Αριθμητική Ολοκλήρωση ΔΕΜΠ

23 Απριλίου 2010

Εισαγωγή

• Μια διαφορική ελίσωση που περιέχει παραγώγους από περισσότερες της μίας μεταβλητές ονομάζεται **διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους** (ΔΕΜΠ).
• Πολλά προβλήματα στις εφαρμοσμένες επιστήμες περιγράφονται μαθηματικά από ΔΕΜΠ.
• Θα μελετήσουμε αριθμητικά ΔΕΜΠ με τη χρήση πεπερασμένων διαφορών που θα χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση των παραγώγων 1ης και 2ης τάξης.
• Οι ΔΕΜΠ κατηγοριοποιούνται σε 3 τύπους, με ορολογία που δανειζόμαστε από τη μελέτη των κωνικών τομών.
Οι συναρτήσεις της μορφής:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D = 0$$

παριστούν δευτεροβάθμιες καμπύλες που αν:

- $B^2 - 4AC < 0$ η καμπύλη είναι **έλλειψη**,
- $B^2 - 4AC = 0$ η καμπύλη είναι **παραβολή**
- $B^2 - 4AC > 0$ η καμπύλη είναι **υπερβολή**

Με την ίδια λογική συναρτήσεις της μορφής

$$A\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + D\left(x, y, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0 \qquad (1)$$

όπου A, B και C ονομάζονται **ημι-γραμμικές**. Και τις κατατάσσουμε σε 3 κατηγορίες. Αν :

- $B^2 - 4AC < 0$, η εξίσωση είναι **ελλειπτική**,
- $B^2 - 4AC = 0$, η εξίσωση είναι **παραβολική**
- $B^2 - 4AC > 0$, η εξίσωση είναι **υπερβολική**

Δυο κλασικά παραδείγματα αποτελούν οι ΔΕΜΠ Laplace & Poisson:

$$\nabla^2 u = 0\,, \quad \nabla^2 u = g(x, y) \quad \text{για} \quad 0 < x < 1 \quad \text{και} \quad 0 < y < 1 \qquad (2)$$

με συνοριακές συνθήκες:

- $u(x, 0) = f_1(x)$ για $y = 0$ και $0 \leq x \leq 1$
- $u(x, 0) = f_2(x)$ για $y = 1$ και $0 \leq x \leq 1$
- $u(x, 0) = f_3(x)$ για $x = 0$ και $0 \leq y \leq 1$
- $u(x, 0) = f_4(x)$ για $x = 1$ και $0 \leq y \leq 1$

για τις οποίες $B = 0$, $A = C = 1$ που σημαίνει ότι είναι **ελλειπτικές**.

Η **κυματική εξίσωση**

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{για} \quad 0 < x < L \quad \text{και} \quad 0 < t < \infty \qquad (3)$$

για δοθείσες αρχικές τιμές της συνάρτησης και της χρονικής της παραγώγου

- $u(x,0) = f(x)$ για $t = 0$ και $0 \leq x \leq L$
- $u_t(x,0) = g(x)$ για $t = 0$ και $0 \leq x \leq L$

είναι μια κλασική περίπτωση **υπερβολίκης** ΔΕΜΠ.

Η **εξίσωση θερμότητας**

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{για} \quad 0 < x < 1 \quad \text{και} \quad 0 < y < 1 \qquad (4)$$

η αρχική κατανομή θερμοκρασίας για $t = 0$ είναι:

- $u(x,0) = f(x)$ για $t = 0$ και $0 \leq x \leq L$

και οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου

- $u(x,t) = c_1$ για $x = 0$ και $0 \leq t \leq \infty$
- $u(L,t) = c_2$ για $x = L$ και $0 \leq t \leq \infty$

είναι ένα παράδειγμα **παραβολίκης** ΔΕΜΠ.

