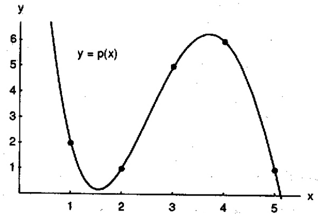
Παρεμβολή, Πρόβλεψη & Προσεγγίσεις

15 Απριλίου 2010

Εισαγωγή

Πολλές φορές γνωρίζουμε τις τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα σύνολο σημείων x_1, x_2, ..., x_N, αλλά αγνοούμε την μορφή της συνάρτησης.
Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση $f(x)$ ή την τιμή της για τυχαία x *ζωγραφίζοντας* μια καμπύλη που διέρχεται από τα γνωστά σημεία x_i.



Η διαδικασία υπολογισμού της τιμής της συνάρτησης $f(x)$ για τυχαία $x \in [x_1, x_N]$ καλείται παρεμβολή ενώ αν οι ζητούμενες τιμές είναι εκτός του διαστήματος, $x \notin [x_1, x_N]$, τότε λέγεται πρόβλεψη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η μορφή της συνάρτησης που θα εξάγουμε θα πρέπει να είναι σχετικά απλή ώστε να είναι εύχρηστη για μια σειρά πιθανών προβλημάτων.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνται ευρύτατα ενώ και προσεγγίσεις με ρητές και τριγωνομετρικές χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά.

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις παρακάτω περιπτώσεις πολυωνυμικών προσεγγίσεων:

- Πολυώνυμο Lagrange
- Πολυώνυμο Newton
- Πολυώνυμο Hermite
- Πολυώνυμο Taylor
- Κυβικές Splines

Τα πολυώνυμα αυτά ονομάζονται και συμπτωτικά.

Πολυώνυμο Lagrange

Ας θεωρήσουμε τιν ακόλουθο πίνακα στοιχείων:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	3.2	2.7	1.0	4.8
$f(x)$	22.0	17.8	14.2	38.3
	f_0	f_1	f_2	f_3

Από αυτά τα σημεία διέρχεται ένα 4ης τάξης συμπτωτικό πολυώνυμο π.χ. $ax^3 + bx^2 + cx + d = P(x)$.
Με βάση τις τιμές του πίνακα μπορούμε να σχηματίσουμε ένα σύστημα από 4 εξίσώσεις με 4 αγνώστους απο τις οποίες υπολογίζουμε του συντελεστές του συμπτωτικού πολυωνύμου $a = -0.5275$, $b = 6.4952$, $c = -16.117$ και $d = 24.3499$ δηλαδή:

$$P(x) = -0.5275x^3 + 6.4952x^2 - 16.117x + 24.3499$$

Είναι προφανές, ότι η διαδικασία είναι επίπονη και ο Lagrange ανέπτυξε ένα απ΄ ευθείας τρόπο εύρεσης του συμπτωτικού πολυωνύμου μέσω της σχέσης:

$$P_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + ... + f_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x) \qquad (1)$$

Οπου $L_i(x)$ είναι **οι πολυωνυμικοί συντελεστές Lagrange**

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})...(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)...(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})...(x_j - x_n)} \quad (2)$$

για τους οποίους θα ισχύει:

$$L_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad j \neq k \\ 1 & \text{αν} \quad j = k \end{cases}$$

όπου δ_{jk} είναι το σύμβολο Kronecker.

ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Οταν χρησιμοποιούμε το πολυώνυμο Lagrange για την προσέγγιση μια συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ το σφάλμα θα δίνεται απο τη σχέση :

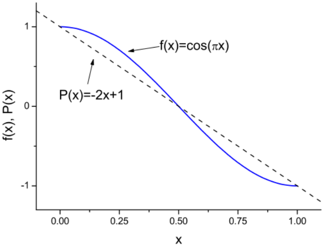
$$E(x) = (x - x_0)(x - x_1)....(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \text{όπου} \quad \xi \in [x_0, x_n] \quad (3)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η προσέγγιση με πολυώνυμο Lagrange μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ανισο- και ισο-απέχοντα σημεία. Προφανώς για ισαπέχοντα η μορφή του είναι απλούστερη.

