

Laplace



# ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κων/νος Κόκκοτας  
Τμήμα Φυσικής, ΑΠΘ

27 Μαρτίου 2009



# Περιεχόμενα

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 0.1   | ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & Mathematica . . . . .         | 1  |
| 0.1.1 | Αναλυτική Επίλυση ΔΕ . . . . .                       | 1  |
| 0.1.2 | Αριθμητική Επίλυση ΔΕ . . . . .                      | 5  |
| 0.2   | ΑΛΥΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ . . . . .                           | 21 |
| 0.3   | ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ . . . . . | 24 |
| 0.4   | ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ . . . . .                      | 26 |
| 0.5   | ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ . . . . .                      | 28 |
| 0.5.1 | Η Εξίσωση Laplace . . . . .                          | 28 |
| 0.6   | ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ . . . . .                      | 34 |
| 0.6.1 | Αναλυτική Λύση . . . . .                             | 34 |
| 0.6.2 | Αριθμητική Λύση: Εξίσωση Διαφορών . . . . .          | 35 |
| 0.6.3 | Αριθμητική Λύση: Μέθοδος Crank-Nicholson . . . . .   | 37 |
| 0.7   | ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ . . . . .                      | 40 |
| 0.7.1 | Παλλόμενη Χορδή . . . . .                            | 40 |
| 0.7.2 | Παλλόμενη Μεμβράνη . . . . .                         | 42 |
| 0.7.3 | Αριθμητική Επίλυση της Κυματικής Εξίσωσης . . . . .  | 48 |



## 0.1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & Mathematica

Η Mathematica έχει τη δυνατότητα αριθμητικής αλλά και αναλυτικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων. Αρχικά θα μελετήσουμε την αναλυτική επίλυση ΔΕ αλλά στη συνέχεια θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην αριθμητική επίλυση ΔΕ.

### 0.1.1 Αναλυτική Επίλυση ΔΕ

Ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή

```
In[1]:= eq1 = y''[t] + w0^2 y[t] == 0
```

με αρχικές συνθήκες

```
In[2]:= initial = {y[0] == A, y'[0] == B}
```

προσθέτοντας τις αρχικές συνθήκες στην αρχική ΔΕ δημιουργούμε τη λίστα:

```
In[3]:= eq2 = Append[initial, eq1]
```

η αναλυτική λύση δίνεται με εφαρμογή της εντολής **DSolve**

```
In[4]:= eq3 = DSolve[eq2, y[t], t] // Flatten // ExpandAll
```

```
Out[4]= {y[t] -> A cos[t w0] +  $\frac{B \sin[t w0]}{w0}$ }
```

η εντολή **Flatten** εξαλείφει ένα ζεύγος αγκίστρων ({}).

```
In[5]:= eq3 /. {Rule -> Equal}
```

```
Out[5]= {y[t] == A cos[t w0] +  $\frac{B \sin[t w0]}{w0}$ }
```

Στην τελευταία εντολή μετατρέψαμε τον "κανόνα" σε μια εξίσωση με την αντικατάσταση **Rule** → **Equal**.

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3 : Βολή σε Σταθερό Βαρυτικό Πεδίο

Εστω ένα σώμα μάζας  $m$  σε ένα βαρυτικό πεδίο

1. Να λυθούν οι εξισώσεις κίνησης για τροχιές που έχουν την ίδια αρχική και τελική θέση αλλά διαφορετικούς ολικούς χρόνους
2. Δημιουργήστε γραφήματα των διαφορετικών τροχιών
3. Λύστε τις εξισώσεις κίνησης για τροχιές με συγκεκριμένη αρχική ταχύτητα και γωνία βολής. Να βρεθεί η θέση του μέγιστου ύψους.
4. Δημιουργήστε τα γραφήματα για το προηγούμενο ερώτημα αλλά για διαφορετικές γωνίες.

### ΛΥΣΗ

#### 1ο ερώτημα

```
In[6]:= Clear["Global`*"]
```

Οι εξισώσεις κίνησης για ένα σωματίδιο με μάζα  $m$  είναι:

```
In[7]:= eq1 = {m x''[t] == 0, m z''[t] == -m g}
```

όπου  $z$  είναι η κάθετη απόσταση (ύψος) και  $x$  είναι η οριζόντια απόσταση. Αν η θέση τη χρονική στιγμή  $t = 0$  είναι  $\{x, y\} = \{0, 0\}$  και η τελική θέση μετά από χρόνο  $t = tf$  είναι  $\{xf, zf\}$ , οι οριακές συνθήκες είναι:

```
In[8]:= initial1 = {x[0] == 0, x[tf] == xf, z[0] == 0,
z[tf] == zf}
```

ενώνοντας την **eq1** με την **initial1** και χρησιμοποιώντας την εντολή **DSolve** λαμβάνουμε:

```
In[9]:= dsol1 =
(DSolve[Join[eq1, initial1], {x[t], z[t]},
t][[1]]//Simplify)
Out[9]= {x[t] -> t xf / tf, z[t] -> t (g tf (-t + tf) + 2 zf) / (2 tf)}
```

## 2ο ερώτημα

Θα εκτυπώσουμε τις τροχιές για τρεις διαφορετικούς τελικούς χρόνους  $tf = \{5, 10, 15\}$  για τις παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

```
In[10]:= values1 = {xf -> 300, zf -> 0, g -> 9.8}
```

Οι συντεταγμένες σαν συναρτήσεις του χρόνου είναι

```
In[11]:= coord1[tf_] = {x[t], z[t]} /. dsol1 /. values1
Out[11]= {300 t / tf, 4.9 t (-t + tf)}
```

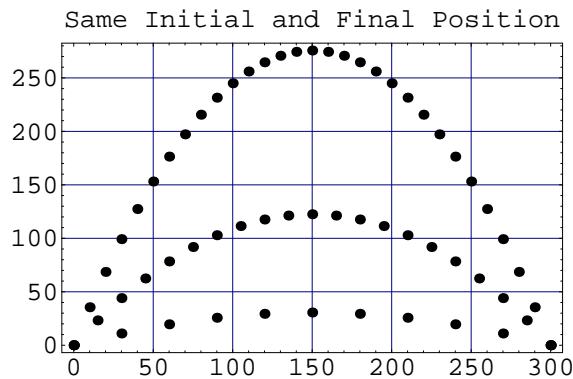
Η γραφική παράσταση των τροχιών θα δημιουργηθεί με τη χρήση της εντολής **ListPlot**. Θα επιλέξουμε χρονικές υποδιαίρεσεις 0.5 sec.

```
In[12]:= Clear[plot1];
plot1[tf_] :=
ListPlot[
Evaluate[Table[coord1[tf],
{t, 0, tf, 0.5}]],
PlotStyle -> PointSize[0.02],
PlotLabel -> (" Same Initial and Final Positions " ),
GridLines -> Automatic]
```

```
In[13]:= plotarray2 = Table[plot1[tf], {tf, 5, 15, 5}];
```

```
In[14]:= Show[plotarray2]
```





Out[14]= -Graphics-

### 3ο ερώτημα

Θα λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης με αρχική ταχύτητα  $v_0$  και αρχική γωνία  $\alpha$

```
In[15]:= initial2 = {x[0] == 0, x'[0] == v0 Cos[alpha],
                    z[0] == 0, z'[0] == v0 sin[alpha]};
```

Η λύση της **εχ1** με τις παραπάνω αρχικές συνθήκες είναι:

```
In[16]:= dsol2 =
          DSolve[Join[eq1, initial2], {x[t], z[t]},
                t][[1]]
```

```
Out[16]= {x[t] -> t v0 cos[alpha],
          z[t] -> 1/2 (-g t^2 + 2 t v0 sin[alpha])}
```

Ο χρόνος που απαιτείται για να φθάσει στο μέγιστο ύψος υπολογίζεται αν πάρουμε τη χρονική παράγωγο της  $z(t)$ , μηδενίσουμε το αποτέλεσμα και λύσουμε την εξίσωση ως προς το χρόνο  $t$ :

```
In[17]:= eq2 = D[z[t]/. dsol2, t] == 0;
          tsol = Solve[eq2, t][[1]]
```

```
Out[17]= {t -> v0 sin[alpha] / g}
```

Η θέση του μέγιστου ύψους λαμβάνεται υπολογίζοντας τα  $x[t_{max}]$   $y[t_{max}]$

```
In[18]:= {x[t], z[t]} /. dsol2 /. tsol // Simplify
Out[18]= {v0^2 cos[alpha] sin[alpha] / g, v0^2 sin[alpha]^2 / (2 g)}
```

### 4ο ερώτημα

Θα δημιουργήσουμε τις γραφικές παραστάσεις για  $\alpha = \{\pi/8, 2\pi/8, 3\pi/8\}$ , χρησιμοποιώντας τις παρακάτω τιμές

```
In[19]:= values2 = {g -> 9.8, v0 -> 100};
```

για τις παρακάτω συντεταγμένες της τροχιάς:

```
In[20]:= coord2[alpha_] =
          {x[t], z[t]}/. dsol2 /. values2
```

```
Out[20]= {100 t cos[alpha],
           $\frac{1}{2} (-9.8 t^2 + 200 t \sin[alpha])$ }
```

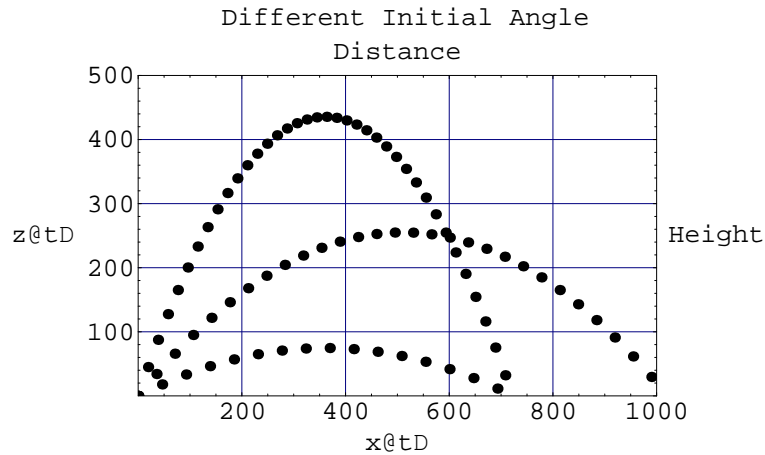
Η γραφική παράσταση θα δημιουργηθεί με τη χρήση της εντολής **ListPlot**. Θα επιλέξουμε χρόνους από 0 ως 20 seconds με βήματα 1 sec. Θα προσθέσουμε μερικές επιπλέον επιλογές στη δημιουργία της γραφικής παράστασης που δεν είναι αναγκαίες αλλά βελτιώνουν τη μορφή του γραφήματος.

```
In[21]:= Clear[plot2];
          plot2[alpha_] :=
          ListPlot[
            Evaluate[Table[coord2[alpha],
                          {t, 0, 20, 0.5}]],
            PlotStyle → PointSize[0.02], Frame → True,
            PlotLabel →
              (" Different Initial Angle "),
            GridLines → Automatic,
            FrameLabel → {"x[t]", "z[t]", "Distance",
                          "Height"}]
```

η εντολή **plot2[alpha]** θα δημιουργήσει μια τροχιά. Στη συνέχεια μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα πίνακα με γραφήματα για δοθείσες τιμές του alpha.

```
In[22]:= plotarray2 = Table[plot2[alpha], {alpha, π/8, 3 π/8, π/8}];
```

```
In[23]:= Show[plotarray2,
              PlotRange → {{0, 1000}, {0, 500}},
              RotateLabel → False];
```



Δεν αποτελεί έκπληξη ότι η τροχιά για  $\alpha = \pi/4$  θα δώσει το μεγαλύτερο βεληνεκές.

### 0.1.2 Αριθμητική Επίλυση ΔΕ

Αν δεν είναι δυνατή η αναλυτική επίλυση της ΔΕ τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εντολή `NDSolve[eqns, y, x, xmin, xmax]` για τον αριθμητικό υπολογισμό των λύσεων. Οπου `eqns` είναι το σύστημα των ΔΕ για τη συνάρτηση  $\psi$  με ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  στο διάστημα  $[xmin, xmax]$ .

```
In[24]:= eq1 = {x''[t] == -x[t] - x[t]y[t]^2,
              y''[t] == -y[t] - x[t]y[t]^2};
```

με αρχικές συνθήκες

```
In[25]:= initial = {x[0] == 2, x'[0] == 0, y[0] == 1, y'[0] == 0};
```

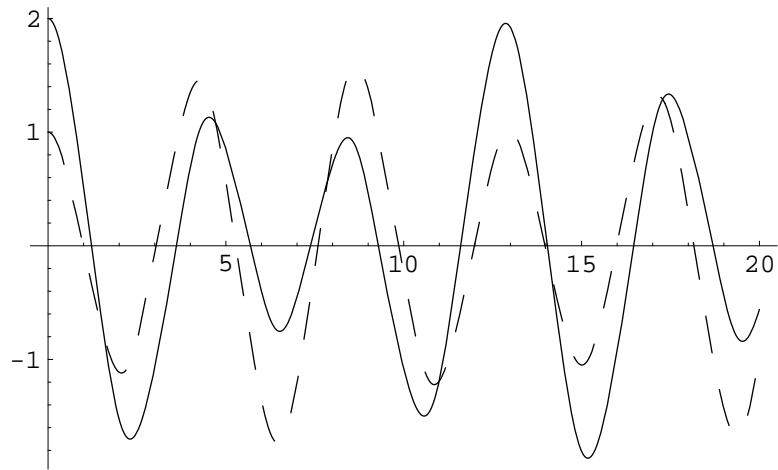
η αριθμητική λύση του συστήματος των ΔΕ για  $t = 1$  ως  $t = 20$  δίνεται απο την εντολή:

```
In[26]:= ndsol = NDSolve[Join[eq1, initial], {x, y},
                      {t, 0, 20}][[1]]
```

```
Out[26]= {x → InterpolatingFunction[{{0., 20.}}, <>],
          y → InterpolatingFunction[{{0., 20.}}, <>]}
```

Τα αριθμητικά δεδομένα δίνονται με τη χρήση της `InterpolatingFunction` της οποίας οι τιμές θα βρεθούν με interpolation (παρεμβολή). Οι γραφικές παραστάσεις είναι:

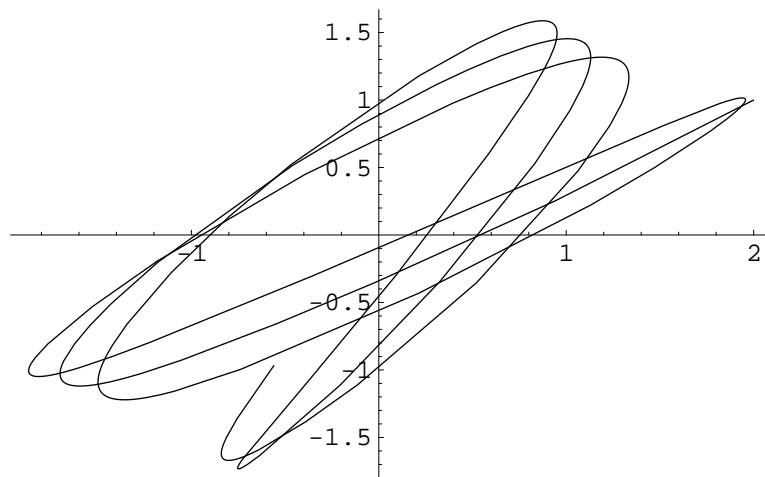
```
In[27]:= Plot[Evaluate[{x[t], y[t]}/. ndsol],
              {t, 0, 20},
              PlotStyle → {{Dashing[{ ]}},
                          {Dashing[{0.05}]}}]
```



Out[27]= -Graphics-

Η συνεχής γραμμή είναι η λύση  $x[t]$  και η διακεκομμένη είναι η  $y[t]$ . Στο επίπεδο  $x, y$  η λύση δίνεται από την εντολή:

```
In[28]:= ParametricPlot[
  Evaluate[{x[t], y[t]}/.ndsol], {t, 0, 20}]
```