Θα λύσουμε τη 2-διάστατη εξίσωση Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{για} \quad 0 < x < 1 \quad \text{και} \quad 0 < y < 1 \tag{5}$$

με συνοριάκες συνθηκές:

- $u(x,0) = f_1(x)$ για $y = 0$ και $0 \leq x \leq 1$
- $u(x,0) = f_2(x)$ για $y = 1$ και $0 \leq x \leq 1$
- $u(x,0) = f_3(x)$ για $x = 0$ και $0 \leq y \leq 1$
- $u(x,0) = f_4(x)$ για $x = 1$ και $0 \leq y \leq 1$

επειδή

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Αυτό σημαίνει ότι η u_{xx} στο σημείο (x_i, y_j) θα είναι:

$$[u_{xx}]_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \tag{6}$$

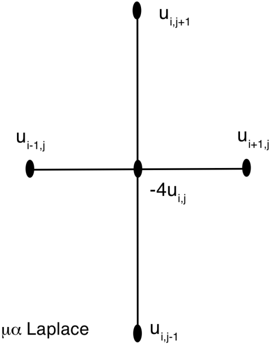
και η u_{yy} θα γραφεί ως:

$$[u_{yy}]_{i,j} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} \tag{7}$$

Η εξίσωση Laplace μπορεί να γραφεί προσεγγιστικά

$$\nabla^2 u \approx \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2} = 0 \qquad (8)$$

όπου $i = 2, ..., n-1$ και $j = 2, ..., m-1$. Αυτή είναι η σχέση **5-σημείων** για την εξίσωση Laplace και συσχετίζει την τιμή $u_{i,j}$ με τις 4 γειτονικές τιμές $u_{i-1,j}$, $u_{i+1,j}$, $u_{i,j-1}$ και $u_{i,j+1}$.



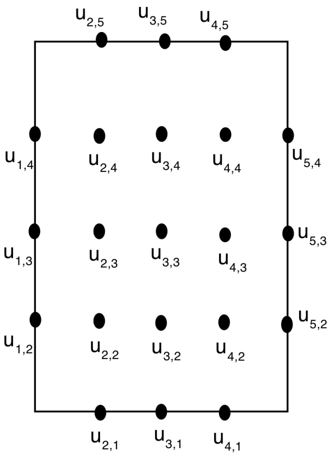
Σχημα Laplace

Που οδηγεί στην παρακάτω σχέση επίλυσης της εξίσωσης Laplace:

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0 \qquad (9)$$

Αν υποθέσουμε ότι όλες οι συνοριακές τιμές της $u(x,y)$ είναι γνωστές:

$$
\begin{aligned}
u(x_1, y_j) &= u_{1,j} \quad \text{για} \quad 2 \le j \le m-1 \\
u(x_i, y_1) &= u_{i,1} \quad \text{για} \quad 2 \le i \le n-1 \\
u(x_n, y_j) &= u_{n,j} \quad \text{για} \quad 2 \le j \le m-1 \\
u(x_i, y_m) &= u_{i,m} \quad \text{για} \quad 2 \le i \le n-1
\end{aligned}
$$



Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές της $u(x,y)$ στα 'εσωτερικά' σημεία επιλύοντας ένα σύστημα από $(n-2)\times(n-2)$ εξισώσεις για $(n-2)^2$ αγνώστους.

Για την προηγούμενη 5×5 διαμέριση η λύση της εξίσωσης Laplace θα δίνεται από το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$
\begin{array}{cccccccccl}
-4u_{2,2} & +u_{3,2} & & +u_{2,3} & & & & & & = -u_{2,1} - u_{1,2} \\
u_{2,2} & -4u_{3,2} & +u_{4,2} & & +u_{3,3} & & & & & = -u_{3,1} \\
 & u_{3,2} & -4u_{4,2} & & & +u_{4,3} & & & & = -u_{4,1} - u_{5,2} \\
u_{2,2} & & & -4u_{2,3} & +u_{3,3} & & +u_{2,4} & & & = -u_{1,3} \\
 & u_{3,2} & & +u_{2,3} & -4u_{3,3} & +u_{4,3} & & +u_{3,4} & & = 0 \\
 & & u_{4,2} & & +u_{3,3} & -4u_{4,3} & & & +u_{4,4} & = -u_{5,3} \\
 & & & u_{2,3} & & & -4u_{2,4} & +u_{3,4} & & = -u_{2,5} - u_{1,4} \\
 & & & & u_{3,3} & & +u_{2,4} & -4u_{3,4} & +u_{4,4} & = -u_{3,5} \\
 & & & & & & u_{4,3} & +u_{3,4} & -4u_{4,4} & = -u_{4,5} - u_{5,4}
\end{array} \qquad (10)
$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν το ορθογώνιο έχει διαστάσεις $0 \leq x \leq 4$ και $0 \leq y \leq 4$ με συνοριακές συνθήκες

