

# Αριθμητική Ολοκλήρωση ΔΕΜΠ

13 Μαΐου 2011

- Μια διαφορική εξίσωση που περιέχει παραγώγους περισσότερες της μίας μεταβλητές ονομάζεται **διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους** (ΔΕΜΠ).
- Πολλά προβλήματα στις εφαρμοσμένες επιστήμες περιγράφονται μαθηματικά από ΔΕΜΠ.
- Θα μελετήσουμε αριθμητικά ΔΕΜΠ με τη χρήση **πεπερασμένων διαφορών** που θα χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση των παραγώγων 1ης και 2ης τάξης.
- Οι ΔΕΜΠ κατηγοριοποιούνται σε 3 τύπους, με ορολογία που δανειζόμαστε από τη μελέτη των **κωνικών τομών**.  
Οι συναρτήσεις της μορφής:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D = 0$$

παριστούν δευτεροβάθμιες καμπύλες που αν:

- $B^2 - 4AC < 0$  η καμπύλη είναι **έλλειψη**,
- $B^2 - 4AC = 0$  η καμπύλη είναι **παραβολή**
- $B^2 - 4AC > 0$  η καμπύλη είναι **υπερβολή**

Με την ίδια λογική συναρτήσεις της μορφής

$$A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + D \left( x, y, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

όπου  $A$ ,  $B$  και  $C$  ονομάζονται **ημι-γραμμικές**. Και τις κατατάσσουμε σε 3 κατηγορίες. Αν :

- $B^2 - 4AC < 0$ , η εξίσωση είναι **ελλειπτική**,
- $B^2 - 4AC = 0$ , η εξίσωση είναι **παραβολική**
- $B^2 - 4AC > 0$ , η εξίσωση είναι **υπερβολική**

Δυο κλασικά παραδείγματα αποτελούν οι ΔΕΜΠ **Laplace & Poisson**:

$$\nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 u = g(x, y) \quad \text{για} \quad 0 < x < 1 \quad \text{και} \quad 0 < y < 1 \quad (2)$$

με **συνοριακές συνθήκες**:

- $u(x, 0) = f_1(x)$  για  $y = 0$  και  $0 \leq x \leq 1$
- $u(x, 1) = f_2(x)$  για  $y = 1$  και  $0 \leq x \leq 1$
- $u(0, y) = f_3(y)$  για  $x = 0$  και  $0 \leq y \leq 1$
- $u(1, y) = f_4(y)$  για  $x = 1$  και  $0 \leq y \leq 1$

για τις οποίες  $B = 0$ ,  $A = C = 1$  που σημαίνει ότι είναι **ελλειπτικές**.

## Η κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{για } 0 < x < L \quad \text{και} \quad 0 < t < \infty \quad (3)$$

για δοθείσες αρχικές τιμές της συνάρτησης και της χρονικής της παραγώγου

- $u(x, 0) = f(x)$  για  $t = 0$  και  $0 \leq x \leq L$
- $u_t(x, 0) = g(x)$  για  $t = 0$  και  $0 \leq x \leq L$

είναι μια κλασική περίπτωση **υπερβολικής** ΔΕΜΠ.

## Η εξίσωση θερμότητας

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{για } 0 < x < 1 \quad \text{και} \quad 0 < y < 1 \quad (4)$$

η αρχική κατανομή θερμοκρασίας για  $t = 0$  είναι:

- $u(x, 0) = f(x)$  για  $t = 0$  και  $0 \leq x \leq L$

και οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου

- $u(x, t) = c_1$  για  $x = 0$  και  $0 \leq t \leq \infty$
- $u(L, t) = c_2$  για  $x = L$  και  $0 \leq t \leq \infty$

είναι ένα παράδειγμα **παραβολικής** ΔΕΜΠ.

Θα λύσουμε τη 2-διάστατη εξίσωση Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{για} \quad 0 < x < 1 \quad \text{και} \quad 0 < y < 1 \quad (5)$$

με **συνοριακές συνθήκες**:

- $u(x, 0) = f_1(x)$  για  $y = 0$  και  $0 \leq x \leq 1$
- $u(x, 1) = f_2(x)$  για  $y = 1$  και  $0 \leq x \leq 1$
- $u(0, y) = f_3(y)$  για  $x = 0$  και  $0 \leq y \leq 1$
- $u(1, y) = f_4(y)$  για  $x = 1$  και  $0 \leq y \leq 1$

επειδή

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Αυτό σημαίνει ότι η  $u_{xx}$  στο σημείο  $(x_i, y_j)$  θα είναι:

$$[u_{xx}]_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad (6)$$

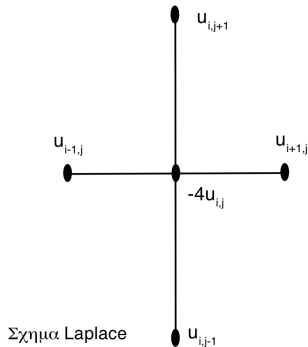
και η  $u_{yy}$  θα γραφεί ως:

$$[u_{yy}]_{i,j} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} \quad (7)$$

Η εξίσωση Laplace μπορεί να γραφεί προσεγγιστικά

$$\nabla^2 u \approx \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2} = 0 \quad (8)$$

όπου  $i = 2, \dots, n-1$  και  
 $j = 2, \dots, m-1$ . Αυτή είναι η σχέση  
**5-σημείων** για την εξίσωση Laplace  
και συσχετίζει την τιμή  $u_{i,j}$  με τις 4  
γειτονικές τιμές  $u_{i-1,j}$ ,  $u_{i+1,j}$ ,  $u_{i,j-1}$  και  
 $u_{i,j+1}$ .



