' επιλογή δύο απάυτές καθορίζουμε τις υπόλοιπες:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{29}$$

όπου

$$\begin{aligned} k_1 &= hf\left(x_n, y_n\right) && (30)\\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) && (31)\\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) && (32)\\ k_4 &= hf\left(x_n + h, y_n + k_3\right) && (33) \end{aligned}$$

Αυτή είναι μια **4ης τάξης Runge - Kutta** με τοπικό σφάλμα $E \approx 0(h^5)$ και συνολικό σφάλμα μετά από n βήματα $E \approx 0(h^4)$.

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \tag{34}$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right) \tag{35}$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \tag{36}$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \tag{37}$$

$$k_5 = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \tag{38}$$

$$k_6 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right) \tag{39}$$

οπότε μια πρώτη πρόβλεψη για το y_{n+1} είναι:

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + \left(\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5\right) \tag{40}$$

με τοπικό σφάλμα $\approx h^5$.

Το επόμενο βήμα είναι να περικλείσουμε τον όρο k_6 οπότε λαμβάνουμε:

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right) \tag{41}$$

με τοπικό σφάλμα $\approx h^6$ και συνολικό $\approx h^5$.
Η σχέση για τον υπολογισμό του σφάλματος της μεθόδου Runge - Kutta - Fehlberg είναι:

$$E = \frac{1}{360} k_1 - \frac{128}{4275} k_3 - \frac{2197}{7524} k_4 + \frac{1}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \tag{42}$$

Επειδή τα $k_1, k_2, \dots, k_6$ είναι γνωστά σε κάθε βήμα μπορούμε να ελέγχουμε την ακρίβεια της μεθόδου και αν είναι χειρότερη από την απαιτούμενη ελλατώνουμε το h.

- Στις μεθόδους πολλαπλών βημάτων προσπαθούμε να λάβουμε υπ'οψη μας όχι μόνο μία αλλά περισσότερες από τις ήδη υπολογισθείσες τιμές της y ή/και y' έτσι ώστε να κάνουμε ακριβέστερη πρόβλεψη της επόμενης τιμής.
- Ο αριθμός των σημείων που θα χρησιμοποιήσουμε έχει άμεση επίδραση στην ακρίβεια της μεθόδου
- Η τάξη της μεθόδου είναι ανάλογη της δύναμης του h στον υπολογισμό του συνολικού σφάλματος και ταυτίζεται με το βαθμό του συμπτωτικού πολυωνύμου που θα χρησιμοποιήσουμε (!)
- Η ΔΕ μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ή} \quad dy = f(x, y)\, dx \tag{43}$$

οπότε με ολοκλήρωση στο διάστημα x_n ως x_{n+1} λαμβάνουμε:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} dy = y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)\, dx \tag{44}$$

Για να ολοκληρώσουμε το δεξιό όρο αντικαθιστούμε την $f(x, y)$ με κατάλληλο συμπτωτικό πολυώνυμο.

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε συμπτωτικό πολυώνυμο 2ου βαθμού:

$$\begin{aligned}
\int_{x_n}^{x_{n+1}} dy &= y_{n+1} - y_n \\
&= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f_n + s\Delta f_{n-1} + \frac{(s+1)\,s}{2}\Delta^2 f_{n-2} + \text{Σφάλμα} \right) dx \\
&= h\int_{s=0}^{s=1} \left(f_n + s\Delta f_{n-1} + \frac{(s+1)s}{2}\Delta^2 f_{n-2} \right) ds \\
&\quad + h\int_{s=0}^{s=1} \frac{s(s+1)(s+2)}{6} h^3 f'''(\xi) ds
\end{aligned}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= h\left(f_n + \frac{1}{2}\Delta f_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{n-2} \right) + O\left(h^4\right) \\
&= h\left[f_n + \frac{1}{2}\left(f_n - f_{n-1}\right) + \frac{5}{12}\left(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}\right) \right] + O\left(h^4\right)
\end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}\right] + O\left(h^4\right) \tag{45}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε 3-βάθμιο συμπτωτικό πολυώνυμο, λαμβάνουμε:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right] + O\left(h^5\right) \tag{46}$$

Στη βιβλιογραφία αυτής της τάξης η μέθοδος είναι γνωστή ως Adams-Bashford.

