Ρίζες μη-γραμμικών εξισώσεων

18 Φεβρουαρίου 2010

Επίλυση μη-γραμμικών εξισώσεων

Το σύνηθες πρόβλημα είναι η εύρεση μιας τιμής r τέτοιας ώστε για τη συνάρτηση $f(x)$ όπου $x \in (a, b)$ να ισχύει

$$f(r) = 0 \tag{1}$$

Η τυπική αριθμητική διαδικασία ανάγεται στην εύρεση μιας αναδρομικής σχέσης της μορφής:

$$x_{n+1} = \sigma(x_n) \tag{2}$$

που θα δώσει μια ακολουθία τιμών $x_0, x_1, \ldots, x_\kappa, \ldots$ το όριο της οποίας για $\kappa \to \infty$ θα είναι μιά ρίζα της εξίσωσης (1).
Για κάθε τέτοια μέθοδο καλούμαστε να απαντήσουμε τα εξής ερωτήματα:

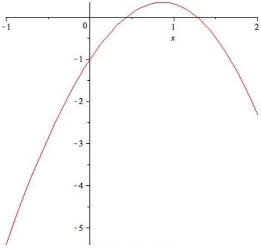
- Κάτω απο ποιές συνθήκες θα συγκλίνει
- Αν συγκλίνει, τότε *πόσο γρήγορα*
- Ποιά είναι μια αρχική ‘σωστή’ πρόβλεψη για το x_0.

Μέθοδος της Διχοτόμησης (Bolzano)

Ας ξεκινήσουμε ‘ψάχνοντας ’ για τις ρίζες της εξίσωσης:

$$f(x) = 2\sin(x) - x^2 - e^{-x} = 0 \tag{3}$$

τότε αν $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ θα πάρουμε $f(x_1 = 0) = -1$ και $f(x_2 = 1) = 0.31506$



- $x_3 = (x_0 + x_1)/2 = 0.5 \rightarrow f(0.5) = 0.1023$
- $x_4 = (x_0 + x_3)/2 = 0.25 \rightarrow f(0.25) = -0.1732$
- $x_5 = (x_4 + x_3)/2 = 0.375 \rightarrow f(0.375) = -0.0954$
- $x_6 = (x_5 + x_3)/2 = 0.4375 \rightarrow f(0.4375) = 0.0103$
- $x_7 = (x_5 + x_6)/2 = 0.40625 \rightarrow f(0.40625) = -0.0408$
- $\ldots$
- $x_n = r_1 \approx 0.4310378790$

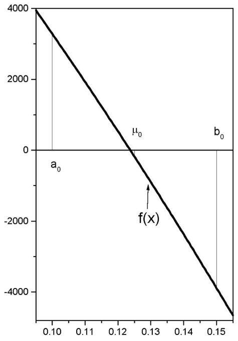
και προφανώς η ρίζα θα είναι : $r_2 = 1.279762546$.

Εαν υπάρχει μια ρίζα στο διάστημα $[a_0, b_0]$, τότε $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.
Αν $\mu_0 = (a_0 + b_0)/2$, θα ισχύει:

- (I) είτε $f(\mu_0) \cdot f(a_0) < 0$
- (II) είτε $f(\mu_0) \cdot f(b_0) < 0$
- (III) είτε $f(\mu_0) = 0$.

Αν ισχύει η περίπτωση (III), τότε η ρίζα έχει βρεθεί. Αλλοιώς, ορίζουμε ως νέο διάστημα το

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [\mu_0, b_0] & \text{αν} \quad (II) \\ [a_0, \mu_0] & \text{αν} \quad (I) \end{cases} \qquad (4)$$



Μέθοδος της Διχοτόμησης III

```
REPEAT
        SET x3 = (x1 + x2)/2
        IF f(x3) · f(x1) < 0
                SET x2 = x3
        ELSE
                SET x1 = x3
        ENDIF
UNTIL (|x1 − x2| < E) OR f(x3) = 0
```

Πίνακας: Διαδικασία εύρεσης της ρίζας μιας μη-γραμμικής εξίσωσης χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διχοτόμησης

Μέθοδος της Διχοτόμησης IV

ΚΡΙΤΙΚΗ

- Αργή σύγκλιση
- Προβληματική όταν υπάρχουν ασυνέχειες

ΣΦΑΛΜΑ : Το σφάλμα ορίζεται ως: $\varepsilon_n = |r - x_n|$. Για αυτή τη μέθοδο θα ισχύει:

$$\varepsilon_n \leq \frac{1}{2}|a_n - b_n| \tag{5}$$

και σε κάθε βήμα το σφάλμα θα είναι το μισό απ'οτι στο προηγούμενο βήμα

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n}{2} = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2^2} = \cdots = \frac{\varepsilon_0}{2^{n+1}} \tag{6}$$