Out[28]= -Graphics-

### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η NDSolve λύνει ένα ευρύ φάσμα ΔΕ αλλά και ορισμένες ΔΕΜΠ
2. η NDSolve δίνει αποτελέσματα μέσω της InterpolatingFunction.
3. Οι παράγωγοι στις ΔΕ πρέπει να ορίζονται ως  $y'[x]$

4. Στις κανονικές ΔΕ η συνάρτηση  $y[x]$  πρέπει να εξαρτάται μόνο από μία μεταβλητή. Στις ΔΕΜΠ μπορούν να είναι συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών.
5. Οι ΔΕ πρέπει να περιέχουν ικανές αρχικές και οριακές συνθήκες ώστε να μπορεί να επιλυθεί το πρόβλημα.
6. Οι αρχικές και οι οριακές συνθήκες δίνονται συνήθως στη μορφή  $y[x_0] == c_0$ ,  $y'[x_0] == dc_0$ , κτλπ. Είναι δυνατή και η χρήση πιο σύνθετων οριακών συνθηκών.
7. Περιοδικές οριακές συνθήκες μπορούν να ορισθούν μέσω της εξίσωσης  $y[x_0] == y[x_1]$ .
8. Οι ΔΕ στην NDSolve μπορούν να έχουν και μιγαδικές μεταβλητές.
9. Οι παρακάτω επιλογές μπορούν να δοθούν:
  - AccuracyGoal
  - InterpolatingPrecision
  - MaxSteps (χρησιμοποιεί αυτόματα 1000)
  - MaxStepSize
  - Method (για συνήθη ΔΕ χρησιμοποιεί τη μέθοδο Adams. Υπάρχουν και οι επιλογές Gear, Runge-Kutta (4-5ης τάξης Runge-Kutta-Fehlberg »
  - PrecisionGoal
  - StartingStepSize
  - WorkingPrecision

#### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4: Συζευγμένοι Αρμονικοί Ταλαντωτές

Οι εξισώσεις κίνησης δύο συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών (δύο εκκρεμή που συνδέονται με ένα ελατήριο) δίνονται από τις σχέσεις

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -c_1 x + c(y - x)$$

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = -c_2 y - c(y - x)$$

οι σταθερές  $c_1$ ,  $c_2$  υπολογίζονται από τα μήκη των εκκρεμών και τη βαρυτική έλξη  $Mg$  ενώ  $c$  είναι η σταθερά του ελατηρίου.

θα υποθέσουμε  $c_1 = c_2$  και θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις μία για ασθενή σύζευξη ( $c = c_1/10$ ) και μία για ισχυρή σύζευξη ( $c = 10c_1$ ).

#### ΛΥΣΗ

```
In[29]:= eq = {m x''[t] == -c1 x[t] + c(y[t] - x[t]),
             m y''[t] == -c2 y[t] - c(y[t] - x[t])};
```

δίνουμε τις παρακάτω αρχικές τιμές (σε  $m$ )

```
In[30]:= initial = {x[0] == 5, x'[0] == 0, y[0] == 8,
                  y'[0] == 0};
```

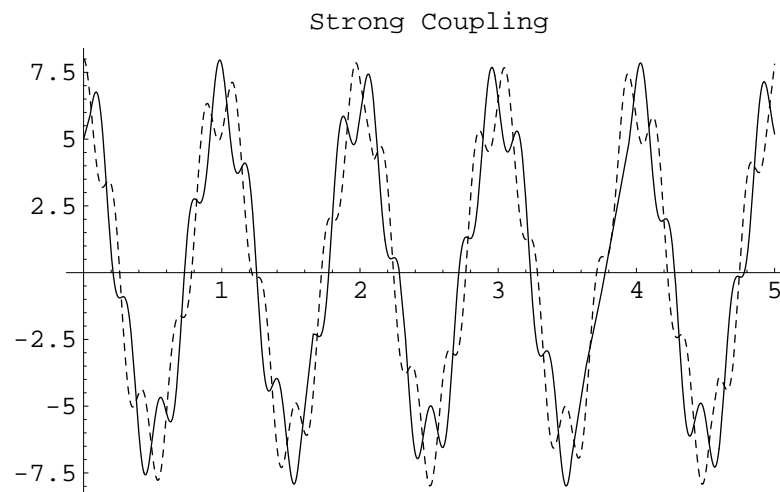
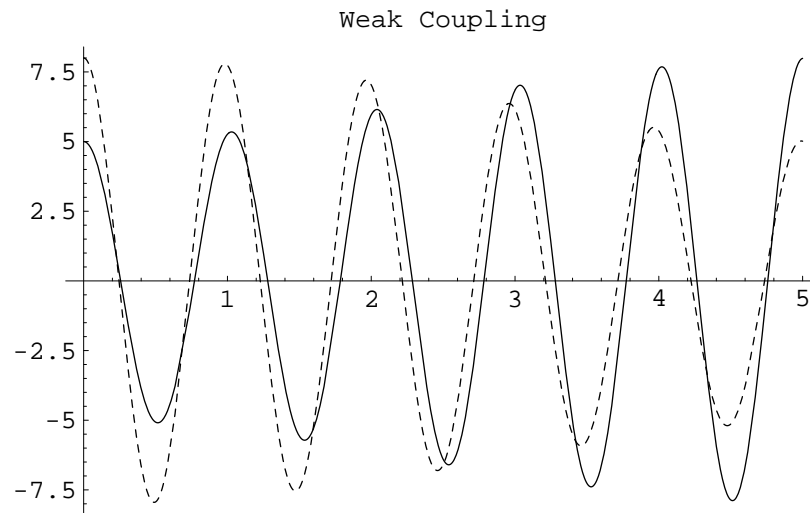
και δύο ζεύγη παραμέτρων  $c_1, c_2, c$  για ασθενή και ισχυρή σύζευξη (σε μονάδες  $Nm^{-1}$ )

```
In[31]:= values1 = {C1 → 39.5, C2 → 39.5, C → 3.95,
                   M → 1};
          values2 = {C1 → 39.5, C2 → 39.5, C → 395,
                   M → 1};
```

```
In[32]:= eq1 = eq /. values1; eq2 = eq /. values2;
```

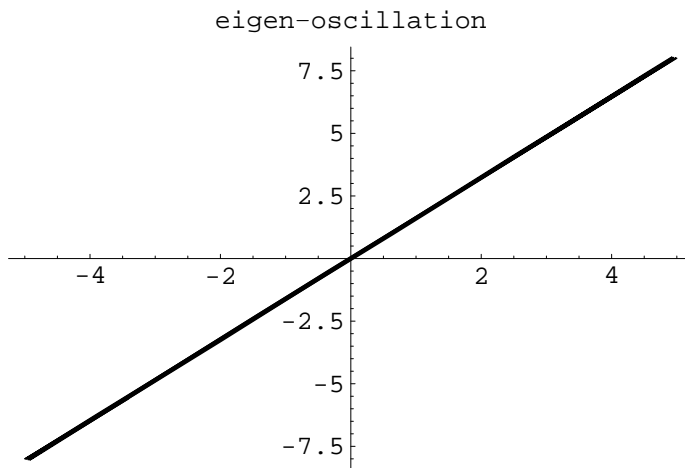
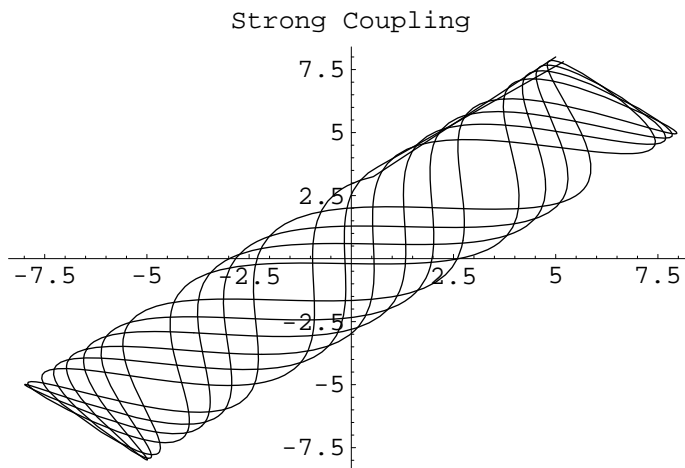
```
In[33]:= ndsol1 =
          NDSolve[Join[eq1, initial], {x, y},
                {t, 0, 5}, MaxSteps → 1000][[1]];
          ndsol2 =
          NDSolve[Join[eq2, initial], {x, y},
                {t, 0, 5}, MaxSteps → 4000][[1]];
```

```
In[34]:= Plot[Evaluate[{x[t], y[t]}/. ndsol1],
              {t, 0, 5},
              PlotStyle → {{Dashing[{ ]}},
                           {Dashing[{0.01]}}},
              PlotLabel → "Weak Coupling"]
          Plot[Evaluate[{x[t], y[t]}/. ndsol2],
              {t, 0, 5},
              PlotStyle → {{Dashing[{ ]}},
                           {Dashing[{0.01]}}},
              PlotLabel → "Strong Coupling"]
```



Out[34]= (-Graphics-)(-Graphics-)

```
In[35]:= ParametricPlot[
  Evaluate[{x[t], y[t]}/. ndsol1],
  {t, 0, 5}, PlotLabel -> "Weak Coupling"]
ParametricPlot[
  Evaluate[{x[t], y[t]}/. ndsol2],
  {t, 0, 5}, PlotLabel -> "Strong Coupling"]
```



Out[35]= (-Graphics-) (-Graphics-)

Αξιζει να δοκιμάσουμε διάφορες ομάδες αρχικών τιμών και παραμέτρων.



**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5: Αρμονικός Ταλαντωτής με Απόσβεση**

Ας θεωρήσουμε ένα αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση. Η εξίσωση κίνησης θα είναι:

$$x''(t) + \gamma x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Η απόσβεση είναι ανάλογη της ταχύτητας και χαρακτηρίζεται από την παράμετρο  $\gamma$ .

1. Να λυθεί η εξίσωση με αρχικές συνθήκες  $x(0) = x_0$  και  $x'(0) = u_0$ . Στη συνέχεια να γίνει το γράφημα της λύσης σαν συνάρτηση του  $t$  και του  $2\omega = \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}$ .
2. Να γίνει το γράφημα για την φθίνουσα περίπτωση, (πραγματικό  $\omega$  ή  $\gamma^2 > 4\omega_0^2$ ).
3. Να γίνει το γράφημα για την οριακά φθίνουσα περίπτωση, ( $\omega = 0$  ή  $\gamma^2 = 4\omega_0^2$ ).
4. Να γίνει το γράφημα για την περίπτωση της φθίνουσας ταλάντωσης, (φανταστικό  $\omega$  ή  $\gamma^2 < 4\omega_0^2$ ). Δημιούργησε διαγράμματα φάσης αλλά και χρόνου-φάσης.
5. Σχεδίασε όλες τις παραπάνω λύσεις σε ένα γράφημα.

**ΛΥΣΗ****1ο ερώτημα**

```
In[36]:= Clear["Global`*"];
```

Θα θέσουμε  $\omega = w$  και  $\gamma = gam$  οπότε η ΔΕ ορίζεται ως:

```
In[37]:= eq1 = x''[t] + gam x'[t] + w0^2 x[t] == 0;
```

θα τη λύσουμε με τη βοήθεια της NDSolve:

```
In[38]:= dsol =
  DSolve[{eq1, x[0] == x0, x'[0] == v0},
  x[t], t][[1]];

```

Πριν παρουσιάσουμε τη λύση είναι χρήσιμο να κάνουμε την αντικατάσταση  $2\omega = \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}$

```
In[39]:= wsub = {(gam^2 - 4 * w0^2)^(1/2) -> (2 w),
  1/(gam^2 - 4 * w0^2)^(1/2) -> 1/(2 w)};
```

οπότε οι λύση είναι:

```
In[40]:= dsol = (dsol // Simplify) // . wsub;
  x[t_] = x[t] /. dsol
Out[40]= 1/4 w (e^(-1/2 t (gam+2 w)) (2 (-1 + e^(2 t w)) v0 +
  ((-1 + e^(2 t w)) gam + 2 (1 + e^(2 t w)) w) x0))
```

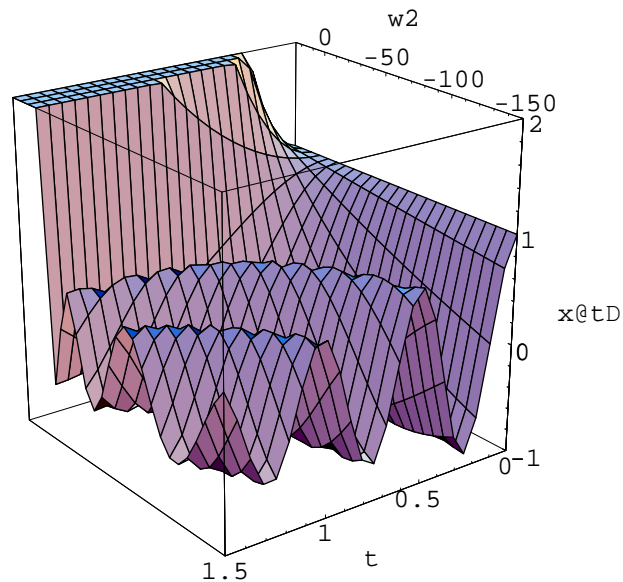
είναι προφανές από την παραπάνω λύση ότι έχουμε τρεις διαφορετικές λύσεις ανάλογα με τις τιμές του  $2\omega = \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}$ , δηλαδή αν είναι πραγματική, μηδέν ή φανταστική. Και οι τρεις περιπτώσεις θα μελετηθούν στη συνέχεια.

```
In[41]:= values = {x0 → 1, v0 → 0, gam → 1};
```

**Παρατήρηση:** Η αντικατάσταση  $\omega \rightarrow \sqrt{\omega^2}$  γίνεται ώστε το  $\omega$  να γίνεται μιγαδικό όταν θέτουμε αρνητικές τιμές στο  $\omega^2$ . Μεταβάλλοντας το  $\omega^2$  από αρνητικές τιμές στο μηδέν και στη συνέχεια σε θετικές τιμές λαμβάνουμε τα τρία είδη λύσεων που προαναφέραμε.

```
In[42]:= p0 =
```

```
Plot3D[
  Evaluate[ x[t] /. values /.
    {w → Sqrt[w2]}, {w2, 25, -150},
  {t, 0, 1}, PlotPoints → 25,
  PlotRange → {-1, 2}, BoxRatios → {1, 1, 1},
  ViewPoint → {-4, 3, 2},
  AxesLabel → {"w2", "t", "x[t]"}]
```



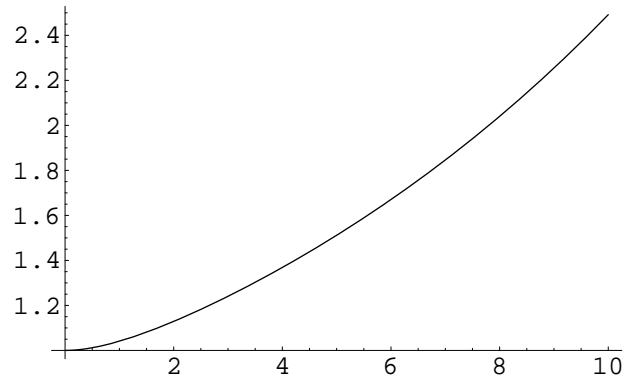
```
Out[42]= -SurfaceGraphics-
```

Είναι προφανές πως όταν το  $\omega^2$  λαμβάνει μεγάλες αρνητικές τιμές η λύση  $\xi[t]$  παρουσιάζει απόσβεση.  $\omega^2=0$  αντιστοιχεί στην οριακή περίπτωση και για  $0 < \omega^2 < \gamma$  η λύση αποσβένεται εκθετικά. Για  $\gamma < \omega^2$  η λύση αυξάνεται εκθετικά.

