Προβλήματα Οριακών & Χαρακτηριστικών Τιμών

21 Μαΐου 2010

Εισαγωγή

• Μια ΔΕ 2ης τάξης πρέπει να έχει 2 συνθήκες για να είναι δυνατή η επίλυση της. Συνήθως αυτές οι δύο συνθήκες δίνονται στο αρχικό σημείο (**προβήματα αρχικών τιμών**) και για την αριθμητική τους επίλυση ακολουθούμε τις μεθόδους του προηγούμενου κεφαλαίου.
• Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις στις οποίες οι συνθήκες δίνονται σε διαφορετικά σημεία συνήθως στα άκρα του υπό μελέτη διαστήματος (**προβήματα οριακών τιμών**).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί αριθμητικά το πρόβλημα :

$$u'' - \left(1 - \frac{x}{5}\right) u = x, \quad u(1) = 2, \quad u(3) = -1 \tag{1}$$

Μπορόυμε να ολοκληρώσουμε την παραπάνω ΔΕ (πχ με χρήση Runge-Kutta) θέτοντας

• $u(1) = 2$ και $u'(1) = -1.5 \quad \rightarrow \quad u(3) = 4.7876$ και $u'(3) = 5.1119$

Αν δοκιμάσουμε ξανά

• $u(1) = 2$ και $u'(1) = -3.0 \quad \rightarrow \quad u(3) = 0.4360$ και $u'(1) = 1.6773$

Τελικά, αν θέσουμε:

• $u(1) = 2$ και $u'(1) = -3.495 \quad \rightarrow \quad u(3) = -1.0$ και $u'(1) = 0.5439$

Μέθοδος Βολής (Shooting)

Η επιτυχής επιλογή της 3ης αρχικής τιμής δεν ήταν τυχαία.
Η ΔΕ είναι **γραμμική** και για τέτοιυ είδους ΔΕ η απλή γραμμική παρεμβολή απο τις τιμές των δύο αρχικών αποτελεσμάτων δίνει πάντα τη σωστή λύση.
Αν
G=πρόβλεψη,
R=αποτέλεσμα, και
DR= επιθυμητό αποτέλεσμα, τότε:

$$G_3 = G_2 + (DR - R_2)\,\frac{G_1 - G_2}{R_1 - R_2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν πρέπει να λύσουμε μια **μη-γραμμική** ΔΕ

$$u'' - \left(1 - \frac{x}{5}\right) u u' = x, \quad u(1) = 2, \quad u(3) = -1$$

δεν θα συγκλίνουμε στο αποτέλεσμα μετά από 2 επαναλήψεις, αντίθετα η συγκλιση μπορεί να είναι αργή.
Για παράδειγμα:

$u'(1)$	-1.5	-3.0	-2.2137	-1.9460	-2.0215	-2.0162	-2.0161
$u(3)$	-0.0282	-2.0705	-1.2719	-0.8932	-1.0080	-1.0002	-1.0000

Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών

Σ'αυτή την περίπτωση θα γράψουμε τη ΔΕ (1) ως:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - \left(1 - \frac{x_i}{5}\right) u_i = x_i$$

η οποία μπορεί να γραφεί ως:

$$u_{i-1} - \left[2 + h^2 \left(1 - \frac{x_i}{5}\right)\right] u_i + u_{i+1} = h^2 x_i$$

Δηλαδή, μ΄ αυτόν το τρόπο δημιουργούμε ένα σύστημα με $N-2$ γραμμικές εξισώσεις που μαζί με τις οριακές συνθήκες θα δώσουν τη μοναδική λύση στο πρόβλημα, δηλαδή τις $N-2$ τιμές για τα u_i.

ΣΧΟΛΙΟ: Ενώ αυτή η μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί ευκολότερα από τη μέθοδο βολής αλλά τυπικά για τον αριθμό ενδιάμεσων σημείων είναι μικρότερης ακρίβειας διότι η αντικατάσταση της 2ης παραγώγου με τη σχέση πεπερασμένων διαφορών έχει σφάλμα της τάξης $O(h^2)$ ενώ οι τυπικές μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης ΔΕ έχουν συνήθως σημαντικά μικρότερο σφάλμα.

Προβλήματα Χαρακτηριστικών Τιμών: Εισαγωγή

Ας θεωρήσουμε την ομογενή ΔΕ 2ης τάξης με οριακές συνθήκες:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2 u = 0\,, \quad u(0) = 0\,, \quad u(1) = 0, \tag{2}$$

όπου k^2 είναι μια ελεύθερη παράμετρος.

