Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων Εξισώσεων

15 Απριλίου 2010

Εισαγωγή

Ο τύπιε των προβλημάτων που καλούμαστε να επιλύσουμε είναι:

- Να επιλυθεί το σύστημα: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}$, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1N} \\ a_{12} & & & a_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1N} & \cdots & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

- Να βρεθεί ο $\mathbf{A}^{-1}$ (αντίστροφος πίνακας)
- Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα **A**
- Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα **A**

Η Μέθοδος του Gauss

Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε το γραμμικό σύστημα: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}$ με $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2N}x_N &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + a_{N3}x_3 + \ldots + a_{NN}x_N &= b_N
\end{aligned} \tag{1}
$$

Θα προσπαθήσουμε να το μετατρέψουμε σε ένα **τριγωνικό** γραμμικό σύστημα. Η διαδικασία έχει ως ακολούθως:

ΒΗΜΑ 1
Πολλαπλασιάστε την 1η εξίσωση με a_{21}/a_{11} και αφαιρέστε την από τη 2η. Ομοίως πολλαπλασιάστε την 1η εξίσωση με a_{31}/a_{11} κι αφαιρέστε την από την 3η κοκ.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2N}^{(1)}x_N &= b_2^{(1)} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ 0 + a_{N2}^{(1)}x_2 + a_{N3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{NN}^{(1)}x_N &= b_N^{(1)} \end{aligned} \tag{2}$$

όπου έχουμε ορίσει:

$$a_{22}^{(1)} = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} - a_{22}$$

. **ΚΟΚ**

ΒΗΜΑ 2 Η 1η γραμμή και η 1η στήλα θα παραμείνουν ως έχουν και θα πολλαπλασιάσουμε την 2η εξίσωση με $a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ και θα την αφαιρέσουμε από τη 3η κοκ. Οπότε μετά από $n-1$ ανάλογες πράξεις θα λάβουμε:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2N}^{(1)}x_N &= b_2^{(1)} \\ 0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3N}^{(2)}x_N &= b_3^{(2)} \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ 0 + 0 + a_{N3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{NN}^{(2)}x_N &= b_N^{(2)} \end{aligned} \tag{3}$$

Όπου έχουμε θέσει:

$$a_{33}^{(2)} = \frac{a_{32}^{(1)}a_{33}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - a_{33}^{(1)}$$

κοκ.

Μετά από $N-1$ παρόμοια βήματα θα καταλήξουμε στο **άνω-τριγωνικό** σύστημα:

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N & = & b_1 \\
a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2N}^{(1)}x_N & = & b_2^{(1)} \\
a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3N}^{(2)}x_N & = & b_3^{(2)} \\
\vdots & & \\
0 + 0 + \cdots + a_{NN}^{(N-1)}x_N & = & b_N^{(N-1)}
\end{array}
\tag{4}
$$

- Για τη Nστή εξίσωση του παραπάνω συστήματος (5) λαμβάνουμε :

$$
x_N = \frac{b_N^{(N-1)}}{a_{NN}^{(N-1)}} \quad \text{για} \quad a_{NN}^{(N-1)} \neq 0 \tag{5}
$$

- Οι υπόλοιπες τιμές θα υπολογισθούν από την επαναλληπτική διαδικασία:

$$
x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{k=i+1}^{N} a_{ik}^{(i-1)} x_k}{a_{ii}^{(i-1)}} \quad \text{για} \quad a_{ii}^{(i-1)} \neq 0 \tag{6}
$$

Ο αριθμός των πράξεων που απαιτούνται είναι: $(4N^3 + 9N^2 - 7N)/6$.

Ορίζουσα

Αν ο πίνακας **A** έχει μετασχηματισθεί σε άνω-τριγωνικό ή διαγώνιο τότε η ορίζουσα θα υπολογισθεί από τη σχέση:

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{NN} = \prod_{i=1}^{N} a_{ii} \tag{7}$$

Οδήγηση (Pivoting)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το στοιχείο a_{ii} στη θέση (i,i) που χρησιμοποιήθηκε για για την απαλειφή του x_i στις σειρές $i+1$, $i+2$, ... ,N ονομαζεται i-οστό **στοιχείο οδήγησης** και η i-οστή γραμμή ονομάζεται **γραμμή οδήγησης**.