## 2ο ερώτημα

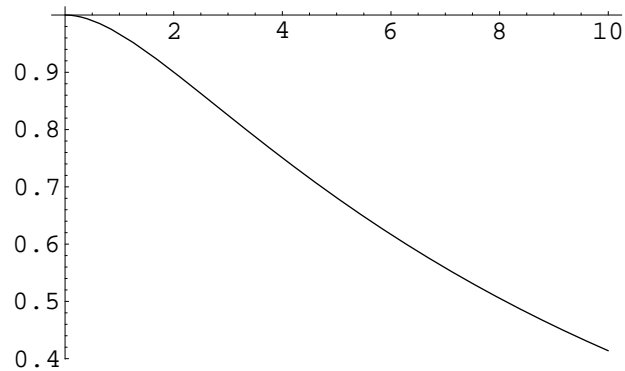
Για την περίπτωση που το  $\omega$  είναι πραγματικό  $\gamma^2 > 4\omega_0^2$  η λύση είναι εκθετικά αύξουσα ( $2\omega > 0$ ) ή φθίνουσα ( $0 < 2\omega < \gamma$ ), όπως φαίνεται στα παρακάτω γραφήματα.

```
In[43]:= p1 =
Plot[Evaluate[x[t] /. values /. {w → 0.6}],
{t, 0, 10}]
```



Out[43]= -Graphics-

```
In[44]:= p2 =
Plot[Evaluate[x[t] /. values /. {w → 0.4}],
{t, 0, 10}]
```



Out[44]= -Graphics-

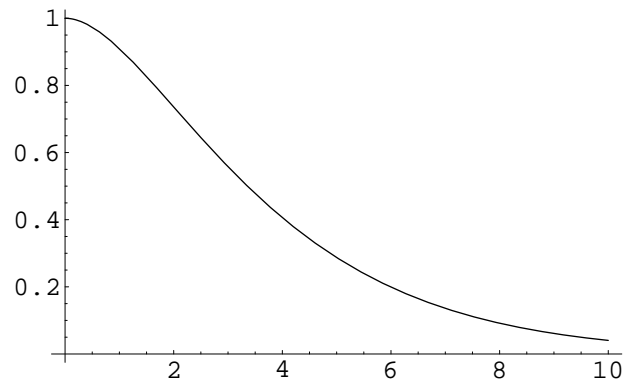
### 3ο ερώτημα

Η οριακή περίπτωση  $\omega=0$  ( $\gamma^2 = 4\omega_0^2$ ) είναι εξαιρετικά απλή:

```
In[45]:= Limit[x[t], w → 0]
```

```
Out[45]=  $\frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma \omega_0 t}{2}} (2 t v_0 + 2 x_0 + \gamma \omega_0 t x_0)$ 
```

```
In[46]:= p3 =
  Plot[
    Evaluate[Limit[x[t]//. values, w → 0]],
    {t, 0, 10}]
```



Out[46]= -Graphics-

#### 4ο ερώτημα

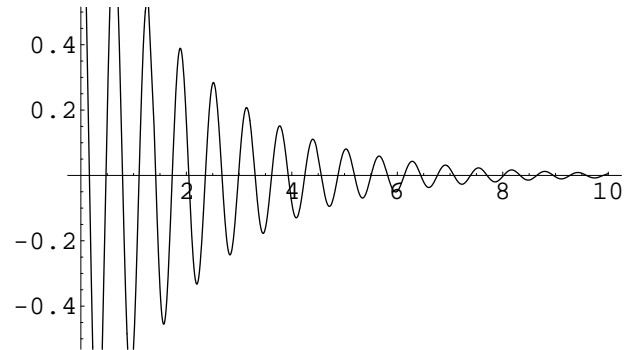
Σε αυτή την περίπτωση το  $\omega$  είναι φανταστικό ( $\gamma^2 < 4\omega_0^2$ ).

```
In[47]:= (x[t]//Simplify)
```

$$\text{Out[47]} = \frac{1}{4w} \left( e^{-\frac{1}{2}t(\gamma+2w)} (2(-1+e^{2tw})v_0 + ((-1+e^{2tw})\gamma+2(1+e^{2tw})w)x_0) \right)$$

Η λύση προφανώς είναι μια ταλάντωση με συχνότητα  $\omega$  και εκθετική απόσβεση  $e^{-\gamma t/2}$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω γράφημα:

```
In[48]:= p4 =
  Plot[Evaluate[x[t]//. values /. {w → i 10}],
    {t, 0, 10}]
```



Out[48]= -Graphics-

Χρήσιμα για τη μελέτη μας είναι το διαγράμμα φάσης, αλλά και η εξέλιξη της φάσης ως συνάρτηση του χρόνου. Τα παρακάτω γραφήματα εξυπηρετούν αυτό το σκοπό:

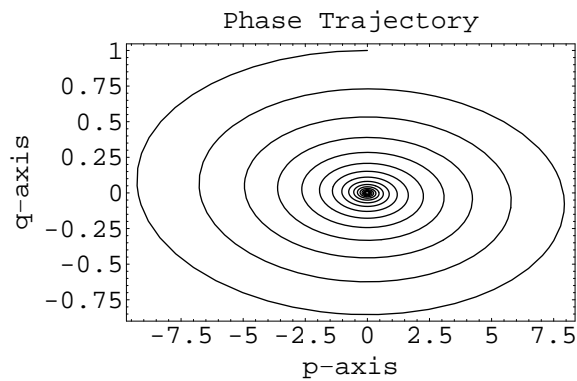
In[49]:=  $q = x[t] // \text{values} /. \{w \rightarrow i 10\} // \text{Simplify}$

$$\text{Out}[49] = \frac{1}{40} e^{(-\frac{1}{2} - 10i)t} ((20 + i) + (20 - i) e^{20i t})$$

In[50]:=  $p = x'[t] // \text{values} /. \{w \rightarrow i 10\} // \text{Simplify}$

$$\text{Out}[50] = \frac{401}{80} i e^{(-\frac{1}{2} - 10i)t} (-1 + e^{20i t})$$

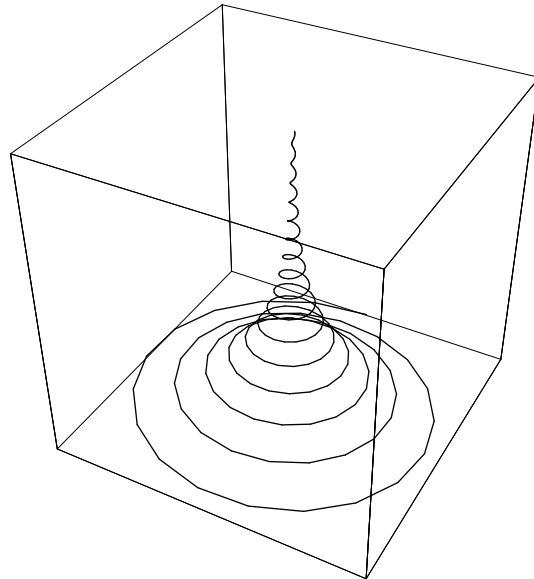
In[51]:= `ParametricPlot[{p, q}, {t, 0, 10},  
 PlotRange → All, Axes → False,  
 PlotLabel → "Phase Trajectory",  
 Frame → True,  
 FrameLabel → {"p - axis", "q - axis"}]`



Out[51]= -Graphics-

```
In[52]:= ParametricPlot3D[{p, q, t}, {t, 0, 10},
  PlotRange -> All, Axes -> False,
  PlotLabel -> "Evolution of Phase",
  PlotPoints -> 300, BoxRatios -> {1, 1, 1},
  AxesLabel -> {"p", "q", "t"}]
```

Evolution of Phase

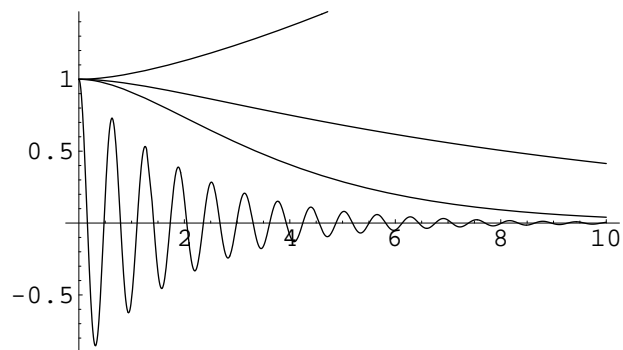


Out[52]= -Graphics3D-

### 5ο ερώτημα

Συνολικά όλες οι λύσεις συγχρονως είναι:

```
In[53]:= Show[p1, p2, p3, p4]
```



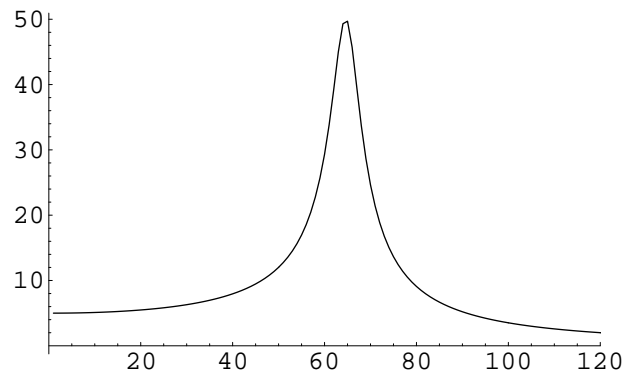
Out[53]= -Graphics-

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε τη συχνότητα μια ταλάντωσης και προς τούτο χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό Fourier. Παρακάτω φαίνονται τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε.

```
In[54]:= fdata = Table[p, {t, 0, 40, 0.001}]/N;
```

```
In[55]:= ffData = Abs[Fourier[fdata]];
```

```
In[56]:= ListPlot[ffData, PlotJoined -> True,
  PlotRange -> {{0, 120}, All}]
```



Out[56]= -Graphics-

Στο παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι το μέγιστο είναι για  $2\pi\omega \approx 62.8$ .

**ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ NDSolve, ΑΥΤΟ ΘΑ ΣΑΣ ΒΟΗΘΗΣΕΙ ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ**

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6: Το πρόβλημα Kepler

Η εξίσωση κίνησης για ένα σωματίδιο που κινείται σε ένα πεδίο κεντρικών δυνάμεων μπορεί να γραφεί ως:

$$u''(\phi) = -u(\phi) - \frac{m}{\ell^2} \frac{f(1/u(\phi))}{u(\phi)^2}$$

όπου  $u = 1/r$ . Υποθέτουμε πως η τροχιά είναι στο ισημερινό επίπεδο ( $\theta = \pi/2$ ) και ότι  $u = u(\phi)$ .

1. Να λυθεί η παραπάνω εξίσωση για το βαρυτικό δυναμικό  $V = -k/r$  με αρχικές συνθήκες  $u'(0) = 0$ .
2. Να γίνουν γραφήματα των ελλειπτικών και υπερβολικών τροχιών.

## ΛΥΣΗ

### 1ο ερώτημα

```
In[57]:= Clear["Global`*"];
```

```
In[58]:= Needs["Graphics`Graphics`"]
```

```
In[59]:= eq1 = u''[φ] ==
          -u[φ] - m f[1/u[φ]]/(L^2 u[φ]^2);
```

Η δύναμη δίνεται ως η παράγωγος του δυναμικού  $f(r) = -V'(r)$ . Στη συνέχεια δημιουργούμε μια εντολή που υπολογίζει τη δύναμη ως συνάρτηση του δυναμικού (μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για πλέον σύνθετα δυναμικά).

```
In[60]:= forceRule =
          {v → (-k/#&), f[1/u[φ]] → -v'[r],
          r → 1/u[φ]};
```

αντικαθιστώ το βαρυτικό δυναμικό στην eq1:

```
In[61]:= eq2 = eq1 /. forceRule
```

```
Out[61]= (u''[φ] ==  $\frac{km}{L^2} - u[\phi]$ )
```

Για λόγους απλότητας θα χρησιμοποιήσουμε την αρχική συνθήκη  $u'(0) = 0$ . Εφαρμόζοντας την ΔΣολε στην eq2 λαμβάνουμε

```
In[62]:= eq3 =
          DSolve[{eq2, u'[0] == 0, u[0] == u0(1 + e)},
```

```
          {u[φ], φ}][[1]] // Simplify
```

```
Out[62]= {u[φ] →  $\frac{km + (-km + (1 + e) L^2 u0) \cos[\phi]}{L^2}$ }
```

Η γενική μορφή της εξίσωσης της τροχιάς μπορεί να γραφεί ως  $u(\phi) = u_0[1 + e \cos(\phi)]$ . Όταν  $\phi = 0$  μπορούμε να λύσουμε για  $u_0$ :

```
In[63]:= u0Rule =
          solve[(u[φ] /. eq3 /. {cos[φ] → 0}) ==
          u0, u0][[1]]
```



$$\text{Out}[63]= \left\{ u_0 \rightarrow \frac{km}{L^2} \right\}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην eq3, καταλήγουμε στη λύση:

```
In[64]:= eq4 = eq3 // . u0Rule // Simplify
```

$$\text{Out}[64]= \left\{ u[\phi] \rightarrow \frac{km(1+e \cos[\phi])}{L^2} \right\}$$

Η παράμετρος  $e$  (εκκεντρότητα) καθορίζει τα τρία είδη των κωνικών τομών: (1)  $e > 1$  υπερβολικές, (2)  $e < 1$  ελλειπτικές ( $e = 0$  κυκλική) και (3)  $e = 1$ , παραβολικές.

Συνηθίζεται να ορίζουμε την ποσότητα  $a$  που ορίζεται ως  $l^2/(km) = a(1 - e^2)$ , οπότε η  $u[\phi]$  γράφεται:

```
In[65]:= eq5 = eq4 // . {L -> Sqrt[a km (1 - e^2)]}
```

$$\text{Out}[65]= \left\{ u[\phi] \rightarrow \frac{1+e \cos[\phi]}{a(1-e^2)} \right\}$$

## 2ο ερώτημα

θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή **PolarPlot** για να δημιουργήσουμε τις γραφικές παραστάσεις των ελλειπτικών και υπερβολικών τροχιών

```
In[66]:= Clear[plotOrbit];
```

```
plotOrbit[aa_, ee_] :=
```

```
PolarPlot[
```

```
(1/u[phi] // . eq5 // . {a -> aa, e -> ee} //
```

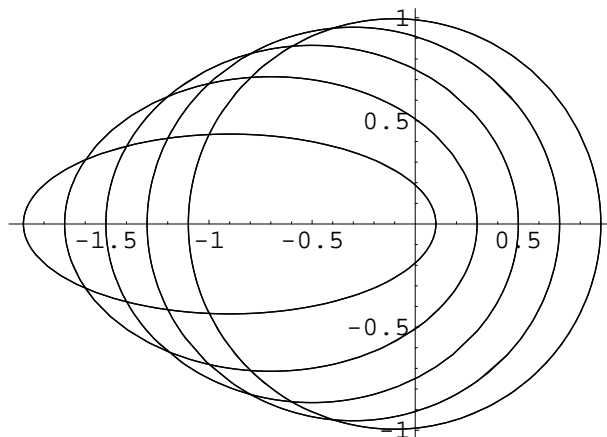
```
Evaluate), {phi, 0, 4 pi}];
```

Ελλειπτικές τροχιές

```
In[67]:= Show[
```

```
Table[plotOrbit[1, eIn],
```

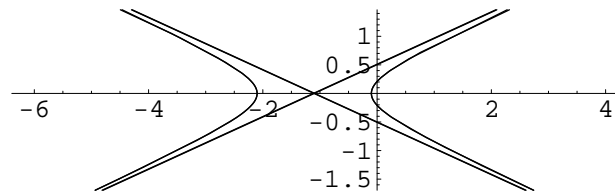
```
{eIn, 0.1, 0.9, 0.2}]] // Evaluate]
```



```
Out[67]= -Graphics-
```