αν το ζητούμενο είναι ένα σφάλμα E τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται:

$$n = \log_2 \frac{\varepsilon_0}{E} \tag{7}$$

Γραμμική Προσέγγιση I

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση είναι ‘ σχεδόν γραμμική’ στο διάστημα (x_1, x_2) όπου $f(x_1)$ και $f(x_2)$ έχουν αντίθετα πρόσημα. Τότε απο τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ διέρχεται μια ευθεία γραμμή που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(x) = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) \tag{8}$$

Η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα Ox έστω στο σημείο x_3 το οποίο θα δίνεται από την εξίσωση

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1) \tag{9}$$

Δηλαδή αντικαθιστούμε την συνάρτηση με μια ευθεία και υποθέτουμε ότι το σημείο στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα Ox είναι μια προσεγγιστική τιμή της ρίζας της εξίσωσης.

Το νέο σημείο x_3 θα χρησιμοποιηθεί για την εύρεση μιας καλύτερης προσέγγισης στην ρίζα r.

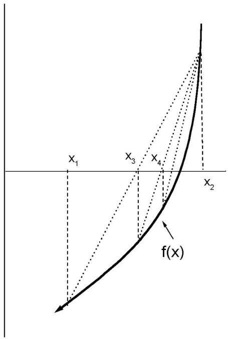
Γραμμική Προσέγγιση ΙΙ

Μια πιθανή διαδικασία επιλογής των νέων σημείων είναι η ακόλουθη:

- (I) Αν $f(x_1) \cdot f(x_3) < 0 \Rightarrow x_2 = x_3$
- (II) Αν $f(x_2) \cdot f(x_3) < 0 \Rightarrow x_1 = x_3$
- (III) Αν $f(x_3) = 0$

Αναδρομική σχέση:

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} (x_{n+1} - x_n) \, . \tag{10}$$



Γραμμική Προσέγγιση : 1ος Αλγόριθμος

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μια ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2)

REPEAT

  SET $x_3 = x_2 - f(x_2) \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$

  IF $f(x_3) \cdot f(x_1) < 0$

    SET $x_2 = x_3$

  ELSE

    SET $x_1 = x_3$

  ENDIF

UNTIL $|f(x_3)| < E$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Βρείτε τη ρίζα της εξίσωσης (3) με ένα σφάλμα $E \approx 10^{-6}$.

Γραμμική Προσέγγιση : 2ος Αλγόριθμος

Εάν η ρίζα δεν υπάρχει στο διάστημα (x_1, x_2)

```
REPEAT
    SET x3 = x2 - f(x2) · (x2 - x1)/(f(x2) - f(x1))
    IF |f(x1)| < |f(x2)|
        SET x2 = x3
    ELSE
        SET x1 = x3
    ENDIF
UNTIL |f(x3)| < E
```

Αν ξ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και $\varepsilon_n = |\xi - x_n|$ είναι το σφάλμα για $x = x_n$, τότε η σύγκλιση της μεθόδου της γραμμικής παεμβολής θα δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon_{n+1} = k \cdot \varepsilon_n^{1.618} \tag{11}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Αν υποθέσουμε ότι $x_n = \xi + \varepsilon_n$ τότε

$$f(x_n) = f(\xi + \varepsilon_n) = f(\xi) + \varepsilon_n f'(\xi) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(\xi) \tag{12}$$

οπότε η σχέση

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} (x_{n+1} - x_n) \tag{13}$$

θα γραφεί ως

$$\xi + \varepsilon_{n+2} = \xi + \varepsilon_{n+1} - \frac{\varepsilon_{n+1} f'(\xi) + \varepsilon_{n+1}^2 f''(\xi)/2}{f'(\xi)(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)\left(\varepsilon_{n+1}^2 - \varepsilon_n^2\right)} \cdot (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)$$

που οδηγεί στην:

$$\varepsilon_{n+2} \approx \varepsilon_{n+1}\left[1-\left(1-\frac{\varepsilon_n}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right)\right] = \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}$$

αλλά εμείς ενδιαφερόμαστε για μια σχέση της μορφής $\varepsilon_{n+1} = k\cdot\varepsilon_n^m$ οπότε :

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_{n+1} = k\cdot\varepsilon_n^m\\ \varepsilon_{n+2} = k\cdot\varepsilon_{n+1}^m\end{array}\right\} \Rightarrow k\cdot\varepsilon_{n+1}^m = \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n\left(\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\right)$$

$$\varepsilon_{n+1} = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{m-1}}\varepsilon_n^{\frac{1}{m-1}}A^{\frac{1}{m-1}} \quad \text{όπου} \quad A = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \tag{14}$$

$$k\cdot\varepsilon_n^m = \left(\frac{A}{k}\right)^{\frac{1}{m-1}}\varepsilon_n^{\frac{1}{m-1}} \quad \Bigg| \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} k = \left(\frac{A}{k}\right)^{1/(m-1)} \\ m = \frac{1}{m-1} \Rightarrow m^2-m-1=0\end{array}$$