Να βρεθεί το πολυώνυμο Lagrange που προσεγγίζει τη συνάρτηση $y = \cos(\pi x)$.
Δημιουργούμε τον πίνακα:

x_i	0	0.5	1
f_i	1	0.0	-1



Οι συντελεστές του πολυωνύμου Lagrange θα είναι:

$$
\begin{aligned}
L_1(x) &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0.5)(x-1)}{(0-0.5)(0-1)} = 2x^2-3x+1, \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)} = -4(x^2-x) \\
L_3(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)} = 2x^2-x
\end{aligned}
$$

οπότε τελικά

$$P(x) = 1\cdot(2x^2-3x+1) - 0.4\cdot(x^2-x) + (-1)\cdot(2x^2-x) = -2x+1$$

Ενώ το σφάλμα θα είναι:

$$E(x) = x \cdot (x - 0.5) \cdot (x - 1) \frac{\pi^3 \sin(\pi\xi)}{3!}$$

πχ. για $x = 0.25$ είναι $E(0.25) \leq 0.24$.

Newton-Gregory προς τα εμπρός

$$\begin{aligned} P_n(x_s) &= f_0 + s \cdot \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \cdot \Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \cdot \Delta^3 f_0 + \ldots \\ &= f_0 + \binom{s}{1} \cdot \Delta f_0 + \binom{s}{2} \cdot \Delta^2 f_0 + \binom{s}{3} \cdot \Delta^3 f_0 + \ldots \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{s}{i} \cdot \Delta^i f_0 \qquad (4) \end{aligned}$$

όπου $x_s = x_0 + s \cdot h$ και

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= f_{i+1} - f_i & (5) \\ \Delta^2 f_i &= f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i & (6) \\ \Delta^3 f_i &= f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i & (7) \\ \Delta^n f_i &= f_{i+n} - nf_{i+n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} f_{i+n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} f_{i+n-3} + \cdot & (8) \end{aligned}$$

Πολυώνυμο Newton

ΣΦΑΛΜΑ Το σφάλμα είναι ακριβώς το ίδιο όπως και για το πολυώνυμο Lagrange:

$$E(x) = (x - x_0)(x - x_1)....(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \text{όπου} \quad \xi \in [x_0, x_N] \qquad (9)$$

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
0.0	0.000					
		0.203				
0.2	0.203		0.017			
		0.220		0.024		
0.4	0.423		0.041		0.020	
		0.261		0.044		0.032
0.6	0.684		0.085		0.052	
		0.246		0.096		
0.8	1.030		0.181			
		0.527				
1.0	1.557					

Πίνακας: Παράδειγμα πίνακα διαφορών

Newton-Gregory προς τα πίσω

$$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1}\cdot\Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2}\cdot\Delta^2 f_{-2} + \ldots + \binom{s+n-1}{n}\cdot\Delta^n f_{-n} \qquad (10)$$

Παράδειγμα

x	$F(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
0.2	1.06894					
		0.11242				
0.5	1.18136		0.01183			
		0.12425		0.00123		
0.8	1.30561		0.01306		0.00015	
		0.13731		0.00138		0.000001
1.1	1.44292		0.01444		0.00014	
		0.15175		0.0152		
1.4	1.59467		0.01596			
		0.16771				
1.7	1.76238					

Newton-Gregory προς τα εμπρός για $x_0 = 0.5$:

$$P_3(x) = 1.18136 + 0.12425\,s + 0.01306 \binom{s}{2} + 0.00138 \binom{s}{3}$$
$$= 1.18136 + 0.12425\,s + 0.01306\,s\,(s-1)/2 + 0.00138\,s\,(s-1)\,(s-2)/6$$
$$= 0.9996 + 0.3354\,x + 0.052\,x^2 + 0.085\,x^3$$

Newton-Gregory προς τα πίσω για $x_0 = 1.1$:

$$P_3(x) = 1.44292 + 0.13731\,s + 0.01306 \binom{s+1}{2} + 0.00123 \binom{s+2}{3}$$
$$= 1.44292 + 0.13731\,s + 0.01306\,s\,(s+1)/2 + 0.00123\,s\,(s+1)\,(s+2)/6$$
$$= 0.99996 + 0.33374\,x + 0.05433\,x^2 + 0.007593\,x^3$$

Πολυώνυμο Hermite

Χρησιμοποιείται όταν δεν έχουμε μόνο πληροφοριές για τη συνάρτηση $f(x)$ αλλά και για την παράγωγο $f'(x)$

$$P_{2n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) f_i + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) f_i' \tag{11}$$

όπου

$$A_i(x) = [1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)] \cdot [L_i(x)]^2 \tag{12}$$

$$B_i(x) = (x - x_i) \cdot [L_i(x)]^2 \tag{13}$$

ενώ $L_i(x)$ είναι οι συντελεστές Lagrange.