ΣΦΑΛΜΑ : Για να βρούμε το σφάλμα στην 4ης τάξης μέθοδος Adams ολοκληρώνουμε τον όρο που δίνει το σφάλμα στο συμπτωτικό πολυώνυμο.
Οπότε τελικά:

$$E \approx \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi), \quad \text{για} \quad x_{n-3} \leq \xi \leq x_{n+1} \tag{47}$$

Εναλακτική μέθοδος, για τη δημιουργία της αναδρομικής σχέσης, οπότε ακολουθούμε τα προηγούμενα βήματα.
Αν δοθεί η ΔΕ

$$\frac{dx}{dy} = f(x, y) \tag{48}$$

μπορούμε να τη γράψουμε ως:

$$\int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} dy = y_{n+1} - y_{n-3} = \int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} f(x, y)\, dx \tag{49}$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε την $f(x, y)$ με ένα 2ης τάξης συμπτωτικό πολυώνυμο λαμβάνουμε

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\left(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}\right) + O\left(h^5\right) \tag{50}$$

ΣΦΑΛΜΑ :

$$E \approx \frac{28}{90} h^5 y^{(5)}(\xi), \quad \text{για} \quad x_{n-3} \leq \xi \leq x_{n+1} \tag{51}$$

Υπολογίζουμε την τιμή $y_{k+1} = y(x_{k+1})$ χρησιμοποιώντας διαδοχικά βήματα. Δηλαδή:

ΠΡΟΒΛΕΨΗ : Χρησιμοποιούμε τα m προηγούμενα βήματα

$$y_{k+1}^{(P)} = \mathcal{P}\left(y_{k-m}, y_{k-m+1}, \dots, y_k\right) \tag{52}$$

ΔΙΟΡΘΩΣΗ : Περικλέιουμε και το ήδη υπολογισθέν αποτέλεσμα απο το προηγούμενο βήμα y_{k+1}

$$y_{k+1} = \mathcal{C}\left(y_{k-m}, y_{k-m+1}, \dots, y_k, y_{k+1}^{(P)}\right) \tag{53}$$

Αυτό το 2ο βήμα μπορεί να επαλανηφθεί μερικές φορές έως ότου η μέθοδος συγκλίνει και παρουσιάσει σφάλμα μικρότερο μια ζητούμενης τιμής E

$$\left| y_{k+1}^{(j)} - y_{k+1}^{(j+1)} \right| < E$$

όπου j είναι ο αριθμός των επαναλήψεων.

Μια μέθοδοσ'διόρθωσησ' για τη μέθοδο Milne μπορεί να δημιουργηθεί από μια απλή αλλαγή των ορίων ολοκλήρωσης

$$\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} dy = y_{n+1} - y_{n-1} = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x,y)\,dx \tag{54}$$

οπότε αν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Simpson για την ολοκλήρωση λαμβάνουμε

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}\right) \tag{55}$$

με σφάλμα:

$$E \approx \frac{h^5}{90} y^{(5)}(\xi) \quad \text{όπου} \quad x_{n-1} < \xi < x_{n+1} \tag{56}$$

Μεθοδος Πρόβλεψης - Διόρθωσης Milne

$$y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}\left(2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k\right) + \frac{28}{90} h^5 y^{(5)}(\xi_1) \quad (x_{k-3} < \xi_1 < x_{k+1}) \tag{57}$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}\left(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}\right) - \frac{1}{90} h^5 y^{(5)}(\xi_2) \quad (x_{k-1} < \xi_2 < x_{k+1}) \tag{58}$$

Μέθοδος Adams-Multon

ΠΡΟΒΛΕΨΗ $(x_{k-3} < \xi_1 < x_{k+1})$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}) + \frac{251}{720}h^5 y^{(5)}(\xi_1) \quad (59)$$

ΔΙΟΡΘΩΣΗ $(x_{k-2} < \xi_2 < x_{k+1})$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}) - \frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(\xi_2) \quad (60)$$

Μέθοδος Hamming

ΠΡΟΒΛΕΨΗ $(x_{k-3} < \xi_1 < x_{k+1})$

$$y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k) + \frac{28}{90}h^5 y^{(5)}(\xi_1) \quad (61)$$