Που οδηγεί στην παρακάτω σχέση επίλυσης της εξίσωσης Laplace:

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0 \quad (9)$$

Αν υποθέσουμε ότι όλες οι συνοριακές τιμές της  $u(x, y)$  είναι γνωστές:

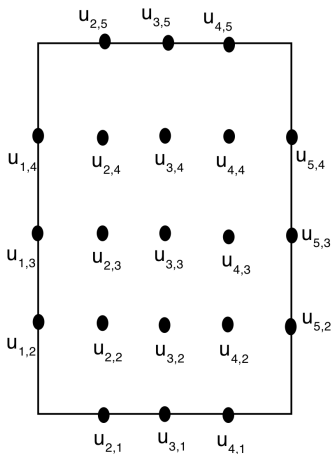
$$u(x_1, y_j) = u_{1,j} \quad \text{για} \quad 2 \leq j \leq m-1$$

$$u(x_i, y_1) = u_{i,1} \quad \text{για} \quad 2 \leq i \leq n-1$$

$$u(x_n, y_j) = u_{n,j} \quad \text{για} \quad 2 \leq j \leq m-1$$

$$u(x_i, y_m) = u_{i,m} \quad \text{για} \quad 2 \leq i \leq n-1$$

Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές της  $u(x, y)$  στα 'εσωτερικά' σημεία επιλύοντας ένα σύστημα από  $(n-2) \times (n-2)$  εξισώσεις για  $(n-2)^2$  αγνώστους.









Η λύση του προηγούμενο συστήματος μπορεί να βρεθεί με τη χρήση μεθόδων που αναπτύχθηκαν στο Κεφ. 2 της Αριθμητικής Ανάλυσης. Συγκεκριμένα για το 3-διαγώνιο σύστημα που έχουμε εδώ οι επαναληπτικές μέθοδοι αποτελούν την καλύτερη επιλογή. Υποθέτοντας κάποιες αρχικές τιμές για τα 'εσωτερικά' άγνωστα σημεία  $u_{i,j}$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω επαναληπτική διαδικασία:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) \quad (11)$$

Μια μέθοδος που επιταχύνει τη σύγκλιση είναι μέθοδος **successive over relaxation (S.O.R)**

$$u_{i,j} = u_{i,j} + \frac{\omega}{4} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}) = u_{i,j} + \omega r_{i,j} \quad (12)$$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου  $|r_{i,j}| < \epsilon$ .

Η ιδανική τιμή του συντελεστή  $\omega$  δεν μπορεί να προβλεφθεί πάντοτε.

Για την περίπτωση ορθογώνιας περιοχής με συνοριακές συνθήκες Dirichlet υπάρχει εξίσωση για τον υπολογισμό του ιδανικού  $\omega$  που είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\left[ \cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{m-1}\right) \right]^2 \omega^2 - 16\omega + 16 = 0 \quad (13)$$

Ενα τυπικό παράδειγμα υπερβολικής εξίσωσης είναι η κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{για } 0 < x < a \quad \text{και} \quad 0 < t < b \quad (14)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0 \quad \text{και} \quad u(a, t) = 0 & \quad \text{για } 0 \leq t \leq b \\ u(x, 0) = f(x) & \quad \text{για } 0 \leq x \leq a \\ u_t(x, 0) = g(x) & \quad \text{για } 0 < x < a \end{aligned} \quad (15)$$

## Δημιουργία της Εξίσωσης Διαφορών

Αν διαμερίσουμε το ορθογώνιο:  $R = \{(x, t) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b\}$  σε  $(n-1) \times (m-1)$  ορθογώνια με πλευρές  $\Delta x = h$  και  $\Delta t = k$ . Τότε με χρήση των σχέσεων κεντρικών διαφορών λαμβάνουμε:

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2} + O(k^2) \quad (16)$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + O(h^2) \quad (17)$$

Επειδή  $x_{i+1} = x_i + h$  και  $t_{j+1} = t_j + k$  η σχέση (86) γράφεται:

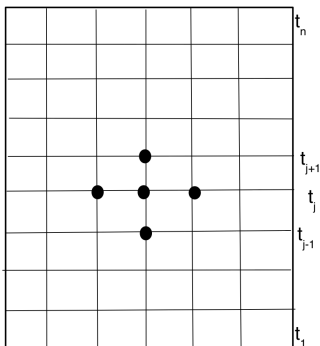
$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (18)$$

αντικαθιστώντας  $r = ck/h$  λαμβάνουμε

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = r^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}). \quad (19)$$

που τελικά γίνεται:

$$u_{i,j+1} = 2(1 - r^2)u_{i,j} + r^2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} \quad (20)$$



## Υπερβολικές ΔΕΜΠ: Αρχικές τιμές

Οι αρχικές τιμές για  $j = 1$  και  $j = 2$  θα πρέπει να δίνονται ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση (20) για τον υπολογισμό του  $u(x, t)$  στη θέση  $j = 3$ .