ΣΦΑΛΜΑ: η ακρίβεια της μεθόδου υπολογίζεται απο σχέση που είναι ανάλογη με αυτή του πολυωνύμου Lagrange τάξης $2n$!

$$y(x) - p(x) = \frac{y^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} [(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)]^2 \tag{14}$$

Πολυώνυμο Hermite: Παράδειγμα

Βρείτε το πολυώνυμο Hermite για τα δεδομένα του πίνακα:

k	x_k	y_k	y'_k
0	0	0	0
1	4	2	0

Οι συντελεστές Lagrange είναι:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-4}{0-4} = -\frac{x-4}{4} \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x}{4}$$

$$L'_0(x) = \frac{1}{x_0 - x_1} = -\frac{1}{4} \qquad L'_1(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} = \frac{1}{4}$$

Οπότε

$$A_0(x) = \left[1 - 2 \cdot L'_0(x - x_0)\right] \cdot L_0^2 = \left[1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)(x-0)\right] \cdot \left(\frac{x-4}{4}\right)^2$$

$$A_1(x) = \left[1 - 2 \cdot L'_0(x - x_1)\right] \cdot L_1^2 = \left[1 - 2 \cdot \frac{1}{4}(x-4)\right] \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \left(3 - \frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2$$

$$B_0(x) = (x-0) \cdot \left(\frac{x-4}{4}\right)^2 = x\left(\frac{x-4}{4}\right)^2 \qquad B_1(x) = (x-4) \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2$$

Αρα το πολυώνυμο Hermite θα είναι:

$$P(x) = (6-x)\frac{x^2}{16}.$$

Πολυώνυμο Taylor

Στις προηγούμενες περιπτώσεις υπολογίσαμε $P(x)$ ένα πολυώνυμο που πέρνει τις ίδιες τιμές με μια συνάρτηση $f(x)$ σε N σημεία (Lagrange) ή ένα πολυώνυμο που ταυτίζεται με τη συνάρτηση και την παράγωγο της σε N σημεία (Hermite).
Το πολυώνυμο Taylor παίρνει την ίδια τιμή με μια συνάρτηση σε κάποιο σημείο x_0 αλλά ταυτίζεται και με τις N πρώτες παραγώγους της συνάρτησης, δηλαδή:

$$P^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) \quad \text{ανδ} \quad i = 0, 1, ..., n$$

Το πολυώνυμο Taylor το γνωρίζουμε απο τη Μαθηματική Ανάλυση και είναι

$$P(x) = \sum_{i=0}^{N} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}(x - x_0)^i \tag{15}$$

ΣΦΑΛΜΑ: αν ανατρέξουμε στη Μαθηματική Ανάλυση θα βρούμε ότι:

$$E_N(x) = (x - x_0)^{N+1} \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \tag{16}$$

Πολυώνυμο Taylor: Παράδειγμα

Θα δείξουμε ότι για τον υπολογισμό του $e = 2.718281828459...$ με 13-ψηφία απαιτούνται 15 όροι του αναπτύγματος Taylor.
Ολοι οι παράγωγοι της $y(x) = e^x$ στο σημείο $x = 0$ θα είναι:

$$y_0 = y_0^{(1)} = y_0^{(2)} = ... = y_0^{(n)} = 1$$

επομένως

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{1}{n!} x^n$$

και το σφάλμα θα είναι:splines

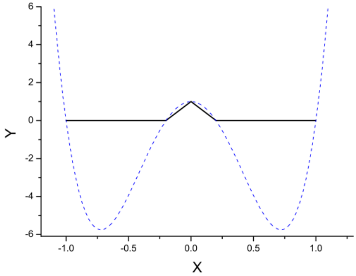
$$|E_n| = x^{n+1} \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} = \frac{e^{\xi}}{16!} < \frac{3}{16!} = 1.433 \times 10^{-13}$$