- **Οδήγηση για αποφυγή** $a_{ii}^{(i)} = 0$: Αν $a_{ii}^{(i)} = 0$, η γραμμή i δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απαλοιφή των στοιχείων της στήλης i κάτω από τη διαγώνιο. Είναι αναγκείο να βρεθεί μια γραμμή j, με $a_{ji}^{(i)} \neq 0$ και $j > i$ ωστε να γίνει εναλλαγή της γραμμής i και j ώστε να λάβουμε ένα μη-μηδενικό στοιχείο οδήγησης.

Οδήγηση (Pivoting)

- **Οδήγηση για μείωση σφάλματος:** Αν υπάρχει παραπάνω από ενα στοιχείο στη στήλη i που βρίσκεται επί ήκάτω από τη διαγώνιο, υπάρχει δυνατότητα επιλογής της στήλης που πρέπει να εναλλαγεί.

Επειδή ο ΗΥ εκτελεί πράξεις με περιορισμένο αριθμό ψηφίων είναι πιθανόν η εισαγωγή ενός μικρού σφάλματος κάθε φορά που εκτελείται μια αριθμητική πράξη.
Οπότε θα πρέπει να ελέγχονται όλα τα στοιχεία στη στήλη i που βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο, για να εντοπισθεί μια στήλη j στην οποία το στοιχείο έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.
Δηλαδή $|a_{ji}| = \max\{|a_{ii}|, |a_{i+1\,i}|, \ldots, |a_{N-1\,i}|, |a_{N\,i}|\}$, και στη συνέχεια να εναλλαγεί η γραμμή i με την γραμμή j αν $j > i$.
Συνήθως όταν το στοιχείο οδήγησης είναι μεγάλο έχει ως αποτέλεσμα τη διάδοση μικρότερου αριθμητικού σφάλματος.

Οδήγηση : Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι μετά από ένα αριθμό πράξεων οι τελευταίες 2 εξισώσεις ενός άνω-τριγωνικού συστήματος $N \times N$ είναι:

$$0x_{N-1} + x_N = 1 \quad \text{και} \quad 2x_{N-1} + x_N = 3$$

Η προφανής λύση είναι: $x_{N-1} = x_N = 1$. Αλλά η 'άθροιση' αριθμητικών σφαλμάτων στο σύστημα θα το έχει φέρει στη μορφή:

$$\epsilon x_{N-1} + x_N = 1 \quad \text{και} \quad 2x_{N-1} + x_N = 3 \quad \Rightarrow$$

$$\epsilon x_{N-1} + x_N = 1 \quad \text{και} \quad (1 - 2/\epsilon)\, x_N = 3 - 2/\epsilon \quad \Rightarrow$$

$$x_N = \frac{3 - 2/\epsilon}{1 - 2/\epsilon} \approx 1 \quad \text{σωστό, αλλά} \quad x_{N-1} = \frac{1 - x_N}{\epsilon} \,!$$

Δηλαδή, το x_{N-1} δίνεται ως ο λόγος 2 μικρών ποσοτήτων και η ακρίβεια χάνεται. Στη συνέχεια αυτή η προβληματική λύση θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του $x_{N-2}, \ldots, x_1$ με καταστροφικά αποτελέσματα.

Οδήγηση : Παράδειγμα

Με **οδήγηση**, το σύστημα θα γραφεί ως:

$$2x_{N-1} + x_N = 3 \quad \text{και} \quad \epsilon x_{N-1} + x_N = 1$$

και στη συνέχεια ως:

$$2x_{N-1} + x_N = 3 \quad \text{και} \quad (1 - \epsilon/2)\, x_N = 1 - 3\epsilon/2$$

οπότε $x_N \approx 1.0$ και $x_{N-1} = \frac{3-x_N}{2} \approx 1.0$.