ΔΙΟΡΘΩΣΗ $(x_{k-2} < \xi_2 < x_{k+1})$

$$y_{k+1} = \frac{1}{8}(9y_k - y_{k-2}) + \frac{3h}{8}(-f_{k-1} + 2f_k + f_{k+1}) \quad (62)$$

Συστήματα ΔΕ

Για την αριθμητική επίλυση συστημάτων ΔΕ θα ακολουθήσουμε τις μεθόδους που δημιουργήσαμε για ΔΕ 1ης τάξης,
Για παράδειγμα η 4ης τάξης Runge-Kutta θα είναι:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (63)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \quad (64)$$

όπου

$$k_1 = h\,f(x_n, y_n, z_n) \quad (65)$$

$$k_2 = h\,f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1, z_n + \frac{1}{2}l_1\right) \quad (66)$$

$$k_3 = h\,f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2, z_n + \frac{1}{2}l_2\right) \quad (67)$$

$$k_4 = h\,f\,(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3) \quad (68)$$

$$l_1 = h\,g(x_n, y_n, z_n) \quad (69)$$

$$l_2 = h\,g(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1, z_n + \frac{1}{2}l_1) \quad (70)$$

$$l_3 = h\,g\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2, z_n + \frac{1}{2}l_2\right) \quad (71)$$

$$l_4 = h\,g\,(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3) \quad (72)$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει πιθανότητα αστάθεις της μεθόδου Milne για ένα απλό πρόβλημα.
Αν θεωρήσουμε τη ΔΕ

$$\frac{dy}{dx} = Ay \quad \text{με προφανή λύση στο} \quad x = x_n \quad \text{την} \quad y_n = y_0 e^{A(x_n - x_0)}$$

Αν προσπαθήσουμε να λύσουμε αριθμητικά τη ΔΕ με τη μέθοδο Milne θα έχουμε τη σχέση διόρθωσης

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1}\right)$$

οπότε αντικαθιστώντας $y'_n = Ay_n$ στην παραπάνω σχέση λαμβάνουμε

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(Ay_{n+1} + 4Ay_n + Ay_{n-1}\right)$$

οπότε

$$\left(1 - \frac{hA}{3}\right) y_{n+1} - \frac{4hA}{3} y_n - \left(1 + \frac{hA}{3}\right) y_{n-1} = 0$$

Θα προσπαθήσουμε να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση διαφορών, ώστε να δούμε αν συγκλίνει στην ακριβή λύση.

Η λύση θα είνα της μορφής

$$y_n = c_1 Z_1^n + c_2 Z_2^n$$

όπου τα Z_1, Z_2 είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\left(1 - \frac{hA}{3}\right) Z^2 - \frac{4hA}{3} Z - \left(1 + \frac{hA}{3}\right) = 0$$

και αν θέσουμε $r = hA/3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης θα είναι

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{2r + \sqrt{3r^2+1}}{1-r} \approx 1 + 3r \approx e^{3r} = e^{hA} \\ Z_2 &= \frac{2r - \sqrt{3r^2+1}}{1-r} \approx -1 + r \approx -e^{-r} = -e^{-hA/3} \end{aligned}$$

$$y_n = c_1 e^{nhA} + c_2 e^{-nhA/3} = c_1 e^{A(x_n - x_0)} + c_2 e^{-A(x_n - x_0)/3} \quad , x_n - x_0 = nh$$

Ο 2ος όρος είναι **παρασιτικός**: Για $A > 0$ αποσβένυται, αλλά για $A < 0$ κυριαρχεί και δεν οδηγεί στην αναλυτική λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δοκιμάστε να λύσετε αριθμητικά τη ΔΕ
$y' = -10y$ με $y(0) = 1$
από $x = 0$ ως $x = 2$ με χρήση της μεθόδου Milne και της Adams-Multon. Τι διαπιστώνεται όσον αφορά το σφάλμα;