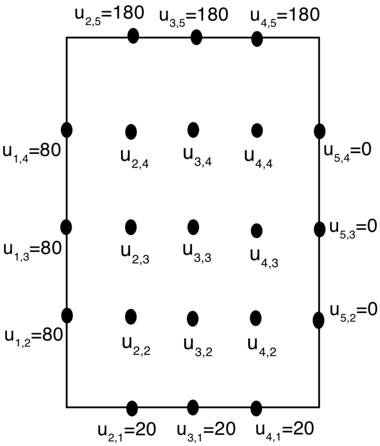
$$
\begin{array}{lclcll}
u(x,0) & = & 20 & \text{και} & u(x,4) = 180 & \text{για} \quad 0 < x < 4 \\
u(0,y) & = & 80 & \text{και} & u(4,x) = 0 & \text{για} \quad 0 < y < 4
\end{array}
$$

θα δημιουργήσουμε το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
-4u_{2,2} & +u_{3,2} & & +u_{2,3} & & & & & & = -100 \\
u_{2,2} & -4u_{3,2} & +u_{4,2} & & +u_{3,3} & & & & & = -20 \\
 & u_{3,2} & -4u_{4,2} & & & +u_{4,3} & & & & = -20 \\
u_{2,2} & & & -4u_{2,3} & +u_{3,3} & & +u_{2,4} & & & = -80 \\
 & u_{3,2} & & +u_{2,3} & -4u_{3,3} & +u_{4,3} & & +u_{3,4} & & = 0 \\
 & & u_{4,2} & & +u_{3,3} & -4u_{4,3} & & & +u_{4,4} & = 0 \\
 & & & u_{2,3} & & & -4u_{2,4} & +u_{3,4} & & = -260 \\
 & & & & u_{3,3} & & +u_{2,4} & -4u_{3,4} & +u_{4,4} & = -180 \\
 & & & & & & u_{4,3} & +u_{3,4} & -4u_{4,4} & = -180
\end{array}
$$

που επιδέχεται την αριθμητική λύση:

$u_{2,2} = 55.7143$, $u_{3,2} = 43.2143$,
$u_{4,2} = 27.1429$, $u_{2,3} = 79.6429$,
$u_{3,3} = 70.000$, $u_{4,3} = 45.3571$,
$u_{2,4} = 112.857$, $u_{3,4} = 111.786$ και
$u_{4,4} = 84.2857$.



Η λύση του προηγούμενο συστήματος μπορεί να βρεθεί με τη χρήση μεθόδων που αναπτύχθηκαν στο Κεφ. 2 της Αριθμητικής Ανάλυσης. Συγκεκριμένα για το 3-διαγώνιο σύστημα που έχουμε εδώ οι επαναληπτικές μέθοδοι αποτελούν την καλύτερη επιλογή.

Υποθέτοντας κάποιες αρχικές τιμές για τα 'εσωτερικά' άγνωστα σημεία $u_{i,j}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω επαναλληπτική διαδικασία:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right) \tag{11}$$

Μια μέθοδος που επιταχύνει τη σύγκλιση είναι μέθοδος **successive over relaxation** (S.O.R)

$$u_{i,j} = u_{i,j} + \frac{\omega}{4}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}\right) = u_{i,j} + \omega r_{i,j} \tag{12}$$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου $|r_{i,j}| < \epsilon$.

Η ιδανική τιμή του συντελεστή ω δεν μπορεί να προβλεφθεί πάντοτε.

Ελλειπτικές ΔΕΜΠ: S.O.R.