Επειδή συνήθως η πληροφορία για τη θέση  $j = 2$  δεν είναι γνωστή την υπολογίζουμε με βάση την πληροφορία που έχουμε για το  $u_t(x, 0)$ . Η τιμή του  $u(x_i, k)$  θα υπολογισθεί από την

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + ku_t(x_i, 0) + O(k^2) \quad (21)$$

Αλλά επειδή  $u(x_i, 0) = f(x_i) = f_i$  και  $u_t(x_i, 0) = g(x_i) = g_i$  η παραπάνω σχέση θα γραφεί:

$$u_{i,2} = f_i + kg_i \quad \text{για} \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \quad (22)$$

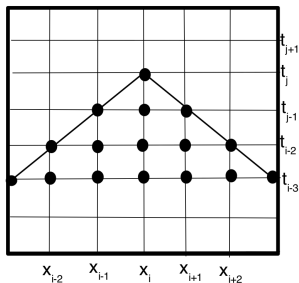
# Υπερβολικές ΔΕΜΠ: Ευστάθεια

Οι αριθμητικές μέθοδοι είναι επιρρεπείς σε **αριθμητικές αστάθειες** που αυξάνονται καθώς εξελίσσουμε την εξίσωση χρονικά.

Για την υπερβολική ΔΕΜΠ που μελετούμε ένα ικανό κριτήριο για να διασφαλίσει ευστάθεια είναι είναι:  $r = ck/h \leq 1$ .

Το κριτήριο είναι γνωστό ως **Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)** κριτήριο και απαιτεί η φυσική ταχύτητα διάδοσης του κύματος να είναι μικροτερη της ταχύτητας διαδοσης της αριθμητικής πληροφορίας:

$$|c| \leq \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (23)$$



# Παραβολικές ΔΕΜΠ

Θα μελετήσουμε την 1-διάστατη εξίσωση διάδοσης της θερμότητας που αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα παραβολικής ΔΕΜΠ.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{για } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{για } 0 \leq t < \infty \quad (24)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$u(0, t) = c_1, \quad u(1, t) = c_2 \quad \text{για } 0 \leq t < \infty \quad (25)$$

και αρχικές συνθήκες:  $u(x, 0) = f(x)$ , για  $0 \leq x \leq 1$ .

Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει τη διάδοση της θερμοκρασίας σε μιά ράβδο της οποίας τα άκρα βρίσκονται συνεχώς σε σταθερή θερμοκρασία  $c_1$  και  $c_2$ .

Υποθέτουμε ότι το ορθογώνιο  $R = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t < b\}$  σε  $(n-1) \times (m-1)$  ορθογώνια με πλευρές  $\Delta x = h$  και  $\Delta t = k$ . Οι εξισώσεις διαφορών για τις παραγώγους θα είναι:

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} + O(k) \quad (26)$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + O(h^2) \quad (27)$$

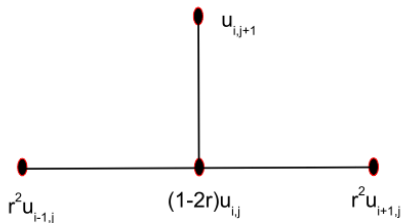
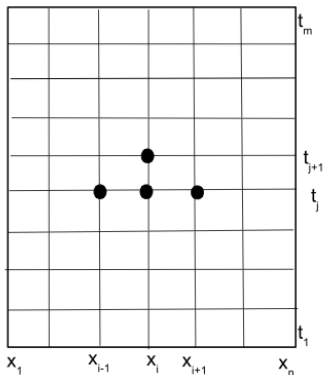


Οπότε η εξίσωση διαφορών γίνεται:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad (28)$$

οπότε θέτοντας  $r = \alpha^2 k/h^2$  λαμβάνουμε:

$$u_{i,j+1} = (1 - 2r) u_{i,j} + r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) \quad (29)$$



- Απλότητα της σχέσης (29) την κάνει ελκυστική. Αλλά το βασικό μας κριτήριο θα πρέπει να είναι η αριθμητική ευστάθεια
- Αν κάποια σφάλματα που πιθανόν να υπάρχουν στη διαδικασία του αριθμητικού υπολογισμού αποσβένονται τότε η μέθοδος θεωρείται **ευσταθής**.
- Το σχήμα (29) είναι ευσταθές αν και μόνο αν  $0 \leq r \leq 1/2$ . Δηλαδή το βήμα  $k$  θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη  $k \leq h^2/(2\alpha^2)$ . Αν η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται τότε σφάλματα σε κάποια χρονική στιγμή θα διαδίδονται και θα διογκώνονται στη συνέχεια.
- Η εξίσωση διαφορών (29) έχει ακρίβεια  $O(k) + O(h^2)$
- Αν επιλέξουμε  $r = 1/2$  η εξίσωση διαφορών (29) απλοποιείται ακόμη περισσότερο:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2} \quad (30)$$

Η **έμμεση μέθοδος** των Crank - Nicholson βασίζεται στην χρήση της χωρικής παραγώγου σε δύο σημεία, το  $(i, j)$  (παρόν) αλλά και το  $(i, j + 1)$  (μελλοντικο!).