$$m = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} = 1.618 \quad \text{και} \quad k^m = A = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}$$

$$\varepsilon_{n+1} = k\cdot\varepsilon_n^{1.618} \tag{15}$$

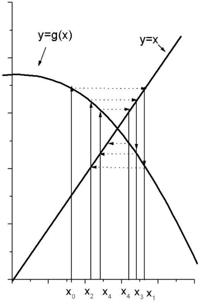
Η μέθοδος $x_{n+1} = g(x_n)$

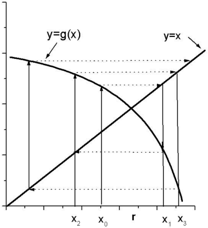
Αναδιατάξτε μια δοθείσα μή-γραμμική εξίσωση $f(x) = 0$, της οποίας ζητούμε την αριθητική τιμή της ρίζας στη μορφή $x_{n+1} = g\,(x_n)$. Για παράδειγμα, η εξίσωση $f(x) = 2\sin(x) - x^2 - e^{-x} = 0$ να γραφεί πχ ώς

$$x = \sqrt{2\sin(x) - e^{-x}} \quad \text{ή} \quad x_{n+1} = \sqrt{2\sin(x_n) - e^{-x_n}} \tag{16}$$

οπότε επιδιώκουμε τη σύγκλιση της ακολουθίας

$\lim_{n\to\infty} x_n = r \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$





ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν οι συναρτήσεις $g(x)$ και $g'(x)$ είναι συνεχείς σ'ενα διάστημα περί τη ρίζα r της εξισωσης $x = g(x)$, και αν $|g'(x)| < 1$ για κάθε x σάυτό το διάστημα, τότε η αναδρομική σχέση $x_{n+1} = g(x_n)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ θα συγκλίνει στη τιμή $x = r$, εφόσον η αρχική επιλογή x_1 βρίσκεται στο διάστημα.

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Αυτή είναι αναγκαία συνθήκη μόνο, διότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου σύγκλιση επιτυγχάνεται ακόμη και χωρίς την ικανοποίηση όλων των παραπάνω συνθηκών.

• Σε ένα πρόγραμμα η ικανοποίση της παραπάνω προυπόθεσης εξετάζεται μέσω της συνθήκης $|x_3 - x_2| < |x_2 - x_1|$

ΕΡΡΟΡ Μετά από n το σφάλμα θα είναι: $\varepsilon_n = r - x_n$

$$\varepsilon_{n+1} = r - x_{n+1} = g(r) - g(x_n) = g'(r)(r - x_n) = g'(r)\,\varepsilon_n$$

Δηλαδή γραμμική σύγκλιση.

Η ταχύτητα σύγκλισης βετιώνεται όσο μικρότερη είναι η τιμή της $|g'(x)|$ στο υπο μελέτη διάστημα.

Αν η παράγωγος έχει αρνητικό πρόσημο τότε παaρατηρούμε μια 'ταλαντούμενη σύγκλιση'.

Μέθοδος $x_{n+1} = g(x_n)$: Παράδειγμα

Να βρεθεί η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x + \ln(x)$ στο διάστημα $[0.1, 1]$.

Θα δοκιμάσουμε να μελετήσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας διαφορετικές μορφές γραφής της αναδρομικής σχέσης:

- $x_{n+1} = -\ln(x_n)$ αλλά $|g'(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| \geq 1$ ον $[0.1, 1]$: μη σύγκλιση.
- $x_{n+1} = e^{-x_n}$ οπότε $|y'(x)| = |e^{-x}| \leq e^{-0.1} \approx 0.9 < 1$: σύγκλιση.
- μια άλλη γραφή είναι: $x_{n+1} = (x_n + e^{-x_n})/2$ τηεν $|g'(x)| = \frac{1}{2}|1 - e^{-x}| \leq \frac{1}{2}|1 - e^{-1}| = 0.316$: καλύτερη σύγκλιση.
- τελικά $x_{n+1} = \frac{x_n + 2e^{-x_n}}{3}$ οπότε $|g'(x)| = \frac{1}{3}|1 - 2e^{-x}| \leq \frac{1}{3}|1 - 2e^{-1}| = 0.03$: ακόμη καλύτερη σύγκλιση.