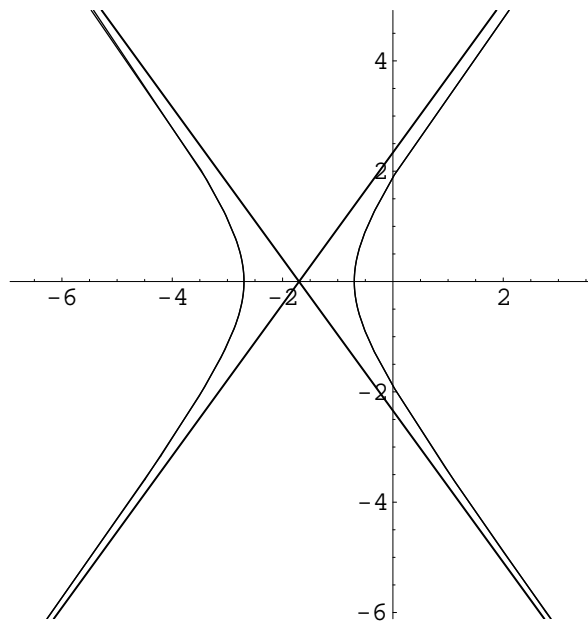
Υπερβολικές τροχιές

```
In[68]:= plotOrbit[1, 1.1]
```



```
Out[68]= -Graphics-
```

```
In[69]:= plotOrbit[1, 1.7]
```



```
Out[69]= -Graphics-
```

**ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ NDsolve, ΑΥΤΟ ΘΑ ΣΑΣ ΒΟΗΘΗΣΕΙ ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ**

## 0.2 ΑΛΥΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Επαναλάβετε το λυμένο παράδειγμα με τις βολές προσθέτωντας την αντίσταση του αέρα που θα είναι  $-bu$  για  $0 \leq b \leq 1$ .
2. Ένα βλήμα εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα  $20m/sec$  με γωνία  $30^\circ$ . Λίγο αργότερα διασπάται σε δύο τμήματα ένα εκ των οποίων έχει διπλάσια μάζα από το δεύτερο. Τα δύο βλήματα προσγειώνονται συγχρόνως. Το ελαφρύτερο σε απόσταση  $20m$  από το σημείο εκτόξευσης προς τη διεύθυνση που εκτοξεύτηκε αρχικά το βλήμα.
  - Που προσγειώνεται το έτερο βλήμα;
  - Δημιούργησε τις γραφικές παραστάσεις των δύο τροχιών, αλλά και αυτή του κέντρου μάζης.
  - Δημιούργησε μια συνάρτηση που θα δημιουργεί το γράφημα της κίνησης των δύο τμημάτων και του κέντρου μάζης όταν δίνονται: η αρχική ταχύτητα, η μάζα των τμημάτων και το σημείο πρόσπτωσης του ενός από τα τμήματα.
3. Στο πρόβλημα των συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών δοκιμάστε για τις ίδιες αρχικές τιμές τις τιμές  $c_1 = 40 Nm^{-1}$ ,  $c_2 = 30 Nm^{-1}$  και  $c = 10 Nm^{-1}$
4. Θεωρήστε το πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή με μια εξωτερική δύναμη διέγερσης για τον οποίον η εξίσωση κίνησης γράφεται ως

$$x''[t] + \gamma x'[t] + \omega_0^2 x[t] = Q_0 \cos(\omega t)$$

όπου  $4\omega_0^2 > \gamma$ . Η λύση θα είναι η υπέρθεση της λύσης της ομογενούς ΔΕ και μιας μερικής λύσης.

- (α') Βρείτε τη λύση της ομογενούς ΔΕ.
  - (β') Υποθέστε ότι η μερική λύση είναι της μορφής  $A \cos(\omega t + \delta_f)$  και υπολογίστε τα  $A$  και  $\delta_f$ . Γράψτε τη γενική μορφή της λύσης.
  - (γ') Δημιουργήστε γραφικές παραστάσεις της λύσης ως συνάρτηση του  $\omega_0$  και του  $t$ . Δημιουργήστε γραφικές παραστάσεις του  $A$  ως συνάρτηση του  $\omega_0$  και του  $\gamma$ . Παρατηρήστε τους συντονισμούς για  $\omega_0 = \omega_d$ .
  - (δ') Δημιουργήστε διαγράμματα φάσης.
5. Θεωρήστε τη μη-γραμμική ΔΕ

$$q''(t) - aq'(t) + bq^3(t) = 0$$

υποθέστε ότι  $b > 0$  και  $a$  θετικό ή αρνητικό. Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως *εξίσωση Δυφινγ*.

- (α') Λύστε αριθμητικά την ΔΕ και δημιουργήστε τις γραφικές παραστάσεις των  $q(t)$  και  $q'(t)$ . Δώστε αρχικές τιμές π.χ.  $q(0) = 0$  και  $q'(0) = 0.001$ . Ψποθέστε για τις παραμέτρους τα παρακάτω ζεύγη τιμών ( $b = 0.05, a = -1$ ) ( $b = 0.05, a = 4$ ). Τι παρατηρείτε για κάθε ένα από τα ζεύγη των παραμέτρων.
- (β') Δημιουργήστε διαγράμματα φάσης για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις.
- (γ') Δημιουργήστε προσομοιώσεις των παραπάνω περιπτώσεων.
- (δ') (Προαιρετικό πρόβλημα) Θα μπορούσατε να δημιουργήσετε γραφήματα του δυναμικού για την παραπάνω εξίσωση σαν συνάρτηση του  $q$  και να εξετάσετε την εξάρτηση από το  $a$ .

## 6. Θεωρήστε τη μη-γραμμική ΔΕ

$$q''(t) = aq(t) - bq^3(t) - \gamma q'(t) + Q_0 \cos(\omega t)$$

με αρχικές συνθήκες  $q(0) = 0$   $q'(0) = 0.001$ . Υποθέστε  $a = 0.4$ ,  $b = 0.5$ ,  $\gamma = 0.2$  και  $\omega = 1/8$  και θεωρήστε δύο τροχιές μία για  $Q_0 = 0$  και μια για  $Q_0 = 0.1$ .

- (α') Να λύσετε αριθμητικά τις εξισώσεις κίνησης και για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις και να δημιουργήσετε γραφικές παραστάσεις για τα  $q(t)$  και  $q'(t)$ .
- (β') Δημιουργήστε τα διαγράμματα φάσης, και χρησιμοποιήστε το μετασχηματισμό Fourier για τον υπολογισμό της συχνότητας.

7. Γενικευμένο πρόβλημα Kepler. Το δυναμικό δίνεται από τη σχέση  $V = -k/r - b/r^2$ 

- (α') Λύστε την εξίσωση Kepler για  $u[\phi]$  και εκφράστε τη λύση στη μορφή  $u(\phi) = u_0(1 + e \cos[\phi(1 - \delta)])$  όπου  $u_0 = k m / (\ell^2 - 2 b m)$ .
- (β') Δημιουργήστε γραφικές παραστάσεις και εξετάστε τις ελλειπτικές τροχιές, τι παρατηρήτε.
- (γ') Συγκρίνετε τις τροχιές των δυναμικών  $V = -k/r - b/r^3$  και  $V = -k/r + b/r^3$ .
- (δ') Συγκρίνετε τις τροχιές των δυναμικών  $V = -k/r^{1.1}$  και  $V = -k/r^{0.9}$ .

## 8. Ξρησιμοποιήστε τη μέθοδο Runge -Kutta-Felberg για την αριθμητική επίλυση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων και συγκρίνετε με τις ακριβείς τιμές:

(α')  $y' = xy^{1/3}$ , με  $y(1) = 1$  (ακριβής  $y = \left(\frac{x^2+2}{3}\right)^{3/2}$ ).

Υπόδειξη: ολοκληρώστε από  $x = 1$  ως  $x = 2$

(β')  $y' = -xy^2$  με  $y(0) = 2$  (ακριβής  $y = \frac{2}{x^2}$ )

Υπόδειξη: ολοκληρώστε από  $x = 0$  ως  $x = 1$

(γ')  $y' = -2xy$  με  $y(1) = 1$  (ακριβής  $y = e^{-x^2}$ )

Υπόδειξη: ολοκληρώστε από  $x = 0$  ως  $x = 1$

(δ')

$$y' = \frac{y(1 - x^2 y^4)}{x(1 + x^2 y^4)}$$

με  $y(1) = 1$ .

Υπόδειξη: ολοκληρώστε από  $x = 1$  ως  $x = 2$

(ε')

$$y' = \frac{x - e^x}{y + e^y}$$

με  $y(0) = 0$ . Βρείτε το  $y(1)$ .

9. Να λυθεί αριθμητικά το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}x' &= 1195x - 1995y & x(0) &= 2 \\y' &= 1197x - 1997y & y(0) &= -2\end{aligned}$$

Να βρεθούν: οι τιμές  $y(1)$ ,  $x(1)$  και οι τιμές  $y(-1)$ ,  $x(-1)$  Τι παρατηρείτε αν η ακριβής λύση είναι:

$$x(t) = 10e^{-2t} - 8e^{-800t}, y(t) = 6e^{-2t} - 8e^{-800t}$$

Δοκιμάστε να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Gear στην NDSolve, και συγκρίνετε με την μέθοδο Runge-Kutta και Adams τι παρατηρείτε.

10. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{aligned}y' &= yz + x & y(0) &= 0 \\z' &= y - x & z(0) &= 0\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}y' &= z & y(0) &= 0 \\z' &= -y & z(0) &= 1\end{aligned}$$

### 0.3 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Πολλά σημαντικά επιστημονικά προβλήματα στο χώρο της φυσικής περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (ΔΕΜΠ). Συνήθως το φυσικό φαινόμενο που μελετάμε παριστάνεται από μια συνάρτηση περισσότερων της μιας μεταβλητών που ικανοποιεί συγκεκριμένη μορφή εξίσωσης. Τα περισσότερα επιστημονικά προβλήματα μάλιστα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις των οποίων η ανώτερης τάξης παράγωγος είναι δεύτερης τάξης. Για παράδειγμα αν  $\psi$  είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών  $x$  και  $y$  τότε υπάρχουν τρεις μερικές παράγωγοι της δεύτερης τάξης

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (1)$$

Με βάση τις τιμές των συντελεστών των παραγώγων δεύτερης τάξης κατατάσσουμε τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους σε **ελλειπτικές, παραβολικές, υπερβολικές**. Μια ΔΕΜΠ δεύτερης τάξης είναι της μορφής

$$A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + D \left( x, y, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \quad (2)$$

Ανάλογα με την τιμή της ποσότητας  $B^2 - 4AC$  οι ΔΕΜΠ κατατάσσονται ως:

- **Ελλειπτικές**, αν  $B^2 - 4AC < 0$
- **Παραβολικές**, αν  $B^2 - 4AC = 0$
- **Υπερβολικές**, αν  $B^2 - 4AC > 0$

Αν οι συντελεστές  $A$ ,  $B$  και  $C$  είναι συναρτήσεις των  $x$ ,  $y$  τότε είναι δυνατόν μια ΔΕΜΠ να αλλάξει 'κατηγορία' σε διάφορες περιοχές του πεδίου ορισμού της.

Δυο κλασσικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους η *εξίσωση Laplace*

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (3)$$

και η *εξίσωση Poisson*

$$\nabla^2 \psi = f(x, y) \quad (4)$$

έχουν  $B = 0$ ,  $A = C = 1$ , και επομένως είναι πάντοτε **ελλειπτικές**.

Η κυματική εξίσωση

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

είναι κλασσική περίπτωση **υπερβολικής** ΔΕΜΠ

Ενώ η εξίσωση της θερμότητας

$$\sigma \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

είναι χαρακτηριστική περίπτωση **παραβολικής** ΔΕΜΠ.

Για την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων απαιτούνται κατ' αρχάς οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες ή/και κατάλληλες αρχικές συνθήκες. Στη συνέχεια υπάρχουν διάφορες τεχνικές αναλυτικής, ημι-αναλυτικής και αριθμητικής επίλυσης τους. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με χαρακτηριστικά προβλήματα που συναντώνται στη Φυσική και περιγράφονται με ΔΕΜΠ. Θα παρουσιάσουμε τεχνικές ημι-αναλυτικής και αριθμητικής επίλυσης τους.

## 0.4 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ

Ας προσπαθήσουμε να εκφράσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης  $y(x)$  ως συνάρτηση των τιμών της  $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$  σε συγκεκριμένες τιμές των  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ . Αν υποθέσουμε ότι τα  $x_i$  ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $h$ , δηλαδή ότι:

$$x_{i+1} = x_i + h \quad (7)$$

τότε μπορούμε προσεγγιστικά να εκφράσουμε την τιμή του  $y_{i+1}$  ως συνάρτηση των τιμών του  $y_i$  και των παραγώγων του  $y'_i, y''_i, \dots$

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2!}y''_i + \frac{h^3}{3!}y_i^{(3)} + \dots \quad (8)$$

ανάλογα μπορούμε να υπολογίσουμε και την τιμή του  $y_{i-1}$

$$y_{i-1} = y_i - hy'_i + \frac{h^2}{2}y''_i - \frac{h^3}{3!}y_i^{(3)} + \dots \quad (9)$$

Επομένως, από την εξίσωση (8) μπορούμε εύκολα να αναπαράγουμε τη γνωστή μας σχέση για την παράγωγο μιας συνάρτησης

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h) \quad (10)$$

δηλαδή έχουμε μια προσεγγιστική σχέση υπολογισμού της παραγώγου της συνάρτησης με της χρήση της πληροφορίας που έχουμε από δύο σημεία τα  $(x_i, y_i)$  και  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ . Η ακρίβεια της μεθόδου είναι  $\sim h$ .

Αν τώρα αφαιρέσουμε την εξίσωση (9) από την εξίσωση (8) τότε δημιουργούμε μια νέα σχέση για τον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad (11)$$

Η σχέση αυτή είναι μια σχέση **κεντρικών διαφορών** για τον υπολογισμό της παραγώγου, και η ονομασία προέρχεται από τη συμμετρική χρήση σημείων δεξιά και αριστερά του σημείου του οποίου προσπαθούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο. Αξιοσημείωτο είναι ότι το σφάλμα τώρα είναι  $\sim h^2$ , δηλαδή χωρίς να αυξήσουμε τον αριθμό των αριθμητικών υπολογισμών αυξήσαμε σημαντικά την ακρίβεια της μεθόδου μας.

Χρησιμοποιώντας αναπτύγματα με περισσότερους όρους μπορούμε να δημιουργήσουμε τύπους για τον αριθμητικό υπολογισμό των παραγώγων με ακόμη μεγαλύτερη ακρίβεια π.χ. χρησιμοποιώντας 2 σημεία δεξιά και 2 σημεία αριστερά του σημείου στο οποίο ζητούμε την παράγωγο δημιουργούμε τη σχέση

$$y'_i = \frac{-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2}}{12h} + O(h^4) \quad (12)$$

που έχει σφάλμα της τάξης του  $\sim h^4$ .

Αν τώρα προσθέσουμε τις εξισώσεις (9) και (8) τότε δημιουργούμε μια νέα σχέση για τον υπολογισμό της **δεύτερης παραγώγου** της συνάρτησης

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + 2y_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (13)$$

που προσδιορίζεται με σφάλμα  $\sim h^2$ . Ανάλογα μπορούν να κατασκευασθούν τύποι για τον υπολογισμό της **τρίτης παραγώγου**

$$y_i^{(3)} = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3} + O(h^2) \quad (14)$$



είτε για τον υπολογισμό της **δεύτερης παραγώγου** με μεγαλύτερη ακρίβεια

$$y_i'' = \frac{-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2}}{12h^2} + O(h^4) \quad (15)$$

Χωρίς απόδειξη αναφέρουμε και μερικούς τύπους για των υπολογισμό της παραγώγου μια συνάρτησης με βάση τα σημεία δεξιά ή αριστερά της. Οι τύποι αυτοί είναι χρήσιμοι όταν θέλουμε να υπολογίσουμε αριθμητικά τις παραγώγους μια συνάρτησης στα άκρα ενός διαστήματος.