Παρεμβολή με Κυβική Splines

Σε πολλές περιπτώσεις ένα τυπικό πολυώνυμο δεν μπορεί να προσεγγίσει ικανοποιητικά ένα δεδομένο σύνολο σημείων. Για παράδειγμα, η συνάρτηση:

$$f(x) = \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \leq x \leq -0.2 \\ 1 - 5|x| & -0.2 < x < 0.2 \\ 0 & 0.2 \leq x \leq 1.0 \end{array} \right.$$

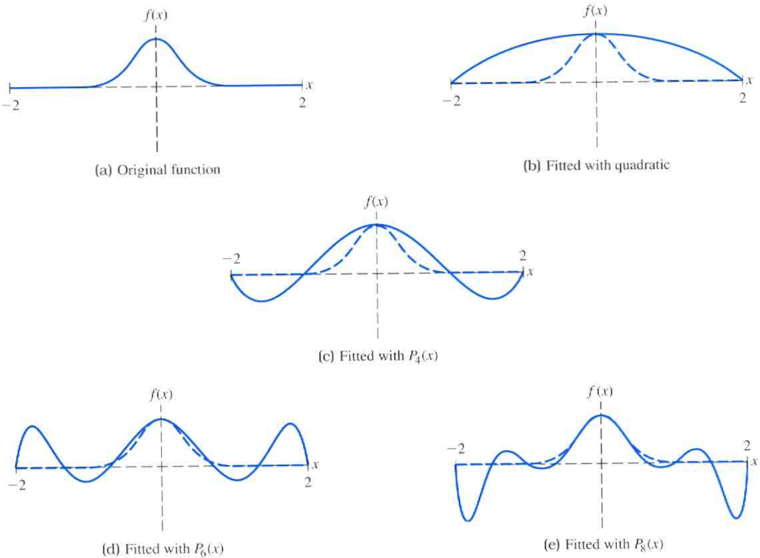
δεν μπορεί να προσεγγισθεί με ικανοποιητικό τρόπο απο οποιουδήποτε βαθμού πολυώνυμο !



$$P(x) = 1 - 26x^2 + 25x^4$$

Τέτοιου είδους περιπτώσεις αντιμετωπίζονται με τη χρήση των splines. Οταν για παράδειγμα, χρησιμοποιήσουμε κυβική splines τότε από κάθε ζεύγος σημείων φροντίζουμε να διέρχεται ένα 3-βάθμιο πολυώνυμο το οποίο στα σημεία αυτά ταυτίζεται με τα 'διπλανά' 3-βαθμια πολυώνυμα και όχι μόνο. Απαιτούμε να ταυτίζονται και οι **πρώτες** και **δεύτερες** παράγωγοι τους.

Παρεμβολή με Κυβική Splines



Παρεμβολή με Κυβική Splines

Εστω το κυβικό πολυώνυμο στο i διάστημα, που βρίσκεται μεταξύ των σημείων (x_i, y_i) και (x_{i+1}, y_{i+1}) έχει τη μορφή:

$$y(x) = a_i \cdot (x - x_i)^3 + b_i \cdot (x - x_i)^2 + c_i \cdot (x - x_i) + d_i$$

Επομένως στα άκρα του διαστήματος θα ισχύει:

$$y_i = a_i \cdot (x_i - x_i)^3 + b_i \cdot (x_i - x_i)^2 + c_i \cdot (x_i - x_i) + d_i = d_i$$

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= a_i \cdot (x_{i+1} - x_i)^3 + b_i \cdot (x_{i+1} - x_i)^2 + c_i \cdot (x_{i+1} - x_i) + d_i \\ &= a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i \end{aligned}$$

όπου $h_i = x_{i+1} - x_i$. Θα χρειαστουμε και την 1η και 2η παράγωγο στα άκρα του διαστήματος που συνδέουν την κλίση και την καμοπυλότητα των δύο πολυωνύμων. Με διαφόριση πέρνουμε

$$\begin{aligned} y'(x) &= 3a_i \cdot (x - x_i)^2 + 2b_i \cdot (x - x_i) + c_i \\ y''(x) &= 6a_i \cdot (x - x_i) + 2b_i \end{aligned}$$