Επομένως η προφανής επιλογή είναι:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2e^{-x_n}}{3} \ .$$

Η επιτάχυνση Aitken

Αν μια μέθοδος συγκλίνει γραμμικά (π.χ. $\varepsilon_{n+1} = g'(r)\varepsilon_n$) τότε το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να ‘βελτιωθεί’ χωρίς να χρησιμοποιηθούν πολλές επαναλήψεις.
Το σφάλμα ε_n της μεθόδου $x_{n+1} = g'(x_n)$ μετά από n επαναλήψεις είναι:

$$r - x_{n+1} \approx g'(r)(r - x_n)$$

ενώ μετά από $n+1$ επαναλήψεις θα είναι:

$$r - x_{n+2} \approx g'(r)(r - x_{n+1})$$

Οπότε διαιρώντας κατά μέλη λαμβάνουμε :

$$\frac{r - x_{n+1}}{r - x_{n+2}} = \frac{g'(r)(r - x_n)}{g'(r)(r - x_{n+1})}$$

Τέλος επιλύοντας την παραπάνω σχέση ως προς r λαμβάνουμε:

$$r = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}} \tag{17}$$

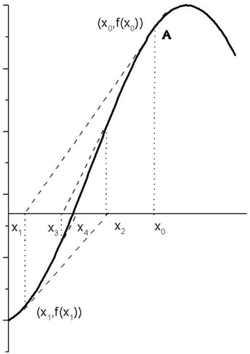
Αυτή η σχέση δίνει μια σημαντική βελτίωση στην τελική τιμή της ρίζας ώς συνάρτηση 3 προηγουμένων τιμών.

Η μέθοδος Newton-Raphson

Εαν πλησίον μια ρίζας r της εξίσωσης $f(x) = 0$ η 1η και η 2η παράγωγος της $f(x)$ είναι συνεχείς τότε μπορούμε να αναπτύξουμε τεχνικές εύρεσης ριζών που είναι ταχύτερες από όσες μεθόδους παρουσιάσθηκαν ως τώρα.

Ας υποθέσουμε ότι μετά από n επαναλήψεις έχουμε οδηγηθεί σε μια τιμή $x_{n+1} = r$ που είναι ρίζα της εξίσωσης ενώ υπάρχει μια 'κοντινή' τιμή x_n τέτοια ώστε: $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$. Τότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned} f\left(x_{n+1}\right) &= f\left(x_n + \varepsilon_n\right) \\ &= f\left(x_n\right) + \varepsilon_n f'\left(x_n\right) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''\left(x_n\right) + \cdots \end{aligned}$$



Αλλά επειδή $f(x_{n+1}) = 0 \rightarrow 0 = f\left(x_n\right) + \varepsilon_n f'\left(x_n\right)$ καταλήγουμε στη σχέση :

$$\varepsilon_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (18)$$

Η μέθοδος Newton-Raphson: Σύγκλιση I

Αν r είναι μια ρίζα της $f(x) = 0$. Τότε θα ισχύει: $x_n = r + \varepsilon_n$ και $x_{n+1} = r + \varepsilon_{n+1}$, επομένως:

$$r + \varepsilon_{n+1} = r + \varepsilon_n - \frac{f(r + \varepsilon_n)}{f'(r + \varepsilon_n)} = r + \varepsilon_n - \frac{f(r) + \varepsilon_n f'(r) + \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 f''(r)}{f'(r) + \varepsilon_n f''(r)}$$

αλλά επειδή $f(r) = 0$ και

$$\frac{1}{1 + \varepsilon f''(r)/f'(r)} \approx 1 - \varepsilon_n \frac{f''(r)}{f'(r)}$$

οδηγούμαστε στην παρακάτω σχέση:

$$\varepsilon_{n+1} = -\frac{f''(r)}{2f'(r)} \cdot \varepsilon_n^2 \tag{19}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η σύγκλιση είναι τετραγωνική

Η μέθοδος Newton-Raphson: Σύγκλιση ΙΙ

Ενας άλλος τρόπος υπολογισμού της ταχύτητας σύγκλισης της μεθόδου Newton-Raphson (18) μπορεί να αναπτυχθεί με βάση τη μέθοδο $x_{n+1} = g(x_n)$ η οποία συγκλίνει αν $|g'(x)| < 1$. Εδώ θέτουμε:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \tag{20}$$

επειδή δε $\epsilon_n = x_n - r = g(x_n) - g(r)$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} g(x_n) &= g(r + \epsilon_n) = g(r) + g'(r)\epsilon_n + \frac{g''(\xi)}{2}\epsilon_n^2 && (21) \\ &= g(r) + \frac{g''(\xi)}{2}\epsilon_n^2, \quad \xi \in [r, x_n] && (22) \end{aligned}$$

Που οδηγεί στη σχέση (19):

$$g(x_n) - g(r) = \frac{g''(\xi)}{2}\epsilon_n^2 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} - r \equiv \epsilon_{n+1} = \frac{g''(\xi)}{2}\epsilon_n^2 \tag{23}$$