• Το ερώτημα είναι: για ποιές **χαρακτηριστικές** τιμές της σταθεράς k η παραπάνω ΔΕ επιδέχεται τις δοσμένες οριακές συνθήκες.

• Αυτές οι χαρακτηριστικές τιμές καλούνται **ιδιοτιμές**.

Είναι προφανές ότι για αυτή την απλή διαφορική εξίσωση η γενική λύση είναι:

$$u = A\sin(kx) + B\cos(kx)$$

που για τις συγκεκριμένες οριακές συνθήκες οδηγεί στις παρακάτω ιδιοτιμές και αντίστοιχες (ιδιο)λύσεις

$$u = A\sin(n\pi x), \quad k = \pm n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Οι ιδιοτιμές είναι συνήθως η ζητούμενη πληροφορία σ΄ ένα πρόβλημα χαρακτηριστικών τιμών. Η ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη ιδιοτιμή καθορίζει τη μορφή της λύσης.

Για παράδειγμα, στο παραπάνω πρόβλημα της παλλόμενης χορδής οι ιδιοτιμές αντιστοιχούν στις φυσικές συχνότητες ταλάντωσης και οι

Αριθμητική Επίλυση: Πεπερασμένες Διαφορές

Το προαναφερθέν πρόβλημα οριακών τιμών

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2 u = 0\,, \quad u(0) = 0\,, \quad u(1) = 0, \tag{3}$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή πεπερασμένων διαφορών και μ΄ αυτό τον τρόπο να αναχθεί σε N εξισώσεις της μορφής:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - k^2 u_i = 0$$

Που ανάγονται στο παρακάτω πρόβλημα ιδιοτιμών ενός πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 2-h^2k^2 & -1 & \cdots & & 0 \\ -1 & 2-h^2k^2 & -1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & -1 & 2-h^2k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ή καλύτερα

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\, u = 0 \;\; \text{όπου} \;\; \lambda = h^2 k^2$$

που για $h = 0.02$ δίνουν $k = 3.09$ (3.1%), $k = 5.88$ (6.3%), $k = 8.09$ (14%) και $k = 9.51$ (24.3%).

Τριδιαγώνιοι Πίνακες

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός $N \times N$ τριδιαγώνιου πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} b & c & 0 & \cdots & & 0 \\ a & b & c & 0 & & 0 \\ 0 & a & b & c & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & a & b \end{pmatrix}$$

μπορούν να βρεθούν αναλυτικά από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\lambda_j = b + 2c\sqrt{\frac{a}{c}} \cos \frac{j\pi}{N+1} \quad \text{για} \quad j = 1, \ldots, N$$

και $\vec{u}_j = (u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots, u_N)^T$ όπου:

$$u_k = 2\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^k \sin \frac{kj\pi}{N+1} \quad \text{για} \quad j = 1, \ldots, N\,.$$

```
deq1 = u''[x] - (1 - x/5)*u[x]*u'[x] - x
xstart = 1;
xend = 3;
shootstart = 1.000;
valderiv = -1.5;
sols = Map[ First[NDSolve[deq1 == 0, u[xstart] == 2, u[xend] == -1, u,
x, MaxSteps → 1500, Method → "Shooting", "StartingInitialConditions"
→ u[shootstart] == 2, u'[shootstart] == ]] , valderiv ];
gr1 = Plot[Evaluate[u[x] /. sols], x, xstart, xend, PlotRange → All,
PlotStyle → Black, Blue, Green]
f[x_ ] := u[x] /. sols
ft[x_ ] := f'[x][[1]]
ftt[x_ ] := f''[x][[1]]
```

1. Με τη χρήση της Mathematica να λυθούν τα προβλήματα **συνοριακών τιμών**:

$$y''(x) + y(x) = 0 \quad \text{όπου}\, y(0) = 0\,,\;\; y(\pi/2) = 2$$

$$y''(x) - x + y = 0 \quad \text{όπου}\, y(0) = 0\,,\;\; y(1) = 2$$

2. Να λυθεί το πρόβλημα **χαρακτηριστικών τιμών** της εξίσωσης Mathieu

$$y'' + (\lambda - 10\cos 2x)y = 0 \quad \text{όπου} \quad y'(0) = 0\,,\; y'(\pi) = 0\,,\; y(0) = 1$$