Η μέθοδος Gauss - Jordan

Πρόκειτε για παραλλαγή της μεθόδου Gauss

Εδώ αντί να μετασχηματίζουμε το σύστημα σε ένα άνω-τριγωνικό το μετσχηματίζουμε σε διαγώνιο οπότε η λύση δίνεται άμεσα.

Η μέδοδος ακολουθεί την διαδικασία που παρουσιάσαμε στη μέθοδο Gauss αλλά παράλληλα απαλείφουμε και τα άνω της διαγωνίου στοιχεία.

Δηλαδή, μετά το 1ο βήμα της μεθόδου Gauss πολλαπλασιάζουμε τη 2η εξίσωση με $a_{12}/a_{22}^{(1)}$ και την αφαιρούμε από την 1η.

Ετσι το σύστημα γίνεται:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + 0 + a_{13}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{1N}^{(2)}x_N & = & b_1^{(2)} \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2N}^{(1)}x_N & = & b_2^{(1)} \\ 0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3N}^{(2)}x_N & = & b_3^{(2)} \\ & \vdots & \\ 0 + 0 + a_{N3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{NN}^{(2)}x_N & = & b_N^{(2)} \end{array} \tag{8}$$

Στο επόμενο βήμα απαλείφουμε τους όρους $a_{13}^{(2)}$ και $a_{23}^{(1)}$.

Η μέθοδος Gauss - Jordan

Μετά από N παρόμοια βήματα οδηγούμαστε στο σύστημα:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= b_1^{(N-1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 \qquad\qquad\qquad &= b_2^{(N-1)} \\ &\vdots \\ a_{NN}^{(N-1)}x_N &= b_N^{(N-1)} \end{aligned} \tag{9}$$

με προφανή τελική λύση:

$$x_i = \frac{b_i^{(N-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}} . \tag{10}$$

Η μέθοδος Jacobi (επαναληπτική)

Πρόκειτε για γενίκευση της μεθόδου $x = g(x)$ που παρουσιάσθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.
Αν υποθέσουμε το ακόλουθο σύστημα N γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, ..., x_N) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_N) &= 0 \\ &..... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_N) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

το οποίο μπορεί εύκολα να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_2, x_3, ..., x_N) \\ x_2 &= g_2(x_1, x_3, ..., x_N) \\ & ... \\ x_N &= g_N(x_1, x_2, ..., x_{N-1}) \end{aligned} \tag{12}$$

ή στην συμπαγή μορφή:

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} a_{ij} x_j \tag{13}$$

Η μέθοδος Jacobi (επαναληπτική)

Αν δώσουμε N αρχικές τιμές $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_N^{(0)}$, μπορούμε να δημιουργήσουμε την αναδρομική σχέση

$$x_i^{(k+1)} = g_i(x_1^{(k)}, ..., x_N^{(k)}) . \tag{14}$$

που συγκλίνει στη λύση του συστήματος αν:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1\,,\,j \neq i}^{N} |a_{ij}| \tag{15}$$

ανεχάρτητα από την επιλογή των αρχικών τιμών $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_N^{(0)}$. Η αναδρομική σχέση μπορεί να γραφεί σε συμπαγή μορφή ως:

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x}^{(\mathbf{k})}$$

όπου $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{C}$ και ο πίνακας $\mathbf{D}$ περικλείει μόνο τα διαγώνια στοιχεία του $\mathbf{A}$ ενώ ο πίνακας $\mathbf{C}$ όλα τα υπόλοιπα.