Για τον υπολογισμό της **πρώτης παραγώγου** με διαφορές προς τα εμπρός :

$$y_i' = \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h} + O(h^2) \quad (16)$$

ή προς τα πίσω:

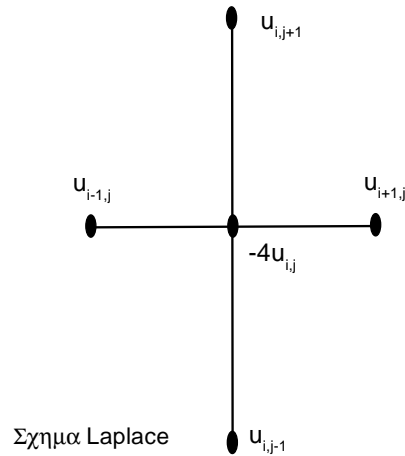
$$y_i' = \frac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2h} + O(h^2) \quad (17)$$

Ανάλογα για τον υπολογισμό της **δεύτερης παραγώγου** με διαφορές προς τα εμπρός :

$$y_i'' = \frac{2y_i - 5y_{i+1} + 4y_{i+2} - y_{i+3}}{h^2} + O(h^2) \quad (18)$$

ή προς τα πίσω:

$$y_i'' = \frac{2y_i - 5y_{i-1} + 4y_{i-2} - y_{i-3}}{h^2} + O(h^2). \quad (19)$$



Σχήμα 1: Το σχήμα των πέντε σημείων για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Laplace.

## 0.5 ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

### 0.5.1 Η Εξίσωση Laplace

Η εξίσωση Laplace σε δύο διαστάσεις

$$\nabla^2 u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (20)$$

είναι μια κλασσική εξίσωση της Φυσικής και απαντάται σε όλα τα προβλήματα που σχετίζονται με πεδία και δυναμικά. Με βάση τους ορισμούς που δώσαμε στη αρχή του κεφαλαίου είναι μια **ελλειπτική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους**. Και όσα θα αναπτύξουμε μπορούν εύκολα να γενικευθούν στη **εξίσωση Poisson**

$$\nabla^2 u \equiv u_{xx} + u_{yy} = g(x, y) \quad (21)$$

είτε στην **εξίσωση Helmholtz**

$$u_{xx} + u_{yy} + f(x, y)u = g(x, y) \quad (22)$$

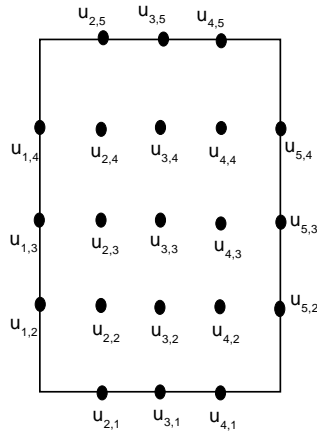
όπου η  $g(x, y)$  και η  $f(x, y)$  είναι δοθείσες συναρτήσεις.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Laplace. Αριθμητική επίλυση σημαίνει, αριθμητικό προσδιορισμό των παραγώγων της  $u(x, y)$ . Αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (13) τότε η  $u_{xx}$  στο σημείο  $(x_i, y_j)$  θα γραφεί ως

$$[u_{xx}]_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad (23)$$

και αντίστοιχα η  $u_{yy}$

$$[u_{yy}]_{i,j} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} \quad (24)$$



Σχήμα 2: Το  $5 \times 5$  πλέγμα για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Laplace.

οπότε η εξίσωση Laplace θα γραφεί ως

$$\nabla^2 u \approx \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2} = 0 \quad (25)$$

όπου  $i = 2, \dots, n-1$  και  $j = 2, \dots, m-1$ . Αυτή η σχέση είναι γνωστή ως **τύπος των πέντε σημείων για την εξίσωση Laplace**, και δίνει αποτελέσματα με σφάλμα της τάξης του  $\sim h^2$ . Η σχέση (25) συνδέει στη ουσία την τιμή της συνάρτησης  $u(x, y)$  στη θέση  $(x_i, y_j)$  με τα τέσσερα γειτονικά της σημεία  $(x_{i+1}, y_j)$ ,  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j-1})$  και  $(x_i, y_{j+1})$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Βασικά, η σχέση (25) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) \quad (26)$$

που σημαίνει ότι η τιμή της  $u(x, y)$  στη θέση  $(x_i, y_j)$  είναι ο αριθμητικός μέσος των τεσσάρων γειτονικών της σημείων  $(x_{i+1}, y_j)$ ,  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j-1})$  και  $(x_i, y_{j+1})$ .

Ας υποθέσουμε τώρα πως δίνονται οι συνοριακές τιμές στα ακόλουθα σημεία του πλέγματος

$$\begin{aligned} u(x_1, y_j) &= u_{1,j} \quad \text{για } 2 \leq j \leq m-1 \\ u(x_i, y_1) &= u_{i,1} \quad \text{για } 2 \leq i \leq n-1 \\ u(x_n, y_j) &= u_{n,j} \quad \text{για } 2 \leq j \leq m-1 \\ u(x_i, y_m) &= u_{i,m} \quad \text{για } 2 \leq i \leq n-1 \end{aligned} \quad (27)$$

Με βάση τη γνώση των παραπάνω συνοριακών τιμών μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις υπόλοιπες τιμές της συνάρτησης  $u(x, y)$ , λύνοντας στην ουσία ένα σύστημα  $(n-2) \times (n-2)$  εξισώσεων για  $(n-2)^2$  αγώστους.

Για παράδειγμα στο πρόβλημα του σχήματος 2 έχουμε να υπολογίσουμε τις 9 τιμές τις συνάρτησης  $u(x, y)$ , δηλαδή τα  $u_{2,2}$ ,  $u_{2,3}$ ,  $u_{2,4}$ ,  $u_{3,2}$ ,  $u_{3,3}$ ,  $u_{3,4}$ ,  $u_{4,2}$ ,  $u_{4,3}$  και  $u_{4,4}$ . Αν εφαρμόσουμε τη σχέση (26) για κάθε ένα από τα παραπάνω σημεία καταλήγουμε σε ένα σύστημα 9 εξισώσεων για τους 9 αγνώστους που προαναφέραμε.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 -4u_{2,2} & +u_{3,2} & & +u_{2,3} & & & & & & & = -u_{2,1} - u_{1,2} \\
 u_{2,2} & -4u_{3,2} & +u_{4,2} & & +u_{3,3} & & & & & & = -u_{3,1} \\
 & u_{3,2} & -4u_{4,2} & & & +u_{4,3} & & & & & = -u_{4,1} - u_{5,2} \\
 u_{2,2} & & & -4u_{2,3} & +u_{3,3} & & +u_{2,4} & & & & = -u_{1,3} \\
 & u_{3,2} & & +u_{2,3} & -4u_{3,3} & +u_{4,3} & & +u_{3,4} & & & = 0 \\
 & & u_{4,2} & & +u_{3,3} & -4u_{4,3} & & & +u_{4,4} & & = -u_{5,3} \\
 & & & u_{2,3} & & & -4u_{2,4} & +u_{3,4} & & & = -u_{2,5} - u_{1,4} \\
 & & & & u_{3,3} & & +u_{2,4} & -4u_{3,4} & +u_{4,4} & & = -u_{3,5} \\
 & & & & & & u_{4,3} & +u_{3,4} & -4u_{4,4} & & = -u_{4,5} - u_{5,4}
 \end{array} \quad (28)$$

Η λύση αυτού του συστήματος θα μας δώσει τις ζητούμενες τιμές στα εσωτερικά σημεία του πλέγματος.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης Laplace  $\nabla^2 u = 0$  για την περιοχή  $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$  όπου  $u(x, y)$  συμβολίζει τη θερμοκρασία στο σημείο  $(x, y)$ . Οι συνοριακές τιμές είναι:

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= 20 \quad \text{και} \quad u(x, 4) = 180 \quad \text{για} \quad 0 < x < 4 \\
 u(0, y) &= 80 \quad \text{και} \quad u(4, x) = 0 \quad \text{για} \quad 0 < y < 4
 \end{aligned}$$

## ΛΥΣΗ

Κατ'άρχάς δημιουργούμε το πλέγμα του σχήματος 3 απο όπου καταλήγουμε εύκολα στο παρακάτω σύστημα 9 εξισώσεων με 9 αγνώστους

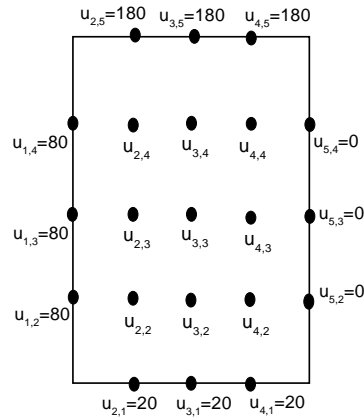
$$\begin{array}{cccccccccc}
 -4u_{2,2} & +u_{3,2} & & +u_{2,3} & & & & & & & = -100 \\
 u_{2,2} & -4u_{3,2} & +u_{4,2} & & +u_{3,3} & & & & & & = -20 \\
 & u_{3,2} & -4u_{4,2} & & & +u_{4,3} & & & & & = -20 \\
 u_{2,2} & & & -4u_{2,3} & +u_{3,3} & & +u_{2,4} & & & & = -80 \\
 & u_{3,2} & & +u_{2,3} & -4u_{3,3} & +u_{4,3} & & +u_{3,4} & & & = 0 \\
 & & u_{4,2} & & +u_{3,3} & -4u_{4,3} & & & +u_{4,4} & & = 0 \\
 & & & u_{2,3} & & & -4u_{2,4} & +u_{3,4} & & & = -260 \\
 & & & & u_{3,3} & & +u_{2,4} & -4u_{3,4} & +u_{4,4} & & = -180 \\
 & & & & & & u_{4,3} & +u_{3,4} & -4u_{4,4} & & = -180
 \end{array} \quad (29)$$

Η λύση του συστήματος μας οδηγεί στη λύση:

$$u_{2,2} = 55.7143, u_{3,2} = 43.2143, u_{4,2} = 27.1429, u_{2,3} = 79.6429, u_{3,3} = 70.000, u_{4,3} = 45.3571, u_{2,4} = 112.857, u_{3,4} = 111.786 \quad \text{και} \quad u_{4,4} = 84.2857.$$

Ακολουθεί ενδεικτικό πρόγραμμα στη Mathematica για τη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος.

```
In[70]:= ClearAll["Global`*"]
```

Σχήμα 3: Το  $5 \times 5$  πλέγμα για το συγκεκριμένο παράδειγμα.

```

In[71]:= n = 5; m = 5
Out[71]= 5

In[72]:= sys =
      Table[4u[i, j] - u[i - 1, j] - u[i + 1, j] - u[i, j - 1] - u[i, j + 1] == 0,
            {i, 2, n - 1}, {j, 2, m - 1}];

In[73]:= sys = Flatten[sys];

In[74]:= Do[u[1, j] = 80, {j, 2, m - 1}]

In[75]:= Do[u[n, j] = 0, {j, 2, m - 1}]

In[76]:= Do[u[i, 1] = 20, {i, 2, n - 1}]

In[77]:= (* Do[u[i, m] = 180; Print[u[i, m]], {i, 2, n - 1}] *)

In[78]:= Do[u[i, m] = 180, {i, 2, n - 1}]

In[79]:= para = Table[u[i, j], {i, 2, n - 1}, {j, 2, m - 1}];

In[80]:= para = Flatten[para];

In[81]:= sol = NSolve[sys, para]

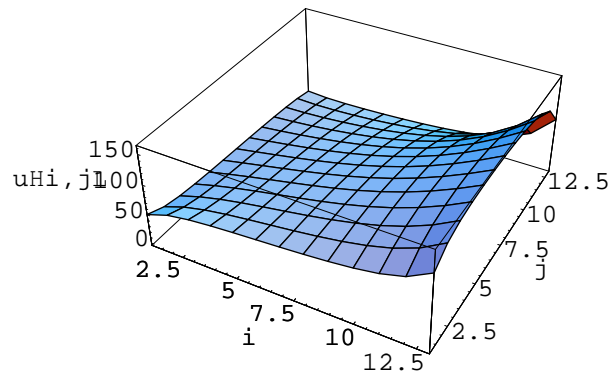
In[82]:= ul[i_, j_] := u[i, j] /. sol[[1]]

In[83]:= para1 = Table[ul[i, j], {i, 2, n - 1}, {j, 2, m - 1}];

In[84]:= (* ListPlot3D[para1, AxesLabel -> {"i", "j", "u(i, j)"}] *)

Out[81]= {{u[2, 2] -> 55.7143, u[2, 3] -> 79.6429, u[2, 4] -> 112.857,
           u[3, 2] -> 43.2143, u[3, 3] -> 70., u[3, 4] -> 111.786,
           u[4, 2] -> 27.1429, u[4, 3] -> 45.3571, u[4, 4] -> 84.2857}}

```



Σχήμα 4: Το γράφημα της λύσης της εξίσωσης Laplace για το παράδειγμα. Έχει χρησιμοποιηθεί πλέγμα  $15 \times 15$ .

Σημαντική βελτίωση στην ακρίβεια της μεθόδου μπορεί να επιτευχθεί με την αντικατάσταση των παραγώγων της εξίσωσης Laplace με βάση τη σχέση (15). Οπότε η εξίσωση Laplace θα γραφεί ως

$$\nabla^2 u \approx \frac{u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} + 4u_{i-1,j} - 20u_{i,j} + 4u_{i+1,j} + u_{i-1,j-1} + 4u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1}}{6h^2} = 0 \quad (30)$$

όπου  $i = 2, \dots, n-1$  και  $j = 2, \dots, m-1$ . Αυτή η σχέση είναι γνωστή ως **τύπος των εννέα σημείων για την εξίσωση Laplace**, και δίνει αποτελέσματα με σφάλμα της τάξης του  $\sim h^4$ .

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Επιλύστε αριθμητικά την εξίσωση Laplace για ένα τετράγωνο με συνοριακές συνθήκες

$$u(0, y) = 0 \quad \text{όταν} \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u(1, y) = 0 \quad \text{όταν} \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u(x, 1) = 0 \quad \text{όταν} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(x, 0) = x(1-x) \quad \text{όταν} \quad 0 \leq x \leq 1$$

(Υπόδειξη: για πλέγμα  $4 \times 4$  σημείων η λύση είναι  $u_{2,2} = 1/12$ ,  $u_{3,2} = 1/12$ ,  $u_{2,3} = 1/36$ ,  $u_{3,3} = 1/36$ ). Βρείτε τη λύση για πλέγμα  $8 \times 8$  σημείων.

2. Χρησιμοποιήστε τη σχέση (15) για να αποδείξετε το σχήμα 9 σημείων, δηλαδή την εξίσωση (30), για την επίλυση της εξίσωσης Laplace. Στη συνέχεια να τη χρησιμοποιήσετε για την επίλυση του λυμένου παραδείγματος.

- Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των 9 σημείων για την επίλυση του λυμένου παραδείγματος με ένα πλέγμα  $20 \times 20$  σημείων.
- Σε μια ορθογώνια περιοχή  $6cm \times 8cm$  η συνάρτηση  $u(x, y)$  στα σύνορα της είναι μηδέν (0) και υπακούει στο νόμο

$$\nabla^2 u + 2 = 0.$$

Υπολογίστε τις τιμές της  $u(x, y)$ , ανά  $1cm$  στο εσωτερικό της περιοχής. (Ουσιαστικά εδώ λύνουμε την εξίσωση Poisson). Υπόδειξη: αν την λύνατε για πλέγμα εύρους  $2cm$  τότε θα βρίσκατε τις λύσεις  $u_{2,2} = u_{3,2} = u_{2,4} = u_{3,4} = 4.56$  και  $u_{2,3} = u_{3,3} = 5.72$

## 0.6 ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

### 0.6.1 Αναλυτική Λύση

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε μια μέθοδο αναλυτικής επίλυσης μιας μονοδιάστατης παραβολικής διαφορική εξίσωσης με μερικές παραγώγους.