Η διαδικασία απλοποιείται αν γράψουμε τις εξισώσεις σαν συνάρτηση των 2ων παραγώγων των συμπτωτικών πολυωνύμων Αν ονομάσουμε S_i τη 2η παράγωγο στο σημείο (x_i, y_i) τότε εύκολα πέρνουμε:

$$b_i = \frac{S_i}{2}, \quad a_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i} \tag{17}$$

που σημαίνει ότι

$$y_{i+1} = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i} h_i^3 + \frac{S_i}{2} h_i^2 + c_i h_i + y_i$$

και τελικά

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} \tag{18}$$

Στη συνέχεια θέτουμε τη συνθήκη ότι οι κλίσεις των κυβικών πολυωνύμων στο (x_i, y_i) ταυτίζονται:

$$\begin{aligned} y_i' &= 3a_i \cdot (x_i - x_i)^2 + 2b_i \cdot (x_i - x_i) + c_i = c_i \\ y_i' &= 3a_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} \\ &= 3a_{i-1} h_{i-1}^2 + 2b_{i-1} h_{i-1} + c_{i-1} \end{aligned}$$

AN τις εξισώσουμε και αντικαταστήσουμε τα a, b, c και d ως γετ:

$$\begin{aligned} y_i' &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} \\ &= 3\left(\frac{S_i - S_{i-1}}{6h_{i-1}}\right) h_{i-1}^2 + 2\frac{S_{i-1}}{2} h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2h_{i-1}S_{i-1} + h_{i-1}S_i}{6} \end{aligned}$$

και τελικά τα απλοποιήσουμε, λαμβάνουμε:

$$h_{i-1}S_{i-1} + 2\left(h_{i-1} + h_i\right)S_i + h_i S_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \quad (19)$$

Αν θεωρήσουμε $n+1$ σημεία η παραπάνω σχέση θα εφαρμοσθεί σε $n-1$ εσωτερικά σημεία. Επομένως δημιουργούμε τις $n-1$ γραμμικές εξισώσεις για τους $n+1$ αγνώστους S_i. Αυτό το σύστημα επιλύεται αν ¨δόσουμε' τις τιμές του S_0 και S_n.

Το σύστημα των $n-1$ εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους θα γραφεί ως:

$$\begin{pmatrix} & & & \cdots\cdots & & & \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & & \\ & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ & & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{n-2} \\ S_{n-1} \\ S_n \end{pmatrix}$$

$$= 6 \begin{pmatrix} \cdots \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \cdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ \cdots \end{pmatrix} \equiv \vec{Y}$$

Απο τη λύση αυτού του γραμμικού συστήματος πέρνουμε τους συντελεστές a_i, b_i, c_i και d_i μέσω των σχέσεων:

$$a_i = \frac{S_{i+1}-S_i}{6h_i}, \quad b_i = \frac{S_i}{2} \tag{20}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{2h_iS_i + h_iS_{i+1}}{6} \tag{21}$$

$$d_i = y_i \tag{22}$$

- **Επιλογή I** θεωρούμε, $S_0 = 0$ και $S_n = 0$ αυτό οδηγεί στη λύση του παρακάτω συστήματος:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & .... & & \\ & & h_{n-2} & & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \\ S_{n-1} \end{pmatrix} = \vec{Y}$$

- **Επιλογή II** θεωρούμε, $S_0 = S_1$ και $S_n = S_{n-1}$ αυτό οδηγεί στη λύση του παρακάτω συστήματος:

$$\begin{pmatrix} 3h_0+2h_1 & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & \cdots & \cdots & \\ & & & h_{n-2} & 2h_{n-2}+3h_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \\ S_{n-1} \end{pmatrix} = \vec{Y}$$

- **ΕΠΙΛΟΓΗ III** Χρησιμοποιούμε την γραμμική παρεμβολή

$$\frac{S_1 - S_0}{h_0} = \frac{S_2 - S_1}{h_1} \Rightarrow S_0 = \frac{(h_0 + h_1)S_1 - h_0 S_2}{h_1}$$

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{h_{n-1}} = \frac{S_{n-1} - S_{n-2}}{h_{n-2}} \Rightarrow s_n = \frac{(h_{n-2} + h_{n-1})S_{n-1} - h_{n-1}S_{n-2}}{h_{n-2}}$$