Η μέθοδος Newton-Raphson: Αλγόριθμος

```
        COMPUTE f(x1), f'(x1)
    SET x2 = x1
    IF (f(x1) ≠ 0) END (f'(x1) ≠ 0)
        REPEAT
              SET x2 = x1
              SET x1 = x1 − f(x1)/f'(x1)
        UNTIL (|x1 − x2| < E) OR (|f(x2)| < E')
        ENDIF
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Υπολογίστε προσεγγιστικά την τετραγωνική ρίζα ενός αρίθμος a.

$$f(x) = x^2 - a \quad \text{και} \quad f'(x) = 2x$$

Οπότε

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \quad \text{ή καλύτερα} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \qquad (24)$$

Μέθοδος Halley

Στα προηγούμενα είχαμε υπονέσει ότι $\varepsilon_n = x_{n+1} - x_n$, οπότε

$$f(x_{n+1}) = f(x_n + \varepsilon_n) = f(x_n) + \varepsilon_n f'(x_n) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(x_n) + \ldots$$

$$f(x_n) + \varepsilon_n \left[f'(x_n) + \frac{\varepsilon_n}{2} f''(x_n) \right] = 0$$

$$\varepsilon_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{\varepsilon_n}{2} f''(x_n)} \quad \text{ή} \quad \varepsilon_n \approx -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{f''(x_n) \cdot f(x_n)}{2f'(x_n)}} = x_n - \frac{2f(x_n) f'(x_n)}{2f'^2(x_n) - f''(x_n)\, f(x_n)} \qquad (25)$$

Προφανώς άν θέσουμε $f''(x_n) = 0$ αναγόμαστε στην μέθοδο Newton-Raphson.

Μέθοδος Halley - Σύγκλιση

Με τη μέθοδο του Halley επιτυγχάνουμε κυβική σύγκλιση:

$$\varepsilon_{n+1} = -\left[\frac{1}{6}\frac{f'''(\xi)}{f'(\xi)} - \frac{1}{4}\left(\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right)^2\right] \cdot \varepsilon_n^3 \qquad (26)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού Q (εδώ $Q = 9$) με τη μέθοδο του Halley ιδίνεται από τη σχέση (συγκρίνετε με την εξίσωση (24):

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3x_n Q}{3x_n^2 + Q} \qquad (27)$$

Newton	Σφάλμα	Halley	Σφάλμα
x_0=15	$\varepsilon_0 = 12$	x_0=15	$\varepsilon_0 = 12$
x_1=7.8	$\varepsilon_1 = 4.8$	x_1=5.526	$\varepsilon_1 = 2.5$
x_2=4.477	$\varepsilon_2 = 1.477$	x_2=3.16024	$\varepsilon_2 = 0.16$
x_3=3.2436	$\varepsilon_3 = 0.243$	x_3=3.00011	$\varepsilon_3 = 1.05 \times 10^{-4}$
x_4=3.0092	$\varepsilon_4 = 9.15 \times 10^{-3}$	x_4=3.0000000...	$\varepsilon_4 = 3.24 \times 10^{-14}$

Η μέθοδος του Newton : Πολλαπλές ρίζες

Αν $f(x) = (x-r)^m q(x)$ όπου m είναι η πολλαπλότητα της ρίζας r τότε:

$$f'(x) = (x-r)^{m-1}\left[mq(x) + (x-r)q'(x)\right]$$

δηλαδή $f(r) = 0$ ανδ $f'(r) = 0$. Επομένως ο λόγος $[f(x)/f'(x)]_{x\to r}$ θα αποκλίνει.

Για την υπέρβαση αυτού του προβλήματος δημιουργούμε τη συνάρτηση

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-r)q(x)}{mq(x) + (x-r)q'(x)}$$

η οποία προφανώς έχει την r ως ρίζα πολλαπλότητας $m = 1$ οπότε η αναδρομική σχέση γράφεται ως:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{\phi(x_n)}{\phi'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)/f'(x_n)}{\left\{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)\right\}/[f'(x_n)]^2} \\ &= x_n - \frac{f(x_n)\, f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} \end{aligned} \tag{28}$$

Η σύγκλιση τώρα είναι τετραγωνική γιατή εφαρμόσαμε τη μέθοδο Newton-Raphson όχι στη συνάρτηση $f(x)$ αλλά στην $\phi(x) = 0$ της οποίας η τιμή r είναι απλή ρίζα.

Να βρεθούν οι πολλαπλές ρίζες της $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ $(r = \sqrt{2} = 1.414213...)$.

- Η τυπική Newton-Raphson δίνει :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{4x_n} \qquad (A)$$

- Η τροποποιημένη Newton-Raphson δίνει:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^2 - 2)x_n}{x_n^2 + 2} \qquad (B).$$

x	(A)	ΣΦΑΛΜΑ (A)	(B)	ΣΦΑΛΜΑ (B)
x_0	1.5	8.6×10^{-2}	1.5	8.6×10^{-2}
x_1	1.458333333	4.4×10^{-2}	1.411764706	-2.4×10^{-3}
x_2	1.436607143	2.2×10^{-2}	1.414211439	-2.1×10^{-6}
x_3	1.425497619	1.1×10^{-2}	1.414213562	-1.6×10^{-12}