Εστω η ΔΕΜΠ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{για } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{και } 0 \leq t < \infty \quad (31)$$

με οριακές συνθήκες :

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad \text{για } 0 \leq t < \infty \quad (32)$$

και αρχικές συνθήκες :

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \text{για } 0 \leq x \leq 1. \quad (33)$$

Για την αναλυτική επίλυση θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση  $u(t, x)$  μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων η πρώτη εκ των οποίων είναι συνάρτηση *μόνο* της χρονικής μεταβλητής  $t$  και η *άλλη μόνο* της χωρικής μεταβλητής  $x$ , δηλαδή

$$u(t, x) \equiv T(t) \cdot X(x) \quad (34)$$

οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση (31) λαμβάνουμε:

$$T'(t)X(x) = \alpha^2 T(t)X''(x) \quad (35)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως :

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2 \quad (36)$$

όπου  $\lambda$  είναι μια σταθερά αναλογίας. Με αυτό τον τρόπο έχουμε αναγάγει την αρχική παραβολική ΔΕΜΠ σε δύο κανονικές διαφορικές εξισώσεις

$$T' - \lambda^2 \alpha^2 T = 0 \quad (37)$$

$$X'' - \lambda^2 X = 0 \quad (38)$$

με προφανείς λύσεις

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \quad (39)$$

$$X(x) = \tilde{A} \sin(\lambda x) + \tilde{B} \cos(\lambda x) \quad (40)$$

οπότε η  $u(t, x)$  παίρνει τη μορφή:

$$u(t, x) = Ce^{-\lambda^2 \alpha^2 t} [\tilde{A} \sin(\lambda x) + \tilde{B} \cos(\lambda x)], \quad (41)$$

προφανώς με αντικατάσταση  $C \cdot \tilde{A} \rightarrow A$  και  $C \cdot \tilde{B} \rightarrow B$  απαλείφουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης  $C$ . Οι εναπομείνουσες σταθερές ολοκλήρωσης  $A$  και  $B$  θα περιοριστούν ακόμη περισσότερο με χρήση των οριακών συνθηκών (32). Η οριακή συνθήκη  $u(0, t) = 0$  συνεπάγεται ότι  $B = 0$ , άρα η λύση γίνεται:

$$u(t, x) = Ae^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \sin(\lambda x), \quad (42)$$



η δεύτερη οριακή συνθήκη  $u(1, t) = 0$  συνεπάγεται ότι:

$$e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \sin(\lambda) = 0 \Rightarrow \sin(\lambda) = 0 \quad (43)$$

με προφανείς επιτρεπτές τιμές για τη σταθερά  $\lambda$  τις :

$$\lambda = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda = \pm n\pi \quad \text{για} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (44)$$

Επομένως, όλες οι συναρτήσεις της μορφής :

$$u_n(t, x) = A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x) \quad \text{για} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (45)$$

αποτελούν λύσεις της ΔΕΜΠ (31), αν και οι σταθερές ολοκλήρωσης  $A_n$  θα πρέπει να υπολογισθούν με χρήση της συνθήκης αρχικών τιμών (33). Η γενική λύση θα είναι το άθροισμα όλων των λύσεων της μορφής (45), δηλαδή:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x) \quad \text{για} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (46)$$

Η συνθήκη αρχική τιμών (33),  $u(x, 0) = \phi(x)$  οδηγεί στη σχέση

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \quad (47)$$

Οι σταθερές  $A_n$  μπορούν να υπολογισθούν ως συνάρτηση της αρχικής συνάρτησης  $\phi(x)$  αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση ορθογωνιότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, δηλαδή

$$\int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1/2, & m = n \end{cases} \quad (48)$$

οπότε αν πολλαπλασιάσουμε την (47) με  $\sin(m\pi x)$  (όπου  $m$  τυχαίος ακέραιος αριθμός) και ολοκληρώσουμε με όρια ολοκλήρωσης από 0 ως 1 λαμβάνουμε

$$\int_0^1 \phi(x) \sin(m\pi x) dx = A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi x) dx = \frac{1}{2} A_m \quad (49)$$

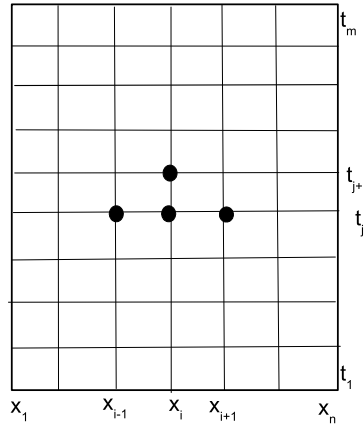
Επομένως, οι σταθερές  $A_n$  θα υπολογίζονται από ολοκληρωτικές σχέσεις της μορφής

$$A_n = 2 \int_0^1 \phi(x) \sin(n\pi x) dx \quad (50)$$

και προφανώς εξαρτώνται κατά μοναδικό τρόπο από την αρχική μορφή της συνάρτησης  $\phi(x)$ .

### 0.6.2 Αριθμητική Λύση: Εξίσωση Διαφορών

Ας υποθέσουμε ότι το διάστημα  $0 \leq x \leq 1$  υποδιαιρείται σε  $n - 1$  υποδιαστήματα  $\Delta x = h$  και ας υποθέσουμε ότι στη χρονική διεύθυνση ότι θα λύσουμε τη ΔΕΜΠ έως τη χρονική στιγμή  $t = T$  οπότε θα θεωρήσουμε



Σχήμα 5: Η διαμέριση (πλέγμα) για την αριθμητική επίλυση της παραβολικής εξίσωσης  $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ .

$m - 1$  υποδιαίρεσεις στο διάστημα  $0 \leq t \leq T$ , Σχήμα 5. Αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους  $u_t$  και  $u_{xx}$  από τις εξισώσεις διαφορών

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} + O(k) \quad (51)$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + O(h^2) \quad (52)$$

οπότε αντικαθιστούμε την εξίσωση (31) με την εξίσωση διαφορών

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad (53)$$

οπότε αν θέσουμε  $r = \alpha^2 k/h^2$  στην παραπάνω σχέση δημιουργούμε την εξίσωση διαφορών

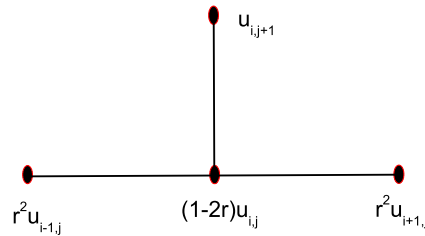
$$u_{i,j+1} = (1 - 2r) u_{i,j} + r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) \quad (54)$$

Η εξίσωση αυτή δίνει τις τιμές της συνάρτησης  $u(t, x)$  στην γραμμή  $j + 1$  σαν συνάρτηση των τιμών της συνάρτησης στη γραμμή  $j$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.

Το παραπάνω αριθμητικό σχήμα είναι εξαιρετικά απλό και ο προγραμματισμός του σε οποιαδήποτε γλώσσα σχεδόν τετριμμένος. Παρ' όλα αυτά θα πρέπει να εξετάσουμε την ευστάθειά του, πιο συγκεκριμένα το σχήμα είναι ευσταθές για  $0 \leq r \leq 1/2$ . Δηλαδή, το χρονικό βήμα θα πρέπει να καθορίζεται από τη σχέση  $k \leq h^2/(2\alpha^2)$ . Ειδικά η επιλογή  $r = 1/2$  απλοποιεί το αριθμητικό σχήμα (54) που γράφεται στη μορφή:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2} \quad (55)$$

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το σχήμα που παρουσιάσαμε είναι πρώτης τάξης,  $O(k)$ , ως προς το χρόνο και δεύτερης τάξης,  $O(h^2)$ , ως προς το χώρο.



Σχήμα 6: Το αριθμητικό σχήμα για την αριθμητική επίλυση της παραβολικής εξίσωσης  $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ .

### 0.6.3 Αριθμητική Λύση: Μέθοδος Crank-Nicholson

Η μέθοδος των Crank και Nicholson είναι μια **έμμεση** μέθοδος αριθμητικής επίλυσης παραβολικών ΔΕΜΠ.

Σ' αυτήν τη μέθοδο η τιμή της συνάρτησης  $u(x, y)$  σε κάποιο σημείο  $(x_i, y_j)$  δεν υπολογίζεται απευθείας αλλά μέσω της επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα στην διακριτοποίηση της 2ης χωρικής παραγώγου της  $u(x, y)$  (δηλαδή της  $u_{xx}$ ) αντί να χρησιμοποιήσουμε τα στοιχεία της γραμμής  $j$  που είναι γνωστά, χρησιμοποιούμε και τα άγνωστα στοιχεία της γραμμής  $j+1$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 7. Για την ακρίβεια παίρνουμε το μέσο όρο των διακριτοποιημένων τιμών της  $u_{xx}$  όπως φαίνεται στην παρακάτω σχέση:

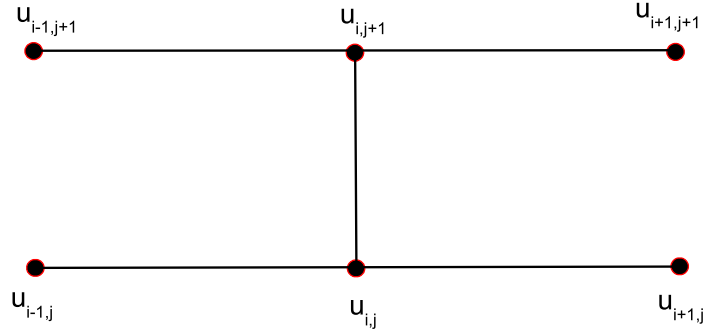
$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2}\alpha^2 \left( \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2} \right) \quad (56)$$

Είναι προφανές επομένως ότι στη σχέση αυτή υπάρχουν τρεις άγνωστες ποσότητες, τα  $u_{i-1,j+1}$ ,  $u_{i,j+1}$  και  $u_{i+1,j+1}$ . Αν αναδιατάξουμε την παραπάνω σχέση διατηρώντας από αριστερά τις άγνωστες τιμές και από δεξιά τις γνωστές τιμές καταλήγουμε στη σχέση:

$$-ru_{i-1,j+1} + 2(1+r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = 2(1-r)u_{i,j} + r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) \quad (57)$$

που σημαίνει ότι για τον υπολογισμό  $u(x, y)$  στη χρονική στιγμή  $j \cdot k$  θα πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα  $n-2$  τέτοιων εξισώσεων. Για απλότητα θα υποθέσουμε ότι  $r = 1$  οπότε η παραπάνω σχέση παίρνει την απλή μορφή:

$$-u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \quad (58)$$



Σχήμα 7: Το αριθμητικό σχήμα για την αριθμητική επίλυση της παραβολικής εξίσωσης  $u_t = \alpha^2 u_{xx}$  με τη μέθοδο Crank-Nicolson.

που οδηγεί στο σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & \\ & & \dots & & & & \\ & & -1 & 4 & -1 & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \dots \\ u_{k,j+1} \\ \dots \\ u_{n-2,j+1} \\ u_{n-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + u_{3,j} \\ u_{2,j} + u_{4,j} \\ \dots \\ u_{k-1,j} + u_{k+1,j} \\ \dots \\ u_{n-3,j} + u_{n-1,j} \\ u_{n-2,j} + 2c_2 \end{pmatrix} \quad (59)$$

του οποίου η λύση μας δίνει τις τιμές της  $u(x, y)$  για όλα τα  $x_i$  τη χρονική στιγμή  $j \cdot k$ .

Προφανώς, η διαδικασία αυτή είναι σημαντικά πιο χρονοβόρα από αυτήν που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, **αλλά** είναι ευστάθης για κάθε τιμή, του  $r$ . Υπενθυμίζουμε, ότι στην προηγούμενη μέθοδο το κριτήριο ευστάθειας επέτρεπε τιμές  $0 < r < 1/2$ . Αρα με την έμμεση μέθοδο των Crank-Nicolson μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σημαντικά μεγαλύτερο χρονικό βήμα που επιταχύνει σημαντικά την επίλυση του προβλήματος.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Δίνεται η παραβολική ΔΕΜΠ

$$u_t = u_{xx} \quad \text{για} \quad 0 < x < 1 \quad \text{και} \quad 0 < t < 2$$

με αρχικές συνθήκες

$$u(x, 0) = 4x(1 - x) \quad \text{για} \quad 0 \leq x \leq 1$$

και οριακές συνθήκες

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{για} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

1. Δημιουργήστε ένα κώδικα στη Mathematica για την αναλυτική λύση της παραπάνω ΔΕΜΠ.
2. Χρησιμοποιήστε το αριθμητικό σχήμα (54) για την επίλυση της παραπάνω ΔΕΜΠ.
3. Χρησιμοποιήστε την έμμεση μέθοδο των Crank-Nicholson για την επίλυση της παραπάνω ΔΕΜΠ.

## 0.7 ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

### 0.7.1 Παλλόμενη Χορδή

Θα παρουσιάσουμε μια αναλυτική μέθοδο επίλυσης της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (60)$$

Η κυματική εξίσωση αυτή μπορεί να είναι η εξίσωση ταλάντωσης μιας χορδής, με τη συνάρτηση  $u(t, x)$  να παριστάνει την απομάκρυνση από τη θέση ισοροπίας και  $c$  την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.

θα θεωρήσουμε μια πακτωμένη στα άκρα χορδή, που για απλότητα θα υποθέσουμε ότι έχει μήκος  $\ell = 1$ . Δηλαδή οι **οριακές** συνθήκες θα είναι

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad \text{για } t \geq 0 \quad (61)$$

και οι **αρχικές** θα είναι

$$u(0, x) = \phi(x) \quad \text{και} \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad \text{για } 0 \leq x \leq 1. \quad (62)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική του χωρισμού των μεταβλητών, δηλαδή θα γράψουμε την συνάρτηση  $u(t, x)$  ως

$$u(t, x) = T(t) \cdot X(x) \quad (63)$$

όπου η  $T$  είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου  $t$  και η  $X$  συνάρτηση μόνο της χωρικής μεταβλητής  $x$ .

Οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση (60) έχουμε:

$$\ddot{T} \cdot X = c^2 T \cdot X'' \quad (64)$$

αν χωρίσουμε την παραπάνω εξίσωση κατάλληλα

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda^2 \quad \text{όπου } \lambda = \text{const} \quad (65)$$

Επομένως, καταλήγουμε σε δύο κανονικές διαφορικές εξισώσεις:

$$\ddot{T} - \lambda^2 c^2 T = 0 \quad (66)$$

$$X'' - \lambda^2 X = 0 \quad (67)$$

Η γενική λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι:

$$T(t) = \alpha_1 \cos(c\lambda t) + \alpha_2 \sin(c\lambda t) \quad (68)$$

$$X(x) = \beta_1 \cos(\lambda x) + \beta_2 \sin(\lambda x) \quad (69)$$

με βάση όμως την οριακή συνθήκη ότι  $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$  θα έχουμε ότι  $X(0) = X(1) = 0$  που σημαίνει ότι :

$$X(0) = \beta_1 = 0 \quad (70)$$

$$X(1) = \beta_2 \sin(\lambda) = 0 \quad (71)$$

Για να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση, χωρίς να οδηγούμαστε σε μια τετριμμένη λύση, θα πρέπει να ισχύει

$$\lambda = n\pi \quad \text{όπου} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (72)$$

που οδηγεί σε μια απειρία λύσεων της μορφής

$$X_n(x) = \beta_2 \sin(n\pi x). \quad (73)$$

Με βάση τα προηγούμενα η λύση της εξίσωσης για τη συνάρτηση  $T(t)$  γράφεται ως

$$T_n(t) = \alpha_{1,n} \cos(n\pi ct) + \alpha_{2,n} \sin(n\pi ct) \quad (74)$$

Οπότε υπάρχει ένα άπειρο σύνολο λύσεων της κυματικής εξίσωσης της μορφής

$$u_n(t, x) = T_n(t) X_n(x) = [A_n \cos(n\pi ct) + B_n \sin(n\pi ct)] \sin(n\pi x) \quad (75)$$

όπου  $A_n = \alpha_{1,n}\beta_2$  και  $B_n = \alpha_{2,n}\beta_2$ .

