Αριθμητική Παραγώγιση Συναρτήσεων

22 Απριλίου 2010

Προσεγγίζοντας την παράγωγο

Ο απλούστερος τρόπος για την εύρεση της αριθμητικής τιμής της παραγώγου μιας συνάρτησης $y(x)$ *ή ενός συνόλου διακριτών τιμών* (x_i, y_i) *είναι με χρήση του συμπτωτικού πολυωνύμου Newton ή Lagrange.*

Έτσι αν θεωρήσουμε το συμπτωτικό πολυώνυμο Newton :

$$y(x) \to P(x) = y_0 + s\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

και το παραγωγίσουμε, λαμβάνουμε :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dx} = \frac{1}{s}\frac{dP(s)}{ds} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2s-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3s^2-6s+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots\right]$$

όπου $x = x_0 + sh$.
Οπότε για την παράγωγο στο x_0 θέτουμε $s = 0$ ή για την παράγωγο στο x_1 θέτουμε $s = 1$ κοκ. Για παράδειγμα:

$$y_0' = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \cdots\right] \tag{1}$$

Προσεγίζοντας την παράγωγο

Ανάλογα με τον αριθμό των όρων του συμπτωτικού πολυωνύμου, λαμβάνουμε:

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h) \tag{2}$$

$$y_0' = -\frac{3y_0 - 4y_1 + y_2}{2h} + O(h^2) \tag{3}$$

$$y_0' = -\frac{11y_0 - 18y_1 + 9y_2 - 2y_3}{6h} + O(h^3) \tag{4}$$

Με παρόμοιο τρόπο λαμβάνουμε τη σχέση για τη 2η παράγωγο $y(x)$ στο x_0:

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\frac{d^2P(s)}{ds^2} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (s-1)\Delta^3 y_0 + \cdots\right] \tag{5}$$

οπότε:

$$y_0'' = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} + O(h) \tag{6}$$

$$y_0'' = \frac{2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3}{h^2} + O(h^2) \tag{7}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΤΕ ΤΙΣ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΣΧΕΣΕΙΣ

Προσεγίζοντας την παράγωγο : Σφάλμα

Το σφάλμα της προσέγγισης μπορεί να υπολογισθεί με χρήση του τύπου σφάλματος του συμπτωτικού πολυωνύμου :

$$E(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)\frac{y^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \tag{8}$$

Το σφάλμα στον αριθμητικό υπολογισμό της παραγώγου σ'ενα σημείο, π.χ. x_0, θα βρεθεί παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση

$$E'(x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_n)\frac{y^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \tag{9}$$

Αν μάλιστα υποθέσουμε ότι τα σημεία ισαπέχουν, δηλ. $h = x_{i+1} - x_i$, λαμβάνουμε:

$$E'(x_0) = -h(-2h)...(-nh)\frac{y^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} = (-1)^n h^n \frac{y^{n+1}(\xi)}{n+1}. \tag{10}$$

Επομένως τος σφάλμα στην (2) θα είναι $O(h)$, στην (3) θα είναι $O(h^2)$ και στην (4) θα είναι $O(h^3)$.

Προσεγίζοντας την παράγωγο : Σφάλμα

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε το σφάλμα για την 2η παράγωγο που θα είναι $O(h^{(n-1)})$ **(ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΧΘΕΙ)** .
Έτσι για τη σχέση (6) θα είναι $O(h)$ ενώ για τη σχέση (7) βρίσκουμε $O(h^2)$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συμπτωτικό πολυώνυμο 'Newton προς τα πίσω' για την εξαγωγή ανάλογων σχέσεων.

Προσεγίζοντας την παράγωγο : Παράδειγμα

Θα υπολογίσουμε τη 2η παράγωγο στο $x = x_1$ χρησιμοποιώντας τις τιμές y_0, y_1, y_2 και y_3.