Μελέτη της Σύγκλισης

Θα συγκρίνουμε την ταχύτητα της γραμμικής και τετραγωνικής σύγκλισης για τις μεθόδους Διχοτόμησης και Newton-Raphson

- Αν πρόκειτε για **γραμμική σύγκλιση** τότε έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = a \Rightarrow |\varepsilon_n| \approx a|\varepsilon_{n-1}| \approx a^2|\varepsilon_{n-2}| \approx \ldots \approx a^n|\varepsilon_0|$$

οπότε λύνοντας την εξίσωση ως προς n οδηγούμαστε σε μια σχέση που δίνει των αριθμό των επαναλήψεων, n, που απαιτούνται για την επίτευξη μιας δοθείσης ακρίβειας $|\varepsilon_n|$:

$$n \approx \frac{\log_{10}|\varepsilon_n| - \log_{10}|\varepsilon_0|}{\log_{10}|a|} \tag{29}$$

- Αναλόγα όταν η **σύγκλιση είναι τετραγωνική** λαμβάνουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\tilde{\varepsilon}_{n+1}|}{|\tilde{\varepsilon}_n|^2} = b \Rightarrow |\tilde{\varepsilon}_n| \approx b|\tilde{\varepsilon}_{n-1}|^2 \approx b^3|\tilde{\varepsilon}_{n-2}|^4 \approx \ldots \approx b^{2^{n+1}-1}|\tilde{\varepsilon}_0|^{2^{n+1}}$$

και επιλύοντας την ως προς n για δοθείσα τιμή της ακρίβειας $|\varepsilon_n|$ λαμβάνουμε:

$$2^{n+1} \approx \frac{\log_{10}|\tilde{\varepsilon}_n| + \log_{10}|b|}{\log_{10}|\tilde{\varepsilon}_0| + \log_{10}|b|} \tag{30}$$

Αν σε κάποιο πρόβλημα ζητάμε τον αριθμό των επαναλήψεων n για να επιτύχουμε σφάλμα μικρότερο του 10^{-6} δηλαδή $\varepsilon_n \leq 10^{-6}$ με ένα αρχικό σφάλμα στγην πρώτη επανάληψη, έστω $\varepsilon_0 = 0.5$ και για $a = b = 0.7$ τότε η σχέση (29) δίνει:

$$n \approx \frac{\log_{10}|10^{-6}| - \log_{10}|0.5|}{\log_{10}|0.7|} \approx 37 \quad \text{επαναλήψεις}$$

Ενώ για τις ίδιες συνθήκες η τετραγωνική σύγκλιση δίνει:

$$2^{n+1} \approx \frac{\log_{10}|10^{-6}| + \log_{10}|0.7|}{\log_{10}|0.5| + \log_{10}|0.7|} \approx 13.5$$

δηλαδή ο τελικός αριθμός των επαναλήψεων είναι **μόνο** 3.
Η διαφορά γίνεται ακόμη πιό σημαντική αν απαιτήσουμε ακόμη μεγαλύτερη ακρίβεια π.χ. $\varepsilon_n \leq 10^{-14}$ τότε η μέθοδος της διχοτόμησης απαιτεί 89 επαναλήψεις ένω η μέθοδος Newton-Raphson απαιτεί **μόνο** 4.

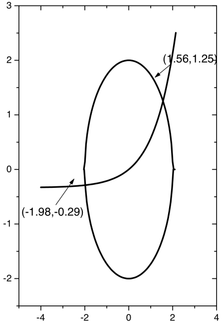
Μη-γραμμικά συστήματα εξισώσεων

Θα παρουσιάσουμε δύο μεθόδους για την επίλυση συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων που βασίζονται σε μεθόδους που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες ενότητες.

Ενα παράδειγμα δύο τέτοιων εξισώσεων είναι:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^x - 3y - 1 \\ g(x,y) &= x^2 + y^2 - 4 \end{aligned} \tag{31}$$

είναι προφανές ότι οι εξισώσεις $f(x,y) = 0$ και $g(x,y) = 0$ περιγράφουν καμπύλες στο επίπεδο xy όπως στο διπλανό σχήμα.



Η μέθοδος Newton για δύο εξισώσεις

Θα αναπτύξουμε μια μέθοδο προσεγγιστικής επίλυσης συστήματος δύο μη-γραμμικών εξισώσεων η οποία εύκολα θα μπορεί να επεκταθεί και σε συστήματα n μη-γραμμικών εξισώσεων. Ας θεωρήσουμε τις εξισώσεις

$$f(x,y) = 0\,, \quad \text{και} \quad g(x,y) = 0$$

και έστω μετά από $n+1$ επαναλήψεις η μέθοδος συγκλίνει στη λύση (x_{n+1}, y_{n+1}) δηλαδή είναι $f(x_{n+1}, y_{n+1}) \approx 0$ και $g(x_{n+1}, y_{n+1}) \approx 0$. Οπότε με την υπόθεση ότι $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$ και $y_{n+1} = y_n + \delta_n$ θεωρούμε ένα ανάπτυγμα Taylor περί τη λύση, δηλαδή

$$0 \approx f(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n + \varepsilon_n, y_n + \delta_n) \approx f(x_n, y_n) + \varepsilon_n \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_n + \delta_n \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_n$$

$$0 \approx g(x_{n+1}, y_{n+1}) = g(x_n + \varepsilon_n, y_n + \delta_n) \approx g(x_n, y_n) + \varepsilon_n \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_n + \delta_n \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_n$$