αυτό οδηγεί στη λύση του παρακάτω συστήματος:

$$\left(\begin{array}{llll} \frac{(h_0+h_1)(h_0+2h_1)}{h_1} & \frac{h_1^2-h_0^2}{h_1} & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 \\ & & .... & .... \\ & & \frac{h_{n-2}^2-h_{n-1}^2}{h_{n-2}} & \frac{(h_{n-1}+h_{n-2})(h_{n-1}+2h_{n-2})}{h_{n-2}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \\ S_{n-1} \end{array}\right) = \vec{Y}$$

• **ΕΠΙΛΟΓΗ IV** Απαιτούμε οι κλίσεις στα άκρα του διστήματος να πάρουν συγκεκριμένες τιμές: Αν $f'(x_0) = A$ και $f'(x_n) = B$ οπότε

$$
\begin{aligned}
2h_0 S_0 + h_1 S_1 &= 6\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - A\right) \\
h_{n-1} S_{n-1} + 2h_n S_n &= 6\left(B - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix}
2h_0 & h_1 & & & \\
h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & \\
 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \\
 & & \ldots. & & \\
 & & & h_{n-2} & 2h_{n-1}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \\ S_{n-1}
\end{pmatrix}
= \vec{Y}
$$

Παρεμβολή με Κυβική Splines : Παράδειγμα

Εφάρμοσε την παρεμβολή με κυβική Splines για τα παρακάτω δεδομένα ($y = x^3 - 8$):

x	0	1	2	3	4
y	-8	-7	0	19	56

Ανάλογα με τις συνθήκες στα άκρα πέρνουμε τις παρακάτω λύσεις:

- **ΣΥΝΘΗΚΗ I** : $S_0 = 0,\ S_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{S}_1 \\ \mathrm{S}_2 \\ \mathrm{S}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 72 \\ 108 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} S_1 = 6.4285 \\ S_2 = 10.2857 \\ S_3 = 24.4285 \end{array}$$

- **ΣΥΝΘΗΚΗ II** : $S_0 = S_1,\ S_4 = S_3$

$$\begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{S}_1 \\ \mathrm{S}_2 \\ \mathrm{S}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 72 \\ 108 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} S_1 = S_0 = 4.8 \\ S_2 = 1.2 \\ S_3 = 19.2 = S_4 \end{array}$$

- **ΣΥΝΘΗΚΗ III** :

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{S}_1 \\ \mathrm{S}_2 \\ \mathrm{S}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 72 \\ 108 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} S_0 = 0 \;\; S_1 = 6 \\ S_2 = 12 \;\; S_3 = 18 \\ S_4 = 24 \end{array}$$

- **ΣΥΝΘΗΚΗ IV** :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 36 \\ 72 \\ 108 \\ 66 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} S_0 = 0 \\ S_1 = 6 \\ S_2 = 12 \\ S_3 = 18 \\ S_4 = 24 \end{array}$$

1. Τα παρακάτω δεδομένα είναι απο αστρονομικές παρατηρήσεις και αντιπροσωπεύουν τις μεταβολές του φαινόμενου μεγέθους ενός τύπου μεταβλητών αστέρων, των Cepheids

Χρόνος	0.0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0
Φαινόμενο μέγεθος	0.302	0.185	0.106	0.093	0.24	0.579	0.561	0.468	0.302

Χρησιμοποιείστε Splines για να δημιουργήσετε ένα νέο πίνακα για το φαινόμενο μέγεθος σε χρονικά διαστήματα 0.05.

1. Απο τον παρακάτω πίνακα υπολογίστε την ακριβή επιτάχυνση της βαρύτητας στη Θες/νίκη (40^o). Επίσης πόσο μεταβάλεται μεταξύ δύο σημείων με διαφορά στο γεωγραφικό μήκος κατά 4 μοίρες πχ Αθήνα-Θες/νίκη.