Η μέθοδος Jacobi: Παράδειγμα

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 7 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ -2x + y + 5z &= 15 \end{aligned}$$

με λύσεις $x = 2,\ y = 4,\ z = 3$

Μπορούμε να δημιουργήσουμε τις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις:

$$x^{(k+1)} = \frac{7 + y^{(k)} - z^{(k)}}{4}, \quad y^{(k+1)} = \frac{21 + 4x^{(k)} + z^{(k)}}{8}$$

$$z^{(k+1)} = \frac{15 + 2x^{(k)} - y^{(k)}}{5}$$

Αν υποθέσουμε τις αρχικές τιμές $(1, 2, 2)$ λαμβάνουμε την παρακάτω ακολουθία προσεγγιστικών λύσεων:

$$\begin{aligned} (1, 2, 2) &\to (1.75, 3.375, 3) &&\to (1.844, 3.875, 3.025) \\ &\to (1.963, 3.925, 2.963) &&\to (1.991, 3.977, 3.0) \\ &\to (1.994, 3.995, 3.001) &&\to \cdots \end{aligned}$$

Δηλαδή μετά από 5 επαναλήψεις έχουμε βρεί τη λύση με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

Η μέθοδος Gauss - Seidel

Πρόκειτε για παραλλαγή της μεθόδου Jacobi. Ας ξεκινήσουμε με μια αρχική υποθετική λύση $x_i^{(0)}$. Κατόπιν επειδή από την 1η εξίσωση υπολογίζουμε το $x_1^{(1)}$ θα χρησιμοποιήσουμε στη 2η εξίσωση τις δοκιμαστικές τιμές $(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, ..., x_N^{(0)})$ για τον υπολογισμό του $x_2^{(1)}$.
Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις δοκιμαστικές τιμές
$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(0)}, ..., x_N^{(0)})$ για τον υπολογισμό του $x_3^{(1)}$ κοκ.
Η μορφή της αναδρομικής σχέσης θα είναι:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \sum_{j=2}^{N} a_{1j}x_j^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{N} ?_{2j}x_j^{(k)}\right) \\
&\dots \\
x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Η μέθοδος Gauss - Seidel

Η μέθοδος θα συγκλίνει άν:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1\,,\,j\neq i}^{N} |a_{ij}| \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{17}$$

Η διαδικασία αυτή σε πίο συμπαγή μορφή θα γραφεί ως:

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{k}+\mathbf{1})} = \mathbf{D}^{-\mathbf{1}} \left(\mathbf{B} \; - \; \mathbf{L}\mathbf{x}^{(\mathbf{k}+\mathbf{1})} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(\mathbf{k})}\right) \tag{18}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{L}}_{lower} + \underbrace{\mathbf{D}}_{diagonal} + \underbrace{\mathbf{U}}_{upper} \; .$$

Ο πίνακας **L** περιέχει τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο του πίνακα **A**, ο πίνακας **D** μόνο τα στοιχεία της διαγωνίου του **A** και ο πίνακς **U** τα υπεράνω της διαγωνίου στοιχεία του **A**.

Η μέθοδος Gauss - Seidel: Παράδειγμα

Η αναδρομική σχέση για το παράδειγμα της μεθόδου Jacobi παραμένει ή ίδια

$$
\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= \frac{7 + y^{(k)} - z^{(k)}}{4} \\
y^{(k+1)} &= \frac{21 + 4x^{(k)} + z^{(k)}}{8} \\
z^{(k+1)} &= \frac{15 + 2x^{(k)} - y^{(k)}}{5}
\end{aligned}
$$

αλλά με εφαρμογή της μεθόδου των Gauss - Seidel λαμβάνουμε την παρακάτω ακολουθία προσεγγιστικών λύσεων:

$$
\begin{aligned}
(1, 2, 2) &\rightarrow (1.75, 3.75, 2, 95) \\
&\rightarrow (1.95, 3.97, 2.99) \\
&\rightarrow (1.996, 3.996, 2.999)
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, για επιτευξη της ίδιας ακρίβειας με τη μέθοδο Jacobi απαιτήθηκαν 3 και όχι 5 επαναλήψεις.

Αντίστροφος Πίνακα

Αν το ζητούμενο είναι ο αντίστροφος ενός πίνακα $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

τότε αυτός θα μπορούσε να είναι ένας άλλος πίνακας $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

που θα υπόκειται στη σχέση:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

Για να βρούμε τα στοιχεία (x, y, z, w) του αντίστροφου πίνακα θα πρέπει να λύσουμε **2** γραμμικά συστήματα εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι ο υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα δεν βοηθά στην επίλυση γραμμικών συστημάτων γιατί στην ουσία απαιτείται η επίλυση **2** γραμμικών συστημάτων για την εύρεση του.