Λύνοντας το προηγούμενο σύστημα ως προς ε_n και δ_n λαμβάνουμε :

$$\varepsilon_n = \frac{-f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{και} \quad \delta_n = \frac{-g\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{32}$$

Αλλά επειδή $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$ και $y_{n+1} = y_n + \delta_n$ οδηγούμαστε στις παρακάτω σχέσεις που είναι επέκταση της μεθόδου Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{f \cdot g_y - g \cdot f_y}{f_x \cdot g_y - g_x \cdot f_y}\right)_n \tag{33}$$

$$y_{n+1} = y_n - \left(\frac{g \cdot f_x - f \cdot g_x}{f_x \cdot g_y - g_x \cdot f_y}\right)_n \tag{34}$$

Η μέθοδος Newton για N μη-γραμμικές εξισώσεις

Αν θεωρήσουμε το σύστημα των παρακάτω N μη-γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} &f_1(x^1, x^2, ..., x^N) = 0 \\ &\vdots \\ &f_N(x^1, x^2, ..., x^N) = 0 \end{aligned}$$

με N αγνώστους $(x^1, x^2, ..., x^N)$. Αν θεωρήσουμε μια λύση του συστήματος, έστω την $(x^1_{n+1}, x^2_{n+1}, ..., x^N_{n+1})$ για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} &x^1_{n+1} = x^1_n + \Delta x^1_n \\ &\vdots \\ &x^N_{n+1} = x^N_n + \Delta x^N_n \end{aligned}$$

Τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα ανάπτυγμα της μορφής:

$$
\begin{aligned}
0 \cong f_1(x_{n+1}^1, ..., x_{n+1}^N) &= f_1(x_n^1 + \Delta x_n^1, ..., x_n^N + \Delta x_n^N) \\
&\approx f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x^1}\Delta x_n^1 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x^N}\Delta x_n^N \\
&\vdots \\
0 \cong f_N(x_{n+1}^1, ..., x_{n+1}^N) &= f_N(x_n^1 + \Delta x_n^1, ..., x_n^N + \Delta x_n^N) \\
&\approx f_N + \frac{\partial f_N}{\partial x^1}\Delta x_n^1 + ... + \frac{\partial f_N}{\partial x^N}\Delta x_n^N
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Οπότε οι ποσότητες Δx_n^i θα είναι λύσεις του παρακάτω γραμμικού συστήματος

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \frac{\partial f_1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^N} \\
\vdots & & & \vdots \\
\frac{\partial f_N}{\partial x^1} & \frac{\partial f_N}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x^N}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
\Delta x_n^1 \\
\vdots \\
\Delta x_n^N
\end{pmatrix}
= -
\begin{pmatrix}
f_1 \\
\vdots \\
f_N
\end{pmatrix}
\tag{36}
$$

Οπότε ξεκινώντας με N αρχικές τιμές $(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^N)$ από τη λύση του παραπάνω συστήματος μπορούμε να υπολογίσουμε τις ποσότητες Δx_n^i που οδηγούν στις 'νέεσ' τιμές $(x_1^1, x_1^2, ..., x_1^N)$ μέσω των σχέσεων:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_0^1 + \Delta x_0^1 \\ &\vdots \\ x_1^N &= x_0^N + \Delta x_0^N \end{aligned} \tag{37}$$

Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου υπολογισθεί μια λύση με τη ζητούμενη ακρίβεια. Δηλαδή $\max|\Delta x_n^i| < E$.

Μέθοδοι του τύπου $x = g(x)$

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα απο N μη-γραμμικές εξισώσεις με N αγνώστους :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= 0 \\ \vdots \quad &\vdots \\ f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= 0 \end{aligned} \tag{38}$$

Το σύστημα μπορεί να γραφει στη μορφή:

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ \vdots \\ x_N &= F_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) \end{aligned} \tag{39}$$

ΠΡΩΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ:

Δίνουμε μια N-άδα αρχικών τιμών $(x_1, \ldots, x_N)_0$ στο δεξιό μέλος των παραπάνω εξισώσεων και βρίσκουμε μια νέα N-άδα τιμών $(x_1, \ldots, x_N)_1$.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία ως την προσεγγιστική εύρεση λύσης με τη ζητούμενη ακρίβεια.

ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ:
Δίνουμε N αρχικές τιμές $(x_1, \ldots, x_N)_0$ στο δεξιό μέλος της 1ης από τις εξισώσεις (39) και βρίσκουμε μια νέα ‘ διορθωμένη’ τιμή την $(x_1)_1$.