Δηλαδή:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2}\alpha^2 \left( \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2} \right)$$

που μετά από αναδιάταξη γράφεται:

$$-ru_{i-1,j+1} + 2(1+r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = 2(1-r)u_{i,j} + r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) \quad (31)$$

και για  $r = 1$  οδηγεί στην

$$-u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \quad (32)$$

## Παραβολικές ΔΕΜΠ: Έμμεσοι μέθοδοι

Η προηγούμενη σχέση (32) ανάγεται στην επίλυση του παρακάτω γραμμικού συστήματος:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \dots \\ u_{k,j+1} \\ \dots \\ u_{n-2,j+1} \\ u_{n-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + u_{3,j} \\ u_{2,j} + u_{4,j} \\ \dots \\ u_{k-1,j} + u_{k+1,j} \\ \dots \\ u_{n-3,j} + u_{n-1,j} \\ u_{n-2,j} + 2c_2 \end{pmatrix}$$

Είναι προφανές ότι η διαδικασία πρέπει να επαναλαμβάνεται σε κάθε βήμα αλλά έχει το πλεονέκτημα ότι είναι **ευσταθής για κάθε τιμή του  $r$ !!**

Ένα αριθμητικό σχήμα θα θεωρείται ως ευσταθές αν ένα μικρό σφάλμα στις αρχικές συνθήκες ή αρχικά στάδια της εξέλιξης θα παραμένει μικρό καθ' όλη τη διάρκεια της εξέλιξης.

Μια εξίσωση διαφορών για την επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών είναι της μορφής

$$\mathbf{u}^{n+1} = Q\mathbf{u}^n \quad (33)$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ** Η εξίσωση διαφορών (33) θα είναι ευσταθής αν υπάρχουν θετικές ποσότητες  $\Delta x_0$  και  $\Delta t_0$ , και θετικές σταθερές  $K$  και  $\beta$  τέτοιες ώστε

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq Ke^{\beta t} \|\mathbf{u}^0\| \quad (34)$$

για  $0 \leq t = (n+1)\Delta t$ ,  $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$  και  $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ** Η εξίσωση διαφορών (33) είναι ευσταθής αν και μόνο εάν υπάρχουν θετικές ποσότητες  $\Delta x_0$  και  $\Delta t_0$ , και μή-αρνητικές σταθερές  $K$  και  $\beta$  τέτοιες ώστε:

$$\|Q^{n+1}\| \leq Ke^{\beta t} \quad (35)$$

για  $0 \leq t = (n+1)\Delta t$ ,  $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$  και  $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$ .

# Ευστάθεια - Προβλήματα Αρχικών Τιμών

Όταν επιλύουμε προβλήματα αρχικών τιμών ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο είναι ο μετασχηματισμός Fourier. Για παράδειγμα, θεωρείστε το πρόβλημα:

$$v_t = v_{xx}, \quad \text{με} \quad v(x, 0) = f(x) \quad (36)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $v$  είναι:

$$\hat{v}(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} v(x, t) dx \quad (37)$$

Αν πάρουμε τον μετασχηματισμό Fourier της ΔΕΜΠ (36) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \hat{v}_t(\omega, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} v_t(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} v_{xx}(x, t) dx \\ &= -\omega^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} v(x, t) dx = -\omega^2 \hat{v}(\omega, t). \end{aligned} \quad (38)$$

Ενώ μπορούμε να επιστρέψουμε στην αρχική μορφή με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{v}(\omega, t) d\omega \quad (39)$$

Η ταυτότητα του Parseval ορίζει ότι: **οι norms των συναρτήσεων και των μετασχηματισμών τους ταυτίζονται στους αντίστοιχους χώρους τους.**

Στην ανάλυση της ευστάθειας των ΔΕΜΠ θα χρησιμοποιήσουμε τον **μετασχηματισμό Fourier** και **την ταυτότητα του Parseval**.

Υπενθυμίζουμε ότι στον ορισμό της ευστάθειας χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq Ke^{\beta(n+1)\Delta t} \|\mathbf{u}^0\| \quad (40)$$

που μπορεί να γραφεί ως

$$\|\hat{\mathbf{u}}^{n+1}\| \leq Ke^{\beta(n+1)\Delta t} \|\hat{\mathbf{u}}^0\| \quad (41)$$

οπότε τα **ίδια**  $K$  και  $\beta$  θα ικανοποιούν την (40).