- Για την επίλυση και των 2 παραπάνω συστημάτων απαιτείται η διαγωνοποίηση (π.χ. με χρήση Gauss - Jordan) του πίνακα **A**.
- Η μόνη διαφορά μεταξύ των 2 συστημάτων είναι το διάνυσμα στο δεξιό μέλος που αντιστοιχεί σε διαφορετική στήλη του **I**.

Αντίστροφος Πίνακα

Με βάση τα προηγούμενα θα γράψουμε τον πίνακα **A** ως :

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & \mathbf{A} & & & & \mathbf{I} & & \end{array} \tag{19}$$

και οτιδήποτε μετασχηματισμούς χρησιμοποιήσουμε για τη διαγωνοποίηση του **A** ακριβώς τους ίδους θα χρησιμοποιήσουμε και στη δεξιά πλευρά για τον πίνακα **I**.

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1N} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2N} \\ \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{N1} & \tilde{a}_{N2} & \dots & \tilde{a}_{NN} \end{array} \tag{20}$$

Με χρήση της μεθόδου Gauss - Jordan το αριστερό μέλος τελικά θα γίνει ο μοναδιαίος πίνακας **I** και το δεξιό ο **αντίστροφος** $\tilde{a}_{ij} = \mathbf{A}^{-1}$.

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Αν $\mathbf{A}$ είναι ένας $N \times N$ πίνακας τότε οι μιγαδικοί αριθμοί, λ για τους οποίους υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x}$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x} \tag{21}$$

θα ονομάζονται **ιδιοτιμές** του πίνακα $\mathbf{A}$ και τα διανύσματα $\vec{x}$ **ιδιοδιανύσματα**. Στο παρακάτω παράδειγμα:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1} = \underbrace{-1}_{\lambda_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1}$$

το $\vec{u}_1 = (2, 1, -2)^\top$ είναι το ιδιοδιάνυσμα και $\lambda_1 = -1$ η αντίστοιχη ιδιοτιμή του $\mathbf{A}$.

Η εξίσωση (21) είναι ισοδύναμη με: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ που γράφεται:

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0 \tag{22}$$

και οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου** (εδώ $\lambda_i = -1$, 3 και 3).

Ιδιοτιμές & Ιδιοδιανύσματα: Η μέθοδος των δυνάμεων

Σε ένα πίνακα $\mathbf{A}$ θα υπάρχει πάντοτε μια ιδιοτιμή λ_1 που θα είναι απολύτως μεγαλύτερη από τις άλλες ιδιοτιμές

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_N| \tag{23}$$

Επίσης, κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ θα μπορούσε να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των N ιδιοδιανυσμάτων $\left\{\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}, \ldots, \vec{u}^{(N)}\right\}$. Δηλαδή αν

$$\mathbf{A}\vec{u}^{(i)} = \lambda_i \vec{u}^{(i)} \qquad (1 \leq i \leq N) \tag{24}$$

τότε

$$\vec{x} = a_1 \vec{u}^{(1)} + a_2 \vec{u}^{(2)} + \cdots + a_N \vec{u}^{(N)} \tag{25}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (25) με τον πίνακα $\mathbf{A}$, λαμβάνουμε:

$$\vec{x}^{(1)} \equiv \mathbf{A}\vec{x} = a_1\lambda_1\vec{u}^{(1)} + a_2\lambda_2\vec{u}^{(2)} + \cdots + a_N\lambda_N\vec{u}^{(N)} \tag{26}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε k φορές την εξίσωση (26) με τον $\mathbf{A}$ τότε:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k)} &\equiv \mathbf{A}^k\mathbf{x} = a_1\lambda_1^k\mathbf{u}^{(1)} + a_2\lambda_2^k\mathbf{u}^{(2)} + \cdots + a_N\lambda_N^k\mathbf{u}^{(N)} \\ &= \lambda_1^k\left[a_1\mathbf{u}^{(1)} + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{u}^{(2)} + \cdots + a_N\left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{u}^{(N)}\right]\end{aligned} \tag{27}$$