Στη συνέχεια στο δεξιό μέλος της 2ης εξίσωσης αντικαθιστούμε την ακόλουθη N-άδα τιμών $(x_1)_1, (x_2, \ldots, x_N)_0$ και βρίσκουμε μια νέα ‘ διορθωμένη’ τιμή την $(x_2)_1$.
Συνεχίζουμε στην 3η εξίσωση αντικαθιστώντας τις τιμές $(x_1, x_2)_1$, $(x_3, \ldots, x_N)_0$ κοκ.

ΣΥΓΚΛΙΣΗ: Το σύστημα $x_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ όπου $i = 1, \ldots, N$ θα συγκλίνει σε μια λύση, αν στην περιοχή αυτής της λύσης ικανοποιείται το παρακάτω κριτήριο:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial F_1}{\partial x_N}\right| &< 1 \\
&\vdots \\
\left|\frac{\partial F_N}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial F_N}{\partial x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial F_N}{\partial x_N}\right| &< 1
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Μέθοδος τύπου $x = g(x)$: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το μή-γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \alpha\nu\delta \quad e^x - 3y = 1$$

με ακριβείς λύσείς (1.5595,1.2522) και (-1.9793,-0.2873) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$x_{n+1} = -\sqrt{4 - y_n^2} \quad \text{και} \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}(e^{x_n} - 1)$$

Αν επιλέξουμε ως αρχικές $(-1, 0)$, δημιουργούμε την παρακάτω ακολουθία τιμών

n	0	1	2	3	4	5
x	-1	-2	-1.9884	-1.9791	-1.9792	-1.9793
y	0	-0.2107	-0.2882	-0.2877	-0.2873	-0.2873

και μετά απο 5 επαναλήψεις προσεγγίζουμε τις ακριβείς λύσεις.

Αν χρησιμοποιήσουμε την βελτιωμένη μέθοδο τότε τα αποτελέσματα είναι:

n	0	1	2	3
x	-1	-2	-1.9791	-1.9793
y	0	-0.2882	-0.2873	-0.2873

δηλαδή η ίδια ακρίβεια επιτυγχάνεται με μόνο 3 επαναλήψεις. Για να βρούμε τη 2η λύση του συστήματος δημιουργούμε μια παραλλαγή του προηγούμενου αναδρομικού σχήματος

$$x_{n+1} = \sqrt{4 - y_n^2} \quad \text{και} \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}(e^{x_n} - 1)$$

Εστω ότι οι αρχικές μας τιμές είναι πολύ κοντα στις ακριβείς λύσεις π.χ. $x_0 = 1.5$ και $y_0 = 1$ τα αποτελέσματα είναι :

n	0	1	2	3	4	5
x	1.5	1.7321	1.2630	1.8126	1.0394	1.9050
y	1	1.5507	0.8453	1.7087	0.6092	1.9064

Παρατηρούμε ότι αποκλείνουμε απο τις ακριβείς λύσεις και ο λόγος είναι ότι τα κριτήρια σύγκλισης δεν ικανοποιούνται στην περιοχή αυτής της λύσης.

Αν δοκιμάσουμε την παρακάτω γραφή της αναδρομικής σχέσης

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \sqrt{4 - x_n^2} \\ x_{n+1} &= \ln(1 + 3y_n) \end{aligned}$$

βρίσκουμε μετά από μερικές επαναλήψεις 2η λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Βρείτε τις ιδιοτιμές λ για τις οποίες η ΔΕ $y'' + \lambda^2 y = 0$ ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y(1) = y'(1)$.
2. Βρείτε προσεγγιστικά τον αντίστροφο ενός αριθμού χωρίς τη χρήση διαίρεσης
3. Αν a είναι ένας πραγματικός αριθμός υπολογίστε προσεγγιστικά την ποσότητα $1/\sqrt{a}$.
4. Βρείτε τη ρίζα της $e^x - \sin(x) = 0$ ($r = -3.183063012$). Αν το αρχικό διάστημα είναι $[-4, -3]$ υπολογίστε τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται με τη μέθοδο της διχοτόμησης για την εύρεση της ρίζας με ακρίβεια 4 δεκαδικών δηλαδή $|x_n - r| < 0.00005$.
5. Επαναλάβετε ην παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της γραμμικής παρεμβολής και Newton-Raphson.

1. Λύστε το παρακάτω σύστημα μη-γραμμικών εξισώσεων

$$e^x - y = 0 \quad \text{και} \quad xy - e^x = 0$$

με τη χρήση και των δύο γνωστών μεθόδων και υπολογίστε την ταχύτητα σύγκλισης

2. Εστω το παρακάτω σύστημα μη-γραμμικών εξισώσεων

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0, \quad \text{και} \quad f_2(x,y) = xy - 1 = 0\,.$$

με προφανείς λύσεις τις $(1,1)$ και $(-1,-1)$. Εξετάστε τις δυσκολίες που δημιουργούνται αν χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Newton.