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα 3ης τάξης πολυώνυμο Lagrange και για απλότητα, στο τέλος, θα υποθέσουμε ότι τα σημεία $x_0, x_1, x_2, \ldots$ είναι ισαπέχοντα:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3 \end{aligned} \tag{11}$$

Οπότε η 2η παράγωγος θα είναι:

$$\begin{aligned} P''(x) &= \frac{2y_0}{-6h^3}\left[(x-x_1)+(x-x_2)+(x-x_3)\right] + \frac{2y_1}{2h^3}\left[(x-x_0)+(x-x_2)+(x-x_3)\right] \\ &+ \frac{2y_2}{-2h^3}\left[(x-x_0)+(x-x_1)+(x-x_3)\right] + \frac{2y_0}{6h^3}\left[(x-x_0)+(x-x_1)+(x-x_2)\right] \end{aligned} \tag{12}$$

και θέτωντας $x = x_1$ λαμβάνουμε

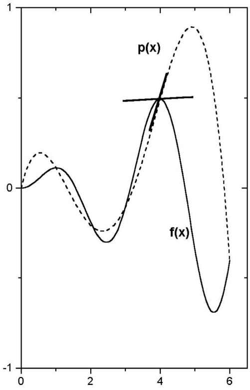
$$P''(x) = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \tag{13}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ο όρος y_3, αν και έχει χρησιμοποιηθεί, απουσιάζει από την τελική σχέση, η οποία παρουσιάζει σφάλμα της τάξης $O(h^2)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι αν και το συμπτωτικό πολυώνυμο αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση κάποιας συνάρτησης, η παράγωγος του δεν προσεγγίζει με την ίδια επιτυχία την παράγωγο της συνάρτησης.

Το παρακάτω σχήμα αναδεικνύει το πρόβλημα :



Κεντρικές Διαφορές

Αν υπάρχουν οι τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$ δεξιά και αριστερά ενός σημείου x_i τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε σχέσεις για τον αριθμητικό υπολογισμό των παραγώγων με τη χρήση **ΚΕΝΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ**

$$y(x_0)' = y_0' = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + O(h^2) \tag{14}$$

$$y(x_0)' = y_0' = \frac{-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}}{12h} + O(h^4) \tag{15}$$

$$y(x_0)'' = y_0' = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + O(h^2) \tag{16}$$

$$y(x_0)'' = y_0'' = \frac{-y_2 + 16y_1 - 30y_0 + 16y_{-1} - y_{-2}}{12h^2} + O(h^4) \tag{17}$$

$$y(x_0)''' = y_0''' = \frac{y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}}{2h^3} + O(h^2) \tag{18}$$

$$y(x_0)^{(4)} = y_0^{(4)} = \frac{y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2}}{h^4} + O(h^2) \tag{19}$$

Αυτές οι σχέσεις δημιουργούνται με κατάλληλη χρήση του αναπτύγματος Taylor στην περιοχή ενός σημείου.

Ας θεωρήσουμε το ανάπτυγμα Taylor και στις δύο πλευρές ενός σημείου x_0 δηλ.

$$
\begin{aligned}
y(x_0+h) \equiv y_1 &= y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' + \frac{h^3}{6}y_0''' + \frac{h^4}{24}y_0^{(4)} + \dots && (20)\\
y(x_0-h) \equiv y_{-1} &= y_0 - hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' - \frac{h^3}{6}y_0''' + \frac{h^4}{24}y_0^{(4)} - \dots && (21)\\
y(x_0+2h) \equiv y_2 &= y_0 + 2hy_0' + 2h^2y_0'' + \frac{4}{3}h^3y_0''' + \frac{2}{3}h^4y_0^{(4)} + \dots && (22)\\
y(x_0-2h) \equiv y_{-2} &= y_0 - 2hy_0' + 2h^2y_0'' - \frac{4}{3}h^3y_0''' + \frac{2}{3}h^4y_0^{(4)} - \dots && (23)
\end{aligned}
$$

Οπότε με κατάλληλο συνδυασμό των παραπάνω σχέσεων δημιουργούμε τις σχέσεις της προηγούμενης σελίδας. Για παράδειγμα αφαιρώντας την (21) από την (20) λαμβάνουμε την εξίσωση (14). Ενώ προσθέτωντας τις ίδιες σχέσεις λαμβάνουμε την (16) που είχε αποδειχθεί προηγουμένως με τη χρήση των πολυωνύμων Lagrange. Παρόμοια, πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (20) και (21) με 8 και χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις (22) και (23) μπορούμε να πάρουμε μια σχέση της μορφής

$$y_{-2} - y_2 + 8\left(y_1 - y_{-1}\right)$$

που οδηγεί στην (15) με σφάλμα $\sim O(h^4)$.