Κριτήρια Σύγκλισης

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα κριτήριο ώστε να μην είναι αναγκαία η πολλαπλή 'διόρθωση' σε μεθόδους 'Πρόβλεψης - Διόρθωσης ' (εδώ για την Adams-Moulton)
Εστω:
y_p = τιμή του y_{n+1} από τη σχέση πρόβλεψης
y_c = τιμή του y_{n+1} από τη σχέση διόρθωσης
$y_{cc}, y_{ccc}, \dots$ = τιμή του y_{n+1} από διαδοχικές σχέσεις διόρθωσης
y_∞ = τιμή στην οποία οι διαδοχικές επαναδιορθώσεις συγκλίνουν
$D = y_c - y_p$

$$\begin{aligned} y_{cc} - y_c &= \left(y_n + \frac{h}{24}\left(9y'_c + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}\right)\right) \\ &- \left(y_n + \frac{h}{24}\left(9y'_p + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}\right)\right) = \frac{9h}{24}\left(y'_c - y'_p\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_c - y'_p &= f(x_{n+1}, y_c) - f(x_{n+1}, y_p) = \frac{f(x_{n+1}, y_c) - f(x_{n+1}, y_p)}{y_c - y_p}(y_c - y_p) \\ &= f_y(\xi_1)D \quad \text{όπου } \xi_1 \text{ στο διάστημα μεταξύ } y_c,\ y_p. \qquad (73) \end{aligned}$$

Αν ξαναδιορθώσουμε θα πάρουμε

$$\begin{aligned} y_{ccc} - y_{cc} &= \frac{9h}{24}(y'_{cc} - y'_c) = \frac{9h}{24} f_y(\xi_2)(y_{cc} - y_c) = \frac{9h}{24} f_y(\xi_2) \left[\frac{9hD}{24} f_y(\xi_1)\right] \\ &= \left(\frac{9h}{24}\right)^2 [f_y(\xi)]^2 D \end{aligned} \quad (74)$$

Με ανάλογο τρόπο θα οδηγηθούμε στη σχέση για το y_∞

$$\begin{aligned} y_\infty &= y_p + (y_c - y_p) + (y_{cc} - y_c) + (y_{ccc} - y_{cc}) + \dots \\ &= y_p + D + \frac{9hf_y(\xi)}{24} D + \left(\frac{9hf_y(\xi)}{24}\right)^2 D + \left(\frac{9hf_y(\xi)}{24}\right)^3 D + \dots \\ &= y_p + D\left[1 + r + r^2 + r^3 + \dots\right] = y_p + \frac{D}{1-r}, \quad r = \frac{9hf_y(\xi)}{24} \end{aligned}$$

Αρα μόνο αν

$$|r| = \frac{h|f_y(\xi)|}{24/9} = \frac{h|f_y(x_n, y_n)|}{24/9} < 1$$

οι κατ΄ επανάληψη 'διορθώσεις ' θα συγκλίνουν.

Επομένως το **1ο κριτήριο σύγκλισης** θα είναι:

$$h < \frac{24/9}{|f_y(x_n, y_n)|}$$

Αν θέλουμε το y_c και το y_∞ να ταυτίζονται σε N δεκαδικά ψηφία τότε θα πρέπει

$$y_\infty - y_c = \left(y_p + \frac{D}{1-r}\right) - (y_p + D) = \frac{rD}{1-r} < 10^{-N}$$

αλλά για $r \ll 1$ θα ισχύει $r/(1-r) \approx r$ όποτε οδηγούμαστε σε ένα **2ο κριτήριο σύγκλισης**

$$D \cdot 10^N < \left|\frac{1}{r}\right| = \frac{24/9}{h|f_y(x_n, y_n)|}$$

Τα προηγούμενα κριτήρια ίσχυαν για τη μέθοδο Adams - Moulton αντιστοιχα μπορούν να βρεθούν και για τη μέθοδο του Milne :
1ο κριτήριο σύγκλισης :

$$h < \frac{3}{|f_y(x_n, y_n)|}$$

2ο κριτήριο σύγκλισης :

$$D \cdot 10^N < \left|\frac{1}{r}\right| = \frac{3}{h|f_y(x_n, y_n)|}$$

Σφάλματα & Διάδοση Σφαλμάτων

- Μέχρι στιγμής αναφερθήκαμε μόνο στην ανάλυση των **τοπικών σφαλμάτων** των διαφόρων μεθόδων.
- Η άθροιση όμως των τοπικών σφαλμάτων οδηγεί σε ένα **συνολικό σφάλμα** το οποίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην αριθμητκή επίλυση ΔΕ.
- Τα **αρχικά δεδομένα** έχουν πολλές φορές σφάλματα τα οποία διαδίδονται κατά την επαναληπτική διαδικασία που ακολουθούμε ενώ συγκεκριμένα είδη ΔΕ είναι εξαιρετικά ευαίσθητα ακόμη και σε πολύ μικρά αρχικά σφάλματα.
- Τέλος, υπάρχουν και τα **σφάλματα στρογγύλεψης** διότι οι ΗΥ εκτελούν αριθμητικές πράξεις με δεδομένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων.