Επειδή η λ_1 είναι η απολύτως μεγαλύτερη ιδιοτιμή, δες (23), θα ισχύει: $(\lambda_j/\lambda_1)^k \to 0$ για $k \to \infty$.
Επομένως

$$\vec{x}^{(k)} = \mathbf{A}^k \cdot \vec{x} \approx \lambda_1^k \cdot a_1 \cdot \vec{u}^{(1)} \tag{28}$$

και ο λόγος

$$\vec{r}^{(k)} \equiv \frac{\vec{x}^{(k+1)}}{\vec{x}^{(k)}} = \frac{\mathbf{A}^{k+1}\vec{x}}{\mathbf{A}^k\vec{x}} \approx \frac{\lambda_1^{k+1} a_1 \vec{u}^{(1)}}{\lambda_1^k a_1 \vec{u}^{(1)}} \to \lambda_1 \tag{29}$$

τείνει στην λ_1 ενώ το διάνυσμα $\vec{x}^{(k)}$ της εξίσωσης (28) είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Ιδιοτιμές & Ιδιοδιανύσματα: Παράδειγμα

Ο πίνακας $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

έχει ιδιοτιμές : $\lambda_1 = 3.41421356$, $\lambda_2 = 2$ & $\lambda_3 = 0.585786$

και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$\vec{u}^{(1)} = (0.3694,\ 1,\ 0.8918)^\top$, $\vec{u}^{(2)} = (0,\ 1,\ 0)^\top$ &

$\vec{u}^{(3)} = (0.7735,\ 1,\ -0.3204)^\top$.

Αν θεωρήσουμε ένα αρχικό διάνυσμα $\vec{x} = (1, 2, 1)^\top$, και το πολλαπλασιάσουμε με την 5η και 6η δύναμη του $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} 68 & 0 & 164 \\ 136 & 32 & 428 \\ 164 & 0 & 396 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^6 = \begin{pmatrix} 232 & 0 & 560 \\ 532 & 64 & 1484 \\ 560 & 0 & 1352 \end{pmatrix}$$

$\vec{x}^{(5)} = \mathbf{A}^5\vec{x} = (232, 628, 560)^\top$ & $\vec{x}^{(6)} = \mathbf{A}^6\vec{x} = (792, 2144, 1912)^\top$.

Που οδηγεί στην προσεεγιστική τιμή της ιδιοτιμής

$$\lambda_1 \approx \frac{x^{(6)}}{x^{(5)}} = \frac{792}{232} \approx \frac{2144}{628} \approx \frac{1912}{560} \approx 3.414286$$

και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος $\vec{u}^{(1)} \approx \vec{x}^{(6)} \approx (0.3694, 1, 0.8918)$.

Ιδιοτιμές & Ιδιοδιανύσματα : Επιτάχυνση Aitken

Το στοιχεία του διανύσματος $\vec{r}^{(k)}$ της (29) αποτελούν προσέγγιση της ακριβούς ιδιοτιμής λ_1 και το σφάλμα θα είναι: $\epsilon_k = |\tilde{r}_k - \lambda_1|$ όπου το $\tilde{r}_k$ είναι στοιχείο του $\vec{r}^{(k)}$.
Προφανώς για $\vec{r}^{(k+1)}$ λαμβάνουμε $\epsilon_{k+1} = |\tilde{r}_{k+1} - \lambda_1|$. Οπότε επειδή η σύγκλιση της μεθόδου είναι γραμμική:, δηλαδή

$$\epsilon_{k+1} = A\,\epsilon_k \tag{30}$$

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Aitken για να επιταχύνουμε τη σύγκλιση. Δηλαδή, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση που δημιουργήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο

$$\lambda_1 \approx \frac{\tilde{r}_k \tilde{r}_{k+2} - \tilde{r}_{k+1}^2}{\tilde{r}_{k+2} - 2\tilde{r}_{k+1} + \tilde{r}_k} \,. \tag{31}$$