Όταν η ανισότητα (41) ισχύει, θα θεωρούμε ότι η ακολουθία  $\{\hat{\mathbf{u}}\}$  είναι **ευσταθής** στον χώρο του μετασχηματισμού και θα ισχύει και για την ακολουθία  $\{\mathbf{u}\}$ .

# Ευστάθεια - Προβλήματα Αρχικών Τιμών - Παράδειγμα

Θα αναλύσουμε την ευστάθεια του παρακάτω σχήματος

$$u_k^{n+1} = ru_{k-1}^n + (1 - 2r)u_k^n + ru_{k+1}^n, \quad -\infty < k < \infty \quad (42)$$

όπου  $r = v\Delta t / \Delta x^2$ .

Αν πάρουμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier και στις δύο πλευρές

$$\begin{aligned}\hat{u}^{n+1}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_k^{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} [ru_{k-1}^n + (1 - 2r)u_k^n + ru_{k+1}^n] \\ &= r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_{k-1}^n + (1 - 2r) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_k^n \\ &\quad + r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_{k+1}^n \\ &= r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_{k-1}^n + (1 - 2r)\hat{u}^n(\xi) + r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_{k+1}^n\end{aligned}$$



Αν κάνουμε την αλλαγή  $m = k \pm 1$  τότε λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_{k\pm 1}^n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i(m\mp 1)\xi} u_m^n \\ &= e^{\pm i\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi} u_m^n = e^{\pm i\xi} \hat{u}(\xi). \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1}(\xi) &= re^{-i\xi} \hat{u}^n(\xi) + (1 - 2r) \hat{u}^n(\xi) + re^{i\xi} \hat{u}^n(\xi) \\ &= [re^{-i\xi} + (1 - 2r) + re^{i\xi}] \hat{u}^n(\xi) \\ &= [2r \cos \xi + (1 - 2r)] \hat{u}^n(\xi) \\ &= (1 - 4r \sin^2(\xi/2)) \hat{u}^n(\xi) \end{aligned} \tag{44}$$

Ο όρος

$$\rho(\xi) = 1 - 4r \sin^2 \frac{\xi}{2} \tag{45}$$

ονομάζεται **σύμβολο** του σχήματος διαφορών (42).

Οπότε αν εφαρμόσουμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier, εξαλείφουμε τις παραγώγους ως προς  $x$  και απλοποιείται η εξίσωση. Αν εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα της (44)  $n + 1$  φορές, λαμβάνουμε

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = (1 - 4r \sin^2(\xi/2))^{n+1} \hat{u}^0(\xi) \quad (46)$$

Οπότε περιοριζόμαστε στη μελέτη του  $r$  μέσω της σχέσης

$$|1 - 4r \sin^2(\xi/2)| \leq 1. \quad (47)$$

Μετά επιλέγουμε  $K = 1$  και  $\beta = 0$  και για να ικανοποιείται η (41). Οπότε το σχήμα θα είναι ευσταθές αν:

$$-1 \leq 1 - 4r \sin^2(\xi/2) \leq 1 \quad (48)$$

ή καλύτερα αν

$$4r \sin^2(\xi/2) \leq 2 \quad (49)$$

που ισχύει για  $r \leq 1/2$ .

Αυτή είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση του σχήματος (42).

Για την υπερβολική ΔΕΜΠ

$$u_t + au_x = 0 \quad (50)$$

μελετήστε την ευστάθεια των παρακάτω σχημάτων (όπου  $|R| = |a|\Delta t/\Delta x$ )

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R(u_{k+1}^n - u_k^n) \quad (\text{FTFS})$$

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R(u_k^n - u_{k-1}^n) \quad (\text{FTFS})$$

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{R}{2}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) \quad (\text{FTCS})$$

Για την ΔΕΜΠ

$$u_t + au_x = 0 \quad (51)$$

μελετήστε την ευστάθεια των παρακάτω σχημάτων  
( $|R| = |a|\Delta t/\Delta x \leq 1$ )

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R(u_{k+1}^n - u_k^n) \quad (\text{FTFS})$$

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R(u_k^n - u_{k-1}^n) \quad (\text{FTFS})$$

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{R}{2}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) \quad (\text{FTCS})$$

Οι παρακάτω συμβολισμοί θα χρησιμοποιηθούν αργότερα:

$$\delta_+ u_k = u_{k+1} - u_k \quad (52)$$

$$\delta_- u_k = u_k - u_{k-1} \quad (53)$$

$$\delta_0 u_k = u_{k+1} - u_{k-1} \quad (54)$$

$$\delta^2 u_k = u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} \quad (55)$$