Για να βρούμε μια λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (62) θα υποθέσουμε ότι η λύση δίνεται από την υπέρθεση των άπειρων λύσεων (ή και ενός συνόλου αυτών) δηλαδή η λύση θα είναι της μορφής

$$u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\pi ct) + B_n \sin(n\pi ct)] \sin(n\pi x) \quad (76)$$

Από την πρώτη από τις αρχικές συνθήκες (62) πέρνουμε:

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) = \phi(x) \quad (77)$$

Οι σταθερές  $A_n$  μπορούν να υπολογισθούν ως συνάρτηση της αρχικής συνάρτησης  $\phi(x)$  αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση ορθογωνιότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, δηλαδή

$$\int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1/2, & m = n \end{cases} \quad (78)$$

οπότε αν πολλαπλασιάσουμε την (77) με  $\sin(m\pi x)$  (όπου  $m$  τυχαίος ακέραιος αριθμός) και ολοκληρώσουμε με όρια ολοκλήρωσης από 0 ως 1 λαμβάνουμε

$$\int_0^1 \phi(x) \sin(m\pi x) dx = A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi x) dx = \frac{1}{2} A_m \quad (79)$$

Επομένως, οι σταθερές  $A_n$  θα υπολογίζονται από ολοκληρωτικές σχέσεις της μορφής

$$A_n = 2 \int_0^1 \phi(x) \sin(n\pi x) dx \quad (80)$$

και προφανώς εξαρτώνται κατά μοναδικό τρόπο από την αρχική μορφή της συνάρτησης  $\phi(x)$ .

Απο τη χρήση της δεύτερης αρχικής συνθήκης θα καθορίσουμε την άλλη άγνωστη ποσότητα  $B_n$ , συγκεκριμένα παραγωγίζοντας θα πάρουμε:

$$u_t = \pi c \sum_{n=1}^{\infty} n [B_n \cos(n\pi ct) - A_n \sin(n\pi ct)] \sin(n\pi x) \quad (81)$$

που για  $t = 0$  θα δώσει:

$$u_t(0, x) = \pi c \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin(n\pi x) = \psi(x) \quad (82)$$

οπότε θα είναι:

$$B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \psi(x) \sin(n\pi x) dx, n = 1, 2, \dots \quad (83)$$

και η λύση της εξίσωσης είναι πλήρως καθορισμένη.

### 0.7.2 Παλλόμενη Μεμβράνη

Μια μεμβράνη είναι ένα 3-διάστατο ελαστικό σώμα που το πάχος της είναι πολύ μικρότερο από τις άλλες δύο διαστάσεις της. Η κατάσταση ισοροπίας της χαρακτηρίζεται από ίσες τάσεις  $p = p_{xx} = p_{yy}$  στο επίπεδο  $xy$ . Ως μικρές ταλαντώσεις της μεμβράνης θεωρούμε αυτές που έχουν πλάτος σημαντικά μικρότερο από τις διαστάσεις της μεμβράνης. Με αυτό τον ορισμό αποκλείουμε τα μη γραμμικά φαινόμενα που συνδέονται με τις μεγάλες πλάτους ταλαντώσεις της μεμβράνης. Η υπόθεση των "μικρών" ταλαντώσεων έχει ως συνέπεια να λαμβάνουμε θ'όψη μας μόνο δυνάμεις που είναι κάθετες στο επίπεδο της μεμβράνης (δηλαδή καταμήκος του άξονα των  $z$ ). Αυτές οι δυνάμεις χρησιμοποιούνται για να γραφεί η εξίσωση κίνησης μίας μικρής περιοχής  $dx dy$ , βασικά μπορεί να θεωρηθεί ότι δρουν στα σύνορα της περιοχής  $dx dy$  κάθετα στις συνοριακές γραμμές. Το αποτέλεσμα είναι τα διάφορα τμήματα της μεμβράνης να συμπιέζονται ή να επεκτείνονται με συγκεκριμένο τρόπο. Για μικρά πλάτη η  $z$  συνιστώσα της δύναμης που δρά πάνω στη μεμβράνη είναι:

$$qp \frac{\partial^2 \zeta(x, y, t)}{\partial x^2} dx = hp \frac{\partial^2 \zeta(x, y, t)}{\partial x^2} dx dy \quad (84)$$

Όπου  $p$  είναι η τάση και  $q = hdy$  είναι η στοιχειώδης επιφάνεια,  $h$  είναι η διάσταση της στη διεύθυνση  $x$ . Η συνάρτηση  $\zeta(x, y, t)$  παριστάνει την κάθετη απόκλιση από τη θέση ισοροπίας της μεμβράνης. Αντίστοιχα οι δυνάμεις στα πλευρικά τοιχώματα της μεμβράνης είναι

$$hp \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (85)$$

Επομένως επειδή οι δυνάμεις που δρουν πρέπει να είναι ίσες με το γινόμενο της μάζας  $\rho h dx dy$  και της επιτάχυνσης  $\partial^2 \zeta / \partial t^2$  καταλήγουμε στην εξίσωση της εγκάρσιας κίνησης μιας μεμβράνης

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (86)$$

όπου  $c = (p/\rho)^{1/2}$  είναι η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στη μεμβράνη. Η εξίσωση (86) είναι δεύτερης τάξης ΔΕΜΠ και επομένως θα πρέπει να ορίσουμε αρχικές και οριακές συνθήκες έτσι ώστε να υπολογίσουμε μια μοναδική λύση.



Στο συγκεκριμένο μάθημα θα μελετήσουμε μια κυκλική μεμβράνη με πακτωμένα τα άκρα της π.χ. επιφάνεια ενός τυμπάνου. Αν μετασχηματίσουμε την εξίσωση (86) από καρτεσιανές σε πολικές συνεταγμένες θα έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} \right] \quad (87)$$

Επειδή η μεμβράνη είναι πακτωμένη στα άκρα της η οριακή συνθήκη θα είναι

$$\zeta(r = R, \phi, t) = 0. \quad (88)$$

Για ευκολία θα υποθέσουμε ότι η ακτίνα της μεμβράνης  $R = 1$  (Αυτό μπορεί να επιτευχθεί για κάθε μεμβράνη με κατάλληλο ορισμό της ταχύτητας  $c$ ). Επομένως η οριακή συνθήκη (88) θα γραφεί ως

$$\zeta(r = 1, \phi, t) = 0. \quad (89)$$

Μια κλασσική μέθοδος για την αντιμετώπιση τέτοιου είδους προβλημάτων είναι το ανάπτυγμα σε ιδιοσυναρτήσεις. Η συγκεκριμένη μέθοδος προϋποθέτει ότι η εγκάρσια μετατόπιση  $\zeta(r, \phi, t)$  είναι δυνατόν να χωρισθεί σε γινόμενο δύο συναρτήσεων, μια εξ αυτών θα περιγράφει τη χρονικό μέρος και η άλλη το χωρικό, δηλαδή

$$\zeta(r, \phi, t) = G(r, \phi)D(t). \quad (90)$$

Αν αντικαταστήσουμε την σχέση (90) στην εξίσωση (87) μπορούμε να χωρίσουμε το χωρικό από το χρονικό τμήμα της εξίσωσης

$$\frac{1}{D} \frac{d^2 D(t)}{dt^2} = c^2 \frac{1}{G(r, \phi)} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} \right] = \text{σταθερό} \equiv -\omega^2 \quad (91)$$

Προφανώς, επειδή το αριστερό μέρος της εξίσωσης είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου και το δεξιό μόνο των χωρικών συνεταγμένων, θα πρέπει να είναι σταθερές και ίσες με μία ποσότητα, που ονομάσαμε  $-\omega^2$ . Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στη λύση των παρακάτω δύο εξισώσεων

$$\frac{d^2 D}{dt^2} = -\omega^2 D \quad (92)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} G = -k^2 G \quad (93)$$

όπου  $k = \omega/c$  είναι ο κυματάριθμος.

Για την περαιτέρω μελέτη της εξίσωσης (93) θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση  $G(r, \phi)$  χωρίζεται σε δύο συναρτήσεις. Μία συνάρτηση της ακτινικής συνεταγμένης και μία της γωνιακής, δηλαδή  $G(r, \phi) = h(r)g(\phi)$ . Με αντικατάσταση στην (93) λαμβάνουμε

$$\frac{r^2}{h} \frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} + k^2 r^2 = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\phi^2} = \text{σταθερό} = m^2 \quad (94)$$

όπως παρατηρούμε χρειάστηκε να εισάγουμε μια νέα σταθερά την  $-m^2$ . Επομένως το πρόβλημα μας έχει αναχθεί στη λύση δύο κανονικών διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d^2 g}{d\phi^2} + m^2 g = 0 \quad (95)$$

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) h = 0 \quad (96)$$

Η εξίσωση (95) είναι μια κανονική διαφορική εξίσωση που περιγράφει κανονική ταλάντωση, στη συγκεκριμένη περίπτωση για την γωνιακή συντεταγμένη  $\phi$ . Η γενική λύση της είναι

$$g(\phi) = A \sin(m\phi) + B \cos(m\phi) \quad (97)$$

Η δεύτερη εξίσωση, (96), ανάγεται στην γνωστή εξίσωση Βεσσελ αν θεωρήσουμε την αλλαγή μεταβλητής  $x = kr$ . Οπότε θα γραφεί στη μορφή

$$h'' + \frac{1}{x}h' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)h = 0 \quad (98)$$

Η λύση της εξίσωσης (98) για την παλλόμενη μεμβράνη είναι

$$h(x) = J_m(x) = J_m(kr) \quad \text{όπου } m = 0, 1, 2, \dots \quad (99)$$

όπου  $J_m(x)$  είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, που στη Mathematica δίνεται από τη συνάρτηση **BesselJ[m,x]**.

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \left[1 - \frac{1}{m+1} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(m+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2i} \end{aligned} \quad (100)$$

Οι συναρτήσεις Bessel υπακούουν σε νόμους ορθογωνιότητας ανάλογους με αυτούς των πολυωνύμων Legendre που είναι γνωστά από την Κβαντομηχανική. Αν ισχύει ότι οι  $J_m(kx)$  και  $J_m(lx)$  (ή οι παράγωγοί τους) μηδενίζονται στα σημεία  $a$  και  $b$  τότε

$$\int_a^b J_m(kx)J_m(lx)xdx = 0 \quad \text{αν } k \neq l \quad (101)$$

ενώ

$$\int_a^b J_m(kx)J_m(lx)xdx = \frac{x^2}{2} [J'_m(kx)]^2 \Big|_a^b = \frac{x^2}{2} [J_{m+1}(kx)]^2 \Big|_a^b \quad \text{αν } k = l \quad (102)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ορθογωνιότητας χρησιμοποιούνται συνήθως για τον υπολογισμό των συντελεστών σε αναπτύγματα συναρτήσεων σε σειρές συναρτήσεων Bessel, όπως για παράδειγμα στο παρόν πρόβλημα.

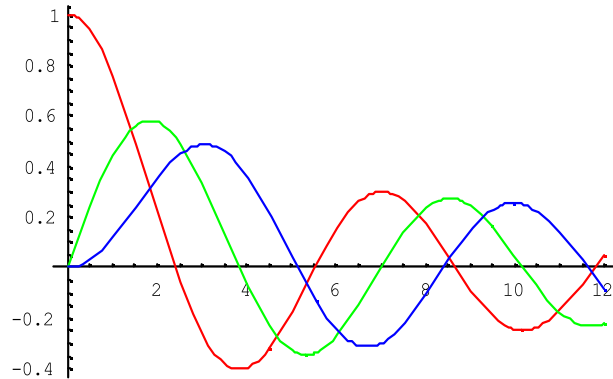
Με την χρήση της Mathematica μπορούμε να δημιουργήσουμε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων Bessel, βλέπε σχήμα 8. Η εντολή είναι:

```
Plot[Evaluate[Table[BesselJ[n,x],{n,0,2}],{x,0,12}],  
PlotStyle ->{{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0]},{RGBColor[0,0,1]}}
```

Επομένως, η λύση της εξίσωσης (93) γράφεται στη μορφή

$$G_m(r, \phi) = J_m(kr) [A \sin(m\phi) + B \cos(m\phi)] \quad (103)$$

Ο δείκτης  $m$  στη συνάρτηση  $G_m$  υποδηλώνει την ύπαρξη διαφορετικών λύσεων για τις διάφορες τιμές του  $m$ .



Σχήμα 8: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων Bessel  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  και  $J_2(x)$ .

Εως τώρα δεν χρησιμοποιήσαμε τις οριακές συνθήκες (89) ή (90), που με βάση το χωρισμό της συνάρτησης που ορίσαμε γράφεται

$$G(r = 1, \phi) = h(r = 1)g(\phi) = 0 \quad (104)$$

και επομένως

$$J_m(k) = 0. \quad (105)$$

Επομένως ο υπολογισμός των **ιδιοτιμών**  $k$  έχει αναχθεί στην εύρεση των ριζών της εξίσωσης (105) η καλύτερα των ριζών των συναρτήσεων Bessel. Η κατάλληλη εντολή στη Mathematica είναι:

<< **NumericalMath`BesselZeros`**  
**BesselJZeros[k,m]**

Είναι γνωστό ότι οι συναρτήσεις Bessel έχουν άπειρο αριθμό ριζών, επομένως για κάθε τιμή του  $m$  πρέπει να υπολογίσουμε ένα άπειρο αριθμό ιδιοτιμών  $k$  από την εξίσωση (105). Για ευκολία θα ακολουθήσουμε την εξής αρίθμηση για τις ιδιοτιμές  $k$ , θα τις γράφουμε στη μορφή  $k_{m,n}$  όπου ο δείκτης  $n$  θα είναι η  $n$ -οστή ρίζα της  $m$  συνάρτησης Bessel. Αντίστοιχα θα αριθμούμε και τις τιμές του  $\omega = ck$  δηλαδή  $\omega_{m,n}$ .

Μερικές χαρακτηριστικές τιμές των ριζών των συναρτήσεων Bessel είναι:

$$\begin{aligned} J_0(k) = 0 & : k_{0,n} \sim 2.40, 5.52, 8.65 \\ J_1(k) = 0 & : k_{1,n} \sim 3.83, 7.02, 10.17 \\ J_2(k) = 0 & : k_{2,n} \sim 5.14, 8.42, 11.62 \end{aligned}$$

Αρα οι χαμηλότερες αρμονικές συχνότητες και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις θα είναι:

$$\begin{aligned} k_{0,1} &= 2.40 & \omega_{0,1} &= 2.40c & G_0 &\sim J_0(2.40r) \\ k_{1,1} &= 3.83 & \omega_{1,1} &= 3.83c & G_1 &\sim J_1(3.83r) [A \sin(\phi) + B \cos(\phi)] \\ k_{2,1} &= 5.14 & \omega_{2,1} &= 5.14c & G_2 &\sim J_2(5.14r) [A \sin(2\phi) + B \cos(2\phi)] \\ k_{0,2} &= 5.52 & \omega_{0,2} &= 5.52c & G_0 &\sim J_0(5.52r) \end{aligned}$$

Επομένως η χρονικά εξαρτώμενη λύση της εξίσωσης (87) για συγκεκριμένες τιμές των  $m$  και  $n$  θα είναι

$$\begin{aligned} \zeta_{m,n}(r, \phi, t) &= J_m(k_{m,n}r) \times [A_{m,n} \sin(m\phi) + B_{m,n} \cos(m\phi)] \\ &\times [\Gamma_{m,n} \sin(\omega_{m,n}t) + \Delta_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t)] \end{aligned} \quad (106)$$

όπου  $\omega_{m,n} = ck_{m,n}$ . Επειδή η εξίσωση (87) είναι μια γραμμική εξίσωση κίνησης, η γενική λύση θα είναι μια υπέρθεση των επιμέρους λύσεων (106). Οπότε αθροίζοντας ως προς τα  $m$  και  $n$  καταλήγουμε στην

$$\zeta(r, \phi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} \zeta_{m,n}(r, \phi, t) \quad (107)$$

η σε αναλυτική μορφή

$$\begin{aligned} \zeta(r, \phi, t) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} K_{m,n} J_m(k_{m,n}r) \sin(m\phi) [\Gamma_{m,n} \sin(\omega_{m,n}t) + \Delta_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t)] \\ &+ \sum_{m,n=0}^{\infty} L_{m,n} J_m(k_{m,n}r) \cos(m\phi) [\Gamma_{m,n} \sin(\omega_{m,n}t) + \Delta_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t)] \end{aligned} \quad (108)$$

όπου  $K_{m,n} = C_{m,n} A_{m,n}$  και  $L_{m,n} = C_{m,n} B_{m,n}$ . Οι άγνωστες ποσότητες στο ανάπτυγμα (108) είναι οι (χρονικά ανεξάρτητοι) συντελεστές  $K_{m,n} \Gamma_{m,n}$ ,  $K_{m,n} \Delta_{m,n}$ ,  $L_{m,n} \Gamma_{m,n}$  και  $L_{m,n} \Delta_{m,n}$ .