Γεωγ. Μήκος	Μήκος 1΄ της μοίρας στον ίδιο παράλληλο	Τοπική επιτάχυνση της βαρύτητας g
0^0	1855.4 μ	9.7805 μ/σες^2
15^0	1792.0 μ	9.7839 μ/σες^2
30^0	1608.2 μ	9.7934 μ/σες^2
45^0	1314.2 μ	9.8063 μ/σες^2
60^0	930.0 μ	9.8192 μ/σες^2
75^0	481.7 μ	9.8287 μ/σες^2
90^0	0.0 μ	9.8322 μ/σες^2

Προσέγγιση με Ρητές Συναρτήσεις

Θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε σύνολα σημείων ή συναρτήσεις με ρητές και όχι με πολυώνυμα.
Ειδικά θα ασχοληθούμε με την περίπτωση της προσέγγισης **Padé**.
Η ρητή προσέγγιση της $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$, είναι ο λόγος δύο πολυωνύμων $P_n(x)$ και $Q_m(x)$ βαθμού n και m [1]

$$f(x) = R_N(x) \equiv \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}, \quad N = n + m$$

δηλαδή υπάρχουν $N + 1 = n + m + 1$ σταθερές που πρέπει να υπολογισθούν.
Η μέθος Padé απαιτεί η $f(x)$ και οι παράγωγοι της να είναι συνεχείς στο $x = 0$.
Αυτή η επιλογή διευκολύνει τους χειρισμούς μας και αν χρειαστεί μπορούμε να κάνουμε αλλαγή της μεταβλητής και κατα συνέπεια του διαστήματος ώστε να περιέχει το μηδέν.

[1] Μερικές φορές γράφουμε $R_N(x) \equiv R_{n,m}(x)$.

Προσέγγιση Padé

Θεωρούμε το ανάπτυγμα Maclaurin της $f(x)$ (ως όρους τάξης x^N), τότε :

$$f(x) \approx c_0 + c_1 x + \ldots + c_N x^N$$

όπου $c_i = f^{(i)}(0)/(i!)$.
Στη συνέχεια δημιουργούμε τις διαφορές

$$\begin{aligned} f(x) - R_N(x) &\approx \left(c_0 + c_1 x + \ldots + c_N x^N\right) - \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{1 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} \\ &= \frac{\left(c_0 + c_1 x + \ldots + c_N x^N\right)(1 + b_1 x + \ldots + b_m x^m) - (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)}{1 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} \end{aligned}$$

Αν $f(0) = R_N(0)$ τότε $c_0 - a_0 = 0$.
Με τον ίδιο τρόπο, για να είναι οι N παράγωγοι της $f(x)$ και $R_N(x)$ ίσες στο $x = 0$ οι συντελεστές των δυνάμεων του x εως και x^N στον αριθμητή θα πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν.

Μ' αυτό τον τρόπο δημιουργούμε N εξισώσεις για τα a και b

$$
\begin{aligned}
b_1c_0 + c_1 - a_1 &= 0 \\
b_2c_0 + b_1c_1 + c_2 - a_2 &= 0 \\
b_3c_0 + b_2c_1 + b_1c_2 + c_3 - a_3 &= 0 \\
&\vdots \\
b_mc_{n-m} + b_{m-1}c_{n-m+1} + \ldots + c_n - a_n &= 0 \\
b_mc_{n-m+1} + b_{m-1}c_{n-m+2} + \ldots + c_{n+1} &= 0 \\
b_mc_{n-m+2} + b_{m-1}c_{n-m+3} + \ldots + c_{n+2} &= 0 \\
&\vdots \\
b_mc_{N-m} + b_{m-1}c_{N-m+1} + \ldots + c_N &= 0
\end{aligned} \tag{23}
$$

Παρατηρήστε ότι κάθε μια από τις παραπάνω εξισώσεις τό άθροισμα των δεικτών του κάθε γινομένου, είναι ίσο με τη δύναμη του αντίστοιχου όρου στον αριθμητή.

Προσέγγιση Padé : ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η $R_9(x)$ ή $R_{5,4}(x)$ προσέγγιση Padé της συνάρτησης $\tan^{-1}(x)$ υπολογίζουμε την σειρά Maclaurin :

$$\tan^{-1}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

και στη συνέχεια γράφουμε

$$f(x) - R_9(x) = \frac{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9\right)\left(1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4\right) - \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_5x^5\right)}{1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4}$$

οπότε οι συντελεστές της ρητής συνάρτησης θα υπολογισθούν απο τη λύση του συστήματος:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = b_1, \quad a_3 = -\frac{1}{3} + b_2, \quad a_4 = -\frac{1}{3}b_1 + b_3, \quad a_5 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}b_2 + b_4$$

$$\frac{1}{5}b_1 - \frac{1}{2}b_3 = 0, \quad -\frac{1}{7} + \frac{1}{5}b_2 - \frac{1}{3}b_4 = 0, \quad -\frac{1}{7}b_1 + \frac{1}{5}b_3 = 0, \quad \frac{1}{9} - \frac{1}{7}b_2 + \frac{1}{5}b_4 = 0 \qquad (24)$$