# Ευστάθεια : Παράδειγμα I

Για την υπερβολική ΔΕΜΠ

$$u_t + au_x = 0, \quad \text{με } a < 0 \quad (56)$$

να μελετήσετε την ευστάθεια του παρακάτω σχήματος  
( $|R| = |a|\Delta t/\Delta x \leq 1$ )

$$u_k^{n+1} = (1 + R)u_k^n - Ru_{k+1}^n \quad (57)$$

Κατάρχας πέρνουμε τον μετασχηματισμο Fourier του σχήματος

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1} &= (1 + R)\hat{u}^n - Re^{i\xi}\hat{u}^n \\ &= [(1 + R) - R \cos \xi - iR \sin \xi] \hat{u}^n \end{aligned} \quad (58)$$

Στη συνέχεια επειδή το σύμβολο είναι μιγαδικό

$$\rho(\xi) = (1 + R) - R \cos \xi - iR \sin \xi \quad (59)$$

θα βρούμε τα όρια της **απόλυτης τιμής** του  $\rho$  που θα πρέπει να είναι μικρότερα της μονάδας ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα (41) (για  $K = 1$  και  $\beta = 0$ ). Οπότε

$$|\rho|^2 = (1 + R)^2 - 2R(1 + R) \cos \xi + R^2$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του  $|\rho|^2$  για  $\xi \in [-\pi, \pi]$  και βρίσκουμε ότι υπάρχει μέγιστο στα  $\xi = 0$  και  $\xi = \pm\pi$ .

Οι τιμές του  $|\rho(\xi)|$  στα μέγιστα είναι

$$|\rho(0)| = 1 \quad \text{και} \quad |\rho(\pm\pi)| = |1 + 2R|$$

Για να ισχύει  $|\rho(\pm\pi)| \leq 1$  θα πρέπει το  $R$  να ικανοποιεί τη συνθήκη  $-1 \leq 1 + 2R \leq 1$ .

Επειδή δε  $R < 0$  θα είναι  $1 + 2R \leq 1$  και επομένως το σχήμα θα είναι υπο-συνθήκη ευσταθές αν  $R \geq -1$ .

## Ευστάθεια: Παράδειγμα II

Για την ΔΕΜΠ

$$u_t + au_x = 0, \quad \text{με } a < 0 \quad (60)$$

μελετήστε την ευστάθεια του σχήματος (FTCS) ( $|R| = |a|\Delta t/\Delta x \leq 1$ )

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{R}{2} \delta_0 u_{k+1}^n \quad (61)$$

Κατ' αρχάς πέρνουμε το μετασχηματισμό Fourier του σχήματος

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n - \frac{R}{2} (e^{i\xi} - e^{-i\xi}) \hat{u}^n = [1 - iR \sin \xi] \hat{u}^n \quad (62)$$

Οπότε το 'σύμβολο' είναι:

$$|\rho|^2 = 1 + R^2 \sin^2 \xi \geq 1$$

Επομένως το σχήμα (61) είναι **ασταθές** για κάθε  $R \neq 0$ .

# Ευστάθεια: Σχήμα Lax-Wendroff

Η ΔΕΜΠ  $u_t + au_x = 0$  μπορεί να γραφεί ως:

$$u_{tt} = (-au_x)_t = -au_{xt} = -a(u_t)_x = -a(-au_x)_x = a^2u_{xx} \quad (63)$$

Οπότε επειδή:

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= u_k^n + (u_t)_k^n \Delta t + (u_{tt})_k^n \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3) \\ &= u_k^n + (-au_x)_k^n \Delta t + (a^2u_{xx})_k^n \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3) \\ &= u_k^n - a \left( \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \right) \Delta t \\ &\quad + a^2 \left( \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \right) \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

δηλαδή προσεγγίζουμε την ΔΕΜΠ  $u_t + au_x = 0$  με την εξίσωση διαφορών

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{R}{2} \delta_0 u_k^n + \frac{R^2}{2} \delta^2 u_k^n \quad \text{με} \quad R = a\Delta t/\Delta x. \quad (64)$$



## Ευστάθεια: Σχήμα Lax-Wendroff

Το σχήμα Lax-Wendroff έχει ακρίβεια  $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$  και το **σύμβολο του** είναι:

$$\rho(\xi) = 1 - 2R^2 \sin^2(\xi/2) - iR \sin \xi \quad (65)$$

Αλλά επειδή

$$|\rho(\xi)|^2 = 1 - 4R^2 \sin^4(\xi/2) + 4R^4 \sin^4(\xi/2) \quad (66)$$

αν διαφορίσουμε ως προς  $\xi$  βρίσκουμε τις ακραίες τιμές  $\xi = \pm\pi$  και  $0$ .  
Για τις οποίες βρίσκουμε:

$$|\rho(0)|^2 = 1 \quad \text{και} \quad |\rho(\pm\pi)|^2 = |\rho(\pi)|^2 = (1 - 2R^2)^2. \quad (67)$$

Οπότε για  $R^2 \leq 1$  λαμβάνουμε  $(1 - 2R^2)^2 \leq 1$  και επομένως το σχήμα Lax-Wendroff είναι υπο-συνθήκη ευσταθές για

$$|R| = |a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (68)$$

και είναι **2ης τάξης ως προς τη χρονική και χωρική διάσταση.**

Μπορεί να δημιουργηθεί από το 'ασταθές' FTCS  $O(Dt, Dx^2)$  σχήμα:

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{R}{2} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) \quad (69)$$

αντικαθιστώντας  $u^n$  με το μέσο όρο:  $u_k^n = (u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)/2$ .

$$u_k^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) - \frac{R}{2} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) \quad (70)$$

που είναι ασταθές για  $|R| \leq 1$  (ΓΙΑΤΙ ;).