Εως τώρα δεν χρησιμοποιήσαμε τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος δηλαδή δεν ορίσαμε τις ποσότητες  $\zeta(r, \phi, t = 0)$  και  $\partial \zeta(r, \phi, t = 0) / \partial t$ . Επειδή δε οι συντελεστές του αναπτύγματος (108) είναι ανεξάρτητοι του χρόνου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις ορθογωνιότητας των συναρτήσεων Bessel προκειμένου να τους υπολογίσουμε. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο διαχωρισμός της συνάρτησης  $\zeta$  ισχύει και για τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή αν θεωρήσουμε την  $\zeta(r, \phi, t = 0) = f_1(r, \phi)$  και την  $\partial \zeta(r, \phi, t = 0) / \partial t = f_2(r, \phi)$  τότε ο διαχωρισμός τους θα γίνει ως  $\zeta(r, \phi, 0) = h_1(r)g_1(\phi)$  και  $\zeta'(r, \phi, 0) = h_2(r)g_1(\phi) + h_1(r)g_2(\phi)$  οπότε οι συντελεστές θα υπολογισθούν απο τα αναπτύγματα:

$$K_{m,n} \Gamma_{m,n} = \frac{1}{\omega_{m,n} \pi J_{m,n}} [I_2^{m,n} I_3^{m,n} + I_1^{m,n} I_4^{m,n}] \quad (109)$$

$$L_{m,n} \Gamma_{m,n} = \frac{1}{\omega_{m,n} \pi J_{m,n}} [I_2^{m,n} I_5^{m,n} + I_1^{m,n} I_6^{m,n}] \quad (110)$$

$$K_{m,n} \Delta_{m,n} = \frac{1}{\pi J_{m,n}} I_1^{m,n} I_3^{m,n} \quad (111)$$

$$L_{m,n} \Delta_{m,n} = \frac{1}{\pi J_{m,n}} I_1^{m,n} I_5^{m,n} \quad (112)$$

όπου απαιτείται ο υπολογισμός των παρακάτω ολοκληρωμάτων:

$$J_{m,n} = \int_0^1 J_m^2(k_{m,n}r) r dr \quad (113)$$

$$I_1^{m,n} = \int_0^1 h_1(r) J_m(k_{m,n}r) r dr \quad (114)$$

$$I_2^{m,n} = \int_0^1 h_2(r) J_m(k_{m,n}r) r dr \quad (115)$$

$$I_3^{m,n} = \int_0^{2\pi} g_1(\phi) \sin(m\phi) d\phi \quad (116)$$

$$I_4^{m,n} = \int_0^{2\pi} g_2(\phi) \sin(m\phi) d\phi \quad (117)$$

$$I_5^{m,n} = \int_0^{2\pi} g_1(\phi) \cos(m\phi) d\phi \quad (118)$$

$$I_6^{m,n} = \int_0^{2\pi} g_2(\phi) \cos(m\phi) d\phi \quad (119)$$

Αν γνωρίζουμε τους παραπάνω συντελεστές τότε πρακτικά γνωρίζουμε και την λύση της (108).

Τα βασικά βήματα στην επίλυση του προβλήματος είναι:

1. Ο υπολογισμός των ριζών των συναρτήσεων Bessel
2. Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων  $I_i^{m,n}$
3. Τέλος για πρακτικούς λόγους δεν θα περιλάβουμε άπειρους όρους στο ανάπτυγμα (108, αλλά αντίθετα ένα πεπερασμένο αριθμό όρων ανάλογα με την υπολογιστική ισχύ του ΗΥ μας και την μνήμη RAM που διαθέτει.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να δείξετε (αριθμητικά) τις σχέσεις ορθογωνιότητας (101) και (102) με χρήση της Mathematica.
2. Επαναλάβετε την διαδικασία που ακολουθήθηκε για τις ταλαντώσεις της μεμβράνης για να μελετήσετε τις ταλαντώσεις μια πακτωμένης στα ακρα χορδής. Στη συνέχεια γράψτε ένα πρόγραμμα στη Mathematica που να κάνει προσομοίωση των ταλαντώσεων της χορδής.
3. Γραψτε ένα πρόγραμμα στη Mathematica που με βάση την παραπάνω διαδικασία να κάνει προσομοίωση των ταλαντώσεων της μεμβράνης.

### 0.7.3 Αριθμητική Επίλυση της Κυματικής Εξίσωσης

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε μια ‘πλήρως’ αριθμητική επίλυση της κυματικής εξίσωσης και για λόγους απλότητας θα περιορισθούμε σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα θα μελετήσουμε την εξίσωση που περιγράφει μία παλλόμενη χορδή μήκους  $a$  με πακτωμένα τα άκρα της. Η κίνηση της περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{για } 0 < x < a \quad \text{και} \quad 0 < t < b \quad (120)$$

με οριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0 \quad \text{και} \quad u(a, t) = 0 & \quad \text{για } 0 \leq t \leq b \\ u(x, 0) = f(x) & \quad \text{για } 0 \leq x \leq a \\ u_t(x, 0) = g(x) & \quad \text{για } 0 < x < a \end{aligned} \quad (121)$$

Παρότι υπάρχει αναλυτική λύση της εξίσωσης με βάση τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, με χρήση των σειρών Fourier, εδώ θα ακολουθήσουμε μια πλήρως αριθμητική τεχνική που αποτελεί βάση για τη μελέτη και πλέον σύνθετων υπερβολικών ΔΕΜΠ που δεν επιδέχονται αναλυτικών λύσεων.

#### Δημιουργία των εξισώσεων διαφορών

Ας διαμερίσουμε ένα ορθογώνιο με πλευρές μήκους  $a$  και  $b$  σε  $(m-1) \times (n-1)$  υποδιαίρεσεις μήκους  $\Delta x = h$  και  $\Delta t = k$  όπως στη Σχήμα 9.

Προφανώς με βάση τις αρχικές συνθήκες ισχύει  $u(x_i, t_1) = f(x_1)$ . Με βάση την εξίσωση των κεντρικών διαφορών (13) οι δεύτεροι παράγωγοι  $u_{tt}$  και  $u_{xx}$  γράφονται

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2} + O(k^2) \quad (122)$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + O(h^2) \quad (123)$$

και επειδή διαμέρισαμε τα διαστήματα  $(0, a)$  και  $(0, b)$  σε ίσα τμήματα δηλαδή:  $x_{i+1} = x_i + h$  και  $t_{j+1} = t_j + k$  γράφουμε την εξίσωση (120) ως εξίσωση διαφορών στη μορφή:

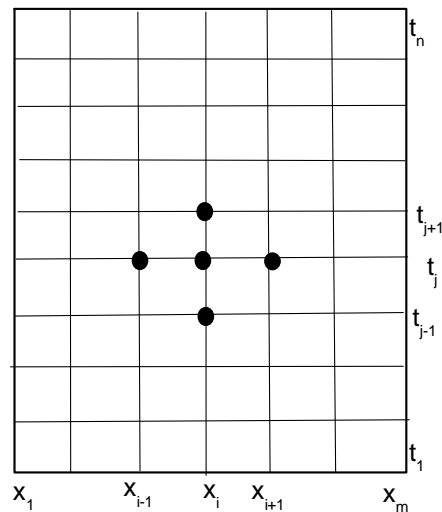
$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (124)$$

που αποτελεί την προσεγγιστική μορφή της εξίσωσης (120). Για λόγους απλότητας θα χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση  $r = ck/h$  και η παραπάνω σχέση γράφεται

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = r^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}). \quad (125)$$

Η εξίσωση αυτή θα χρησιμοποιηθεί τώρα για τον υπολογισμό των τιμών της  $u(x, t)$  στη γραμμή  $j+1$  με βάση την πληροφορία που έχουμε από τις γραμμές  $j$  και  $j-1$ , Σχήμα 10. Οπότε αναδιατάσσοντας την παραπάνω σχέση λαμβάνουμε:

$$u_{i,j+1} = 2(1-r^2)u_{i,j} + r^2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} \quad \text{για } i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (126)$$



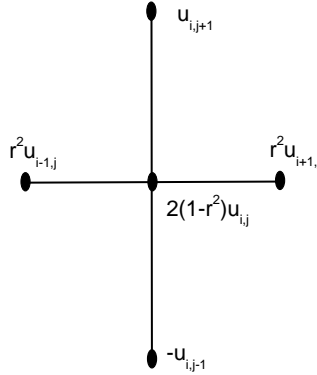
Σχήμα 9: Ο τρόπος με τον οποίο ‘ συνδέονται ’ τα 5 σημεία της σχέσης

Επομένως χρησιμοποιώντας την σχέση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές της συνάρτησης  $u(x, t)$  στο ορθογώνιο  $R = \{(x, t) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b\}$ .

Στις αριθμητικές μεθόδους υπάρχουν ‘ αστάθειες ’ με αποτέλεσμα η λύση που υπολογίζουμε να μην αντιστοιχεί πάντα στην πραγματική. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η συνθήκη που εξασφαλίζει αριθμητική ευστάθεια είναι  $r = ck/h \leq 1$ . Αυτό το κριτήριο ευστάθειας είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως *Courant-Friedrichs-Lewy* κριτήριο ή πιο απλά κριτήριο *Courant*. Παρότι υπάρχει μαθηματική απόδειξη για το συγκεκριμένο κριτήριο θα προσπαθήσουμε να το κατανοήσουμε με βάση μια απλή ανάλυση. Πιο συγκεκριμένα, η ποσότητα  $u_{i,j+1}$  υπολογίζεται από την πληροφορία που έχουμε στα σημεία  $(i-1, j)$ ,  $(i, j)$ ,  $(i, j+1)$  και  $(i, j-1)$ , με άλλα λόγια **μόνο** από αυτά τα σημεία επιτρέπεται να μεταφέρεται πληροφορία στο σημείο  $u_{i,j+1}$ . Αν παρατηρήσουμε προσεκτικά αυτό που απαιτεί το κριτήριο Courant είναι:

$$|c| \leq \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (127)$$

Δηλαδή η ταχύτητα με την οποία ταξιδεύει μια κύμανση ( $c$ ) δεν θα πρέπει να υπερβαίνει τη μέγιστη ταχύτητα διάδοσης που επιτρέπεται από την διαμέριση που επιλέξαμε. Αυτό αποτελεί ένα γενικό κριτήριο για την ευστάθεια των αριθμητικών μεθόδων π.χ. δεν επιτρέπεται να επιλέγουμε μεγάλα αριθμητικά βήματα για να μελετήσουμε φαινόμενα που παρουσιάζουν σημαντικές αλλαγές σε μικρότερη χρονική κλίμακα. Ένα τέτοιο παράδειγμα θα αποτελούσε η αριθμητική μελέτη της τροχιάς της Γης με χρονικό βήμα μεγαλύτερο του ενός έτους, ή η μελέτη της κίνησης ενός εκκρεμούς με χρονικό βήμα μεγαλύτερο της περιόδου του.



Σχήμα 10: Η διαμέριση(πλέγμα) για την αριθμητική επίλυση της κυματικής εξίσωσης  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ .

### Οι αρχικές τιμές

Όπως προαναφέραμε απαιτούνται οι αρχικές τιμές της  $u(x, t)$  στις γραμμές  $j = 1$  και  $j = 2$ . Επειδή όμως η δεύτερη γραμμή δεν δίνεται πάντα την υπολογίζουμε με βάση τις αρχικές συνθήκες. Αν χρησιμοποιήσουμε πρώτης τάξης ανάπτυγμα Taylor της  $u(x, t)$  περι το σημείο  $(x_i, 0)$  λαμβάνουμε

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + ku_t(x_i, 0) + O(k^2) \quad (128)$$

Οπότε επειδή  $u(x_i, 0) = f(x_i) = f_i$  και  $u_t(x_i, 0) = g(x_i) = g_i$  η παραπάνω σχέση γράφεται

$$u_{i,2} = f_i + kg_i \quad \text{για } i = 2, 3, \dots, n-1. \quad (129)$$

Προφανώς η παραπάνω σχέση είναι προσεγγιστική και το αριθμητικό σφάλμα που υπεισέρχεται μέσω της παραπάνω σχέσης είναι τάξης  $O(k^2)$  το οποίο διαδίδεται κατά την διάρκεια της αριθμητικής εξέλιξης της εξίσωσης και γιαυτό είναι σημαντικό να θέτουμε απο την αρχή αρκετά μικρή τιμή στο  $k$ .

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η κυματική εξίσωση της παλλόμενης χορδής

$$u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t) \quad \text{για } 0 < x < 1 \quad \text{και} \quad 0 < t < 0.5 \quad (130)$$

με οριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0 \quad \text{και} \quad u(1, t) = 0 & \quad \text{για } 0 \leq t \leq 0.5 \\ u(x, 0) = f(x) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) & \quad \text{για } 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) = g(x) = 0 & \quad \text{για } 0 < x < 1 \end{aligned} \quad (131)$$



**ΛΥΣΗ**

Για απλότητα θα χρησιμοποιήσουμε  $h = 0.1$  και  $k = 0.05$ . Επειδή  $c = 2$  λαμβάνουμε  $r = ck/h = 1$ , επίσης επειδή  $g(x) = 0$  και  $r = 1$  η σχέση (130) γράφεται ως:

$$u_{i,2} = \frac{f_{i-1} + f_{i+1}}{2} \quad \text{για } i = 2, 3, \dots, 9. \quad (132)$$

Αντικαθιστώντας  $r = 1$  στην εξίσωση (126) δημιουργούμε την αρκετά απλή αναδρομική σχέση

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \quad (133)$$

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

1. Να λυθεί η κυματική εξίσωση της παλλόμενης χορδής

$$u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t) \quad \text{για } 0 < x < 1 \quad \text{και} \quad 0 < t < 0.5$$

με οριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0 \quad \text{και} \quad u(1, t) = 0 & \quad \text{για } 0 \leq t \leq 1 \\ u(x, 0) = f(x) = \frac{5x}{3} & \quad \text{για } 0 \leq x \leq \frac{3}{5} \\ u(x, 0) = f(x) = \frac{5(1-x)}{2} & \quad \text{για } \frac{3}{5} \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) = g(x) = 0 & \quad \text{για } 0 < x < 1 \end{aligned}$$

2. Να επιβεβαιωθεί αναλυτικά ότι η  $u(x, t) = \sin(n\pi x) \cos(cn\pi t)$  είναι λύση της εξίσωσης  $u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$  για κάθε θετικό ακέραιο  $n = 1, 2, \dots$
3. Να λυθεί η κυματική εξίσωση της παλλόμενης χορδής

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad \text{για } 0 < x < 1 \quad \text{και} \quad 0 < t < 1$$

με οριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0 \quad \text{και} \quad u(1, t) = 0 & \quad \text{για } 0 \leq t \leq 1 \\ u(x, 0) = f(x) = \sin(\pi x) & \quad \text{για } 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) = g(x) = 0 & \quad \text{για } 0 < x < 1 \end{aligned}$$

4. Δοκιμάστε στα παραπάνω προβλήματα τιμές του  $r$  μεγαλύτερες και μικρότερες του 1 για να μελετήσετε την ευστάθεια της μεθόδου.