για 3 προσεγγιστικές τιμές της ιδιοτιμής δηλαδή: $\tilde{r}_k$, $\tilde{r}_{k+1}$ ανδ $\tilde{r}_{k+2}$ για την εύρεση μιας ακριβέστερης τιμής.
Εφαρμογή: Αν χρησιμοποιήσουμε τις τιμές του παραδείγματος $\tilde{r}_5 = 3.414$, $\tilde{r}_4 = 3.413$ & $\tilde{r}_3 = 3.407$ τότε $\lambda_1 \approx 3.4142$.

Αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων

Θεώρημα: Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbf{A}$, τότε η λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του $\mathbf{A}^{-1}$.

Επομένως, αν $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{N-1}| > |\lambda_N| > 0$, είναι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$ τότε οι

$$\left|\lambda_N^{-1}\right| > \left|\lambda_{N-1}^{-1}\right| \geq \cdots \geq \left|\lambda_1^{-1}\right| > 0 \tag{32}$$

είναι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}^{-1}$. Αρα η λ_N^{-1} είναι η απολύτως μεγαλύτερη ιδιοτιμή του $\mathbf{A}^{-1}$.

Για την εύρεση της ιδιοτιμής αυτής αντι του υπολογισμού του $\mathbf{A}^{-1}$ για τον υπολογισμό ης εέκφρασης $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{(k+1)} \vec{x}$ με χρήση της μεθόδου Gauss επιλύουμε το σύστημα $\mathbf{A} \cdot \vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)}$, όπου το διάνυσμα $\vec{x}^{(k)}$ ορίζεται ως $\vec{x}^{(k)} = \mathbf{A}^k \vec{x}$.

Δηλαδή, για ένα αρχικό $\vec{x}^{(0)}$, αντί $\vec{x}^{(1)} = \mathbf{A}^{-1}\vec{x}^{(0)}$ γράφουμε $\mathbf{A}\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)}$. Επομένως, η λύση του γραμμικού συστήματος καθορίζει την τιμή του $\vec{x}^{(1)}$.

Γενικά θα βρίσκουμε την $\vec{x}^{(k+1)}$ μέσω της επαναλληπτικής διαδικασίας

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{A}^{-1}\vec{x}^{(k)} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}\vec{x}^{(k+1)} = x^{(k)} \tag{33}$$

Θεωρημα: Αν οι N μιγαδικοί αριθμοί λ_i όπου $(i = 1, \ldots, N)$ είναι ιδιοτιμές ενός $N \times N$ πίνακα $\vec{A}$. Τότε για κάθε μιγαδικό αριθμό μ ο πίνακας$\vec{A} - \mu\vec{I}$ (όπου$\vec{I}$ είναι ο μονδιαίος) θα έχει ως ιδιοτιμές τους μιγαδικούς αριθμούς $(\lambda_i - \mu)$ για $(i = 1, \ldots N)$.

Επομένως αν στο διάστημα (λ_N, λ_1) θεωρήσουμε ένα σημείο μ τέτοιο ώστε για την ιδιοτιμή λ_k να ισχύει $0 < |\lambda_k - \mu| < \epsilon$ ενώ για όλες τις άλλες θα είναι $|\lambda_i - \mu| > \epsilon$· τότε η $|\lambda_k - \mu|$ θα είναι η απολύτως μικρότερη ιδιοτιμή του $\vec{A} - \mu\vec{I}$.

Την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε με χρήση της *αντιστρόφου μεθόδου των δυνάμεων*

Υπενθυμίζουμε ότι θα πρέπει να υπολογίσουμε το $x^{(k+1)}$ λύνοντας το σύστημα:

$$\left(\vec{A} - \mu\vec{I}\right)\vec{x}^{(k+1)} = x^{(k)}$$

Οπότε αν υπολογίσουμε μια τιμή r_k, η αληθής ιδιοτιμή λ_i θα είναι:

$$\lambda_i = \frac{1}{r_k} + \mu\,. \tag{34}$$