απο το οποίο λαμβάνουμε:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \tfrac{7}{9}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \tfrac{64}{945}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \tfrac{10}{9}, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = \tfrac{5}{21}.$$

$$\tan^{-1}x \approx R_9(x) = \frac{x + \frac{7}{9}x^3 + \frac{64}{945}x^5}{1 + \frac{10}{9}x^2 + \frac{5}{21}x^4}$$

Οπότε για $x = 1$, η ακριβής τιμή είναι 0.7854, η Padé $R_9(1) = 0.78558$ ενώ αυτή που υπολογίζουμε απο το ανάπτυγμα Maclaurin 0.8349!

Αν αντί της αναλυτικής μορφής της $f(x)$ δοθεί ένα σύνολο k σημείων $(x_i, f(x_i))$, τότε πρέπει να βρούμε μια ρητής συνάρτηση $R_N(x)$ τέτοια ώστε για κάθε x_i να ισχύει $f(x_i) = R_N(x_i)$ δηλαδή

$$R_N(x_i) = \frac{a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n}{1 + b_1 x_i + b_2 x_i^2 + \ldots + b_m x_i^m} = f(x_i)$$

Θα ακολουθήσουμε τη διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε για την εύρεση του συμπτωτικού πολυωνύμου. Δηλαδή θα βρούμε τη λύση του πακάτω συστήματος από $k \geq m + n + 1$ εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n - (f_1 x_1)\ b_1 - \ldots - (f_1 x_1^m)\ b_m = f_1 \\
&:: \\
&a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i^n - (f_i x_i)\ b_1 - \ldots - (f_i x_i^m)\ b_m = f_i \\
&:: \\
&a_0 + a_1 x_k + \ldots + a_n x_k^n - (f_k x_k)\ b_1 - \ldots - (f_k x_k^m)\ b_m = f_k
\end{aligned}$$

δηλ. πέρνουμε k εξισώσεις για k αγνώστους $a_{0,} a_1, \ldots, a_n$ και $b_1, b_2, \ldots, b_m$.

Ρητή Προσέγγιση ομάδας σημείων: Παράδειγμα

Θα βρούμε τη ρητή συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία: (-1,1), (0,2) και (1,-1).

Είναι προφανές ότι το άθροισμα των συντελεστών στον αριθμητή και παρανομαστή θα είναι $(n+m+1 \leq 3)$. Επομένως γράφουμε:

$$R_{1,1}(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x}$$

που οδηγεί στο παρακάτω σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + (-1)\ a_1 - (-1)\ b_1 = 1 \\ a_0 + 0 \cdot a_1 - 0 \cdot b_1 = 2 \\ a_0 + 1 \cdot a_1 - (-1)\ b_1 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_0 = 2 \\ a_1 = -1 \\ b_1 = -2 \end{array}$$

και η ρητή συνάρτηση θα είναι:

$$R_{1,1}(x) = \frac{2-x}{1-2x}.$$

Εναλλακτικά, μπρούμε να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη συνάρτηση :

$$R_{0,1}(x) = \frac{a_0}{1 + b_1 x + b_2 x} \Rightarrow R(x) = \frac{2}{1 - 2x - x^2}$$

Προσέγγιση με Ρητές Συναρτήσεις: Προβλήματα

1. Βρείτε την Padé προσέγγιση $R_{3,3}(x)$ για τη συνάρτηση $y = e^x$. Συγκρίνετα με τη σειρά Maclaurin για $x = 1$.
2. Βρείτε την Padé προσέγγιση $R_{3,5}(x)$ για τη συνάρτηση $y = \cos(x)$ και $y = \sin(x)$. Συγκρίνετα με τη σειρά Maclaurin για $x = 1$.
3. Βρείτε την Padé προσέγγιση $R_{4,6}(x)$ για τη συνάρτηση $y = 1/x \sin(x)$. Συγκρίνετα με τη σειρά Maclaurin για $x = 1$.
4. Βρείτε τη ρητή συνάρτηση που διέρχεται από τα παρακάτω σημεία:

0	1	2	4
0.83	1.06	1.25	4.15