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ:** Δείξτε ότι το παραπάνω σχήμα αντιστοιχεί στη διακριτοποίηση της ακόλουθης ΔΕΜΠ:

$$u_t + au_x = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} u_{xx} \quad (71)$$

Ο επιπλέον όρος παίζει το ρόλο **αριθμητικής απόσβεσης** (numerical dissipation).

Για την υπερβολική ΔΕΜΠ

$$u_t + au_x = 0 \quad (72)$$

Εχουμε μελετήσει τα παρακάτω **άμμεσα σχήματα**:

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R(u_{k+1}^n - u_k^n) \quad (\text{FTFS}) \quad (73)$$

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R(u_k^n - u_{k-1}^n) \quad (\text{FTBS}) \quad (74)$$

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{R}{2}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) \quad (\text{FTCS}) \quad (75)$$

Τα οποία μπορούν να γραφούν στην παρακάτω μορφή:

$$(1 - R)u_k^{n+1} + Ru_{k+1}^{n+1} = u_k^n \quad (\text{BTFS}) \quad (76)$$

$$-Ru_{k-1}^{n+1} + (1 + R)u_k^{n+1} = u_k^n \quad (\text{BTBS}) \quad (77)$$

$$-\frac{R}{2}u_{k-1}^{n+1} + u_k^{n+1} + \frac{R}{2}u_{k+1}^{n+1} = u_k^n \quad (\text{BTCS}) \quad (78)$$

## Εμμεσα Σχήματα - Ευστάθεια I

Θα μελετήσουμε την ευστάθεια του BFTS σχήματος (76). Αν πάρουμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier λαμβάνουμε:

$$(1 - R)\hat{u}^{n+1} + Re^{i\xi}\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n \quad (79)$$

Οπότε το 'σύμβολο' θα είναι:

$$\rho(\xi) = \frac{1}{1 - R + R \cos \xi + iR \sin \xi} \quad (80)$$

και το μέτρο του:

$$|\rho(\xi)|^2 = \frac{1}{1 - 4R \sin^2 \xi/2 + 4R^2 \sin^2 \xi/2} \quad (81)$$

Επειδή  $R \leq 0$  ( $a < 0$ ) λαμβάνουμε ότι:

$$1 - 4R \sin^2 \xi/2 + 4R^2 \sin^2 \xi/2 = 1 - 4R(1 - R) \sin^2 \xi/2 \geq 1 \quad (82)$$

δηλαδή  $|\rho(\xi)|^2 \leq 1$ .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: για  $0 < R < 1$ , το σχήμα είναι **ασταθές**.

Άρα, το σχήμα (76) είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν  $R \leq 0$  or  $R \geq 1$ .

Για το σχήμα:

$$-\frac{R}{2}u_{k-1}^{n+1} + u_k^{n+1} + \frac{R}{2}u_{k+1}^{n+1} = u_k^n \quad (83)$$

το 'σύμβολο' είναι (ΓΙΑΤΙ;)

$$\rho(\xi) = \frac{1}{1 + iR \sin \xi} \quad (84)$$

Οπότε:

$$|\rho(\xi)|^2 = \frac{1}{1 + R^2 \sin^2 \xi} \leq 1 \quad (85)$$

άρα το σχήμα (83) είναι **πάντοτε ευσταθές**, παρότι το αντίστοιχο 'αμεσο' σχήμα είναι ασταθές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Μελετήστε την ευστάθεια του σχήματος (77)

# 1D μορφή της κυματικής εξίσωσης

Αν και μελετήσαμε την κυματική εξίσωση νωρίτερα θα προσπαθήσουμε να τη μελετήσουμε με βάση τα πρόσφατα σχήματα, και να δούμε τη χρήση τους. Η εξίσωση είναι:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{για } 0 < x < a \quad \text{και} \quad 0 < t < b \quad (86)$$

Που μπορούμε να τη γράψουμε σαν ένα σύστημα τριών 1D ΔΕΜΠ. Θέτουμε:

$$h = c u_x \quad \text{ανδ} \quad f = u_t \quad (87)$$

και λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} h_t &= c f_x \\ f_t &= c h_x \\ u_t &= f \end{aligned}$$

Με μορφή διανυσμάτων μπορεί να γραφεί ως:

$$\vec{U}_t + \mathbf{Q} \vec{U}_x = 0 \quad \text{όπου} \quad \vec{U} = (h, f) \quad (88)$$

και

$$\mathbf{Q} = - \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad (89)$$

Θεωρήστε την ΔΕΜΠ

$$u_t + au_x + bu_y = 0 \quad (90)$$

με αρχική συνθήκη  $u(x, y, 0) = f(x, y)$ . Οπου  $a$  είναι η ταχύτητα διάδοσης στη  $x$ -διεύθυνση και  $b$  η ταχύτητα διάδοσης στη  $y$ -διεύθυνση.