Διάδοση του Σφάλματος (ξανά)

Αν θεωρήσουμε την 1ης τάξης ΔΕ $y' = f(x, y)$, με $y(x_0) = y_0$ τότε αν Y_n η αριθμητική τιμή στο σημείοx_n και y_n η ακριβής τιμή, το σφάλμα στο x_n θα είναι:

$$\varepsilon_n = y_n - Y_n \tag{75}$$

Ας προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τη διάδοση του σφάλματος στη μέθοδο του Euler

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= y_{n+1} - Y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) - Y_n - hf(x_n, Y_n) \\ &= \varepsilon_n + h\frac{(f(x_n, y_n) - f(x_n, Y_n))}{y_n - Y_n}\varepsilon_n = \varepsilon_n (1 + hf_y(x_n, y_n)) \\ &= (1 + hk)\,\varepsilon_n + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_n) \quad \text{όπου} \quad k = \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \tag{76}$$

Δηλαδή η διάδοση του σφάλματος είναι γραμμική. Αν $|1 + hk| \geq 1$ το σφάλμα αυξάνεται ενώ αν $|1 + hk| \leq 1$ το σφάλμα ελλατώνεται. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στην παρακάτω συνθήκη για απόλυτη σύγκλιση:

$$-2 < hk < 0 \quad \text{ή} \quad \partial f/\partial y < 0 \tag{77}$$

$$\varepsilon_{n+1} = (1+hk)\,\varepsilon_n + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_n) \qquad (78)$$

$$\begin{aligned}
e_0 &= 0 \\
e_1 &\leq (1+hk)e_0 + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_0) = \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_0) \\
e_2 &\leq (1+hk)\left[\frac{1}{2}h^2 y''(\xi_0)\right] + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_1) = \frac{1}{2}h^2\left[(1+hk)y''(\xi_0) + y''(\xi_1)\right] \\
e_3 &\leq \frac{1}{2}h^2\left[(1+hk)^2 y''(\xi_0) + (1+hk)y''(\xi_1) + y''(\xi_2)\right] \\
e_n &\leq \frac{1}{2}h^2\left[(1+hk)^{n-1} y''(\xi_0) + (1+hk)^{n-2} y''(\xi_1) + \ldots + y''(\xi_{n-1})\right]
\end{aligned}$$

- Αν $k \geq 0$ το σφάλμα διαδίδεται σε κάθε βήμα ‘ ενισχυμένο ’ κατά ένα όρο $(1+hk)$ και τελικά για $h \to 0$ το σφάλμα σε κάθε σημείο είναι το άθροισμα των προηγουμένων.
- Αν $kh \leq 2$ το σφάλμα διαδίδεται με ανεπαίσθητο αποτέλεσμα

Θα δείξουμε ότι το **αθροιστικό σφάλμα** της μεθόδου Euler μετά απο n βήματα είναι $O(h)$.
Αν υποθέσουμε ότι το $|y''(x)| < M$ με $M > 0$ η προηγούμενη εξίσωση θα γραφεί

$$|e_{n+1}| \leq (1 + hk)|e_n| + \frac{1}{2}h^2 M$$

που είναι μια εξίσωση διαφορρών της μορφής

$$Z_{n+1} = (1 + hk)Z_n + \frac{1}{2}h^2 M \quad \text{με} \quad Z_0 = 0$$

με προφανή λύση

$$Z_n = \frac{hM}{2k}(1 + hk)^n - \frac{hM}{2k}$$

επειδή δε $1 + hk < e^{hk}$ για $k > 0$ θα είναι

$$Z_n < \frac{hM}{2k}\left(e^{hk}\right)^n - \frac{hM}{2k} = \frac{hM}{2k}\left(e^{nhk} - 1\right) = \frac{hM}{2k}\left(e^{(x_n - x_0)k} - 1\right) = O(h)$$

Δηλαδή το συνολικό σφάλμα e_n θα είναι $O(h)$