Ενα προφανές, αλλά ασταθές σχήμα είναι το παρακάτω:

$$\begin{aligned} u_{jk}^{n+1} &= u_{jk}^n - R_x (u_{j+1k}^n - u_{j-1k}^n) - R_y (u_{jk+1}^n - u_{jk-1}^n) \\ &= (1 - R_x \delta_{x0} - R_y \delta_{y0}) u_{jk}^n \end{aligned} \quad (91)$$

όπου  $R_x = a\Delta t/\Delta x$  και  $R_y = b\Delta t/\Delta y$ .

Ενα υπο-συνθήκη ευσταθές σχήμα είναι το παρακάτω:

$$u_{jk}^{n+1} = (1 - R_x \delta_{x-} - R_y \delta_{y-}) u_{jk}^n \quad (92)$$

**ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ:** Αν πάρουμε τον 2-διάστατο μετασχηματισμό Fourier της εξίσωσης (91) λαμβανουμε:

$$\hat{u}^{n+1} = [1 - R_x (1 - e^{-i\xi}) - R_y (1 - e^{-i\eta})] \hat{u}^n \quad (93)$$

Οπότε το σύμβολο του σχήματος (91) δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(\xi, \eta) = 1 - R_x (1 - e^{-i\xi}) - R_y (1 - e^{-i\eta}) \quad (94)$$

και

$$|\rho(\xi, \eta)|^2 = [1 - 2R_x \sin^2(\xi/2) - 2R_y \sin^2(\eta/2)]^2 + [R_x \sin \xi + R_y \sin \eta]^2$$

Παραγωγίζοντας  $|\rho|^2$  ως προς  $\xi$  και  $\eta$  και θέτοντας την παράγωγο με μηδέν, που σημαίνει ότι έχει μέγιστο για  $(\pm\pi, \pm\pi)$ ,  $(\pm\pi, 0)$ ,  $(0, \pm\pi)$  και  $(0, 0)$ . Εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$|\rho(0, 0)| = 1, \quad |\rho(\pm\pi, 0)| = (1 - 2R_x)^2, \quad |\rho(0, \pm\pi)| = (1 - 2R_y)^2$$

και

$$|\rho(\pm\pi, \pm\pi)| = (1 - 2R_x - 2R_y)^2.$$

Η συνθήκη  $(1 - 2R_x)^2 \leq 1$  απαιτεί ότι  $0 \leq R_x \leq 1$ .

Η συνθήκη  $(1 - 2R_y)^2 \leq 1$  απαιτεί ότι  $0 \leq R_y \leq 1$ .

Η συνθήκη  $(1 - 2R_x - 2R_y)^2 \leq 1$  απαιτεί ότι  $0 \leq R_x + R_y \leq 1$ .

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Βρίσκουμε ότι το σχήμα (91) είναι 1ης τάξης σε ακρίβεια ως προς τις χωρικές και χρονικές διαστάσεις, υπο-συνθήκη ευσταθής για  $R_x + R_y \leq 1$ , για  $R_x \geq 0$  και  $R_y \geq 0$ .



## Το 2D σχήμα των Lax-Friedrichs

Το 2D σχήμα των Lax-Friedrichs για την προσεγγιστική λύση της (90) είναι:

$$\begin{aligned} u_{jk}^{n+1} &= \frac{1}{4} (u_{j+1k}^n + u_{j-1k}^n + u_{jk+1}^n + u_{jk-1}^n) \\ &\quad - \frac{R_x}{2} \delta_{x0} u_{jk}^n - \frac{R_y}{2} \delta_{y0} u_{jk}^n \end{aligned} \quad (95)$$

**ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ:** υπολογίζουμε τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier και λαμβάνουμε το 'συμβολο' για το παραπάνω σχήμα:

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (\cos \xi + \cos \eta) - i (R_x \sin \xi + R_y \sin \eta) \quad (96)$$

Η ποσότητα  $|\rho(\xi, \eta)|^2$  μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} |\rho(\xi, \eta)|^2 &= 1 - (\sin^2 \xi + \sin^2 \eta) [1/2 - (R_x^2 + R_y^2)] \\ &\quad - \frac{1}{4} (\cos \xi - \cos \eta)^2 - (R_x \sin \eta - R_y \sin \xi)^2 \end{aligned} \quad (97)$$

Επειδή οι δύο τελευταίοι όροι της εξίσωσης είναι αρνητικοί, λαμβάνουμε:

$$|\rho(\xi, \eta)|^2 = 1 - (\sin^2 \xi + \sin^2 \eta) [1/2 - (R_x^2 + R_y^2)] \quad (98)$$

Αν  $[1/2 - (R_x^2 + R_y^2)] \geq 0$ , οπότε  $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$ .

Αρα αν:

$$R_x^2 + R_y^2 \leq \frac{1}{2} \quad (99)$$

το σχήμα είναι ευσταθές.