Για την περίπτωση ορθογώνιας περιοχής με συνοριακές συνθήκες Dirichlet υπάρχει εξίσωση για τον υπολογισμού του ιδανικού ω που είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{m-1}\right)\right]^2 \omega^2 - 16\omega + 16 = 0 \tag{13}$$

Υπερβολικές ΔΕΜΠ

Ενα τυπικό παράδειγμα υπερβολικής εξίσωσης είναι η κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{για} \quad 0 < x < a \quad \text{και} \quad 0 < t < b \tag{14}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u(0,t) = 0 \quad \text{και} \quad u(a,t) = 0 \qquad & \text{για} \quad 0 \le t \le b \\ u(x,0) = f(x) \qquad & \text{για} \quad 0 \le x \le a \\ u_t(x,0) = g(x) \qquad & \text{για} \quad 0 < x < a \end{aligned} \tag{15}$$

Δημιουργία της Εξίσωσης Διαφορών

Αν διαμερίσουμε το ορθογώνιο: $R = \{(x,t) : \le x \le a, 0 \le t \le b\}$ σε $(n-1) \times (m-1)$ ορθογώνια με πλευρές $\Delta x = h$ και $\Delta t = k$. Τότε με χρήση των σχέσεων κεντρικών διαφορών λαμβάνουμε:

$$u_{tt}(x,t) = \frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} + O(k^2) \tag{16}$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + O(h^2) \tag{17}$$

Επειδή $x_{i+1} = x_i + h$ και $t_{j+1} = t_j + k$ η σχέση (14) γράφεται:

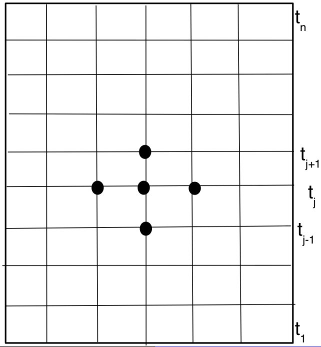
$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \tag{18}$$

αντικαθιστώντας $r = ck/h$ λαμβάνουμε

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = r^2 \left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right). \tag{19}$$

που τελικά γίνεται:

$$u_{i,j+1} = 2(1 - r^2)u_{i,j} + r^2 \left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) - u_{i,j-1} \tag{20}$$



Υπερβολικές ΔΕΜΠ: Αρχικές τιμές

Οι αρχικές τιμές για $j = 1$ και $j = 2$ θα πρέπει να δίνονται ωστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση (20) για τον υπολογισμό του $u(x, t)$ στη θέση $j = 3$.
Επειδή συνήθως η πληροφορία για τη θέση $j = 2$ δεν είναι γνωστή την υπολογίζουμε με βάση την πληροφορία που έχουμε για το $u_t(x, 0)$. Η τιμή του $u(x_i, k)$ θα υπολογισθεί από την

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + ku_t(x_i, 0) + O(k^2) \tag{21}$$

Αλλά επειδή $u(x_i, 0) = f(x_i) = f_i$ και $u_t(x_i, 0) = g(x_i) = g_i$ η παραπάνω σχέση θα γραφεί:

$$u_{i,2} = f_i + kg_i \quad \text{για} \quad i = 2, 3, ..., n - 1. \tag{22}$$

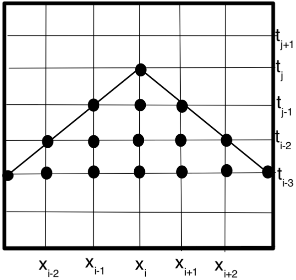
Υπερβολικές ΔΕΜΠ: Ευστάθεια

Οι αριθμητικές μέθοδοι είναι επιρεπείς σε **αριθμητικές αστάθειες** που αυξάνονται καθώς εξελίσουμε την εξίσωση χρονικά.

Για την υπερβολίκη ΔΕΜΠ που μελετούμε ένα ικανό κριτήριο για να διασφαλίσει ευστάθεια είναι είναι: $r = ck/h \leq 1$.

Το κριτήριο είναι γνωστό ως Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) κριτήριο και απαιτεί η φυσική ταχύτητα διάδοσης του κύματος να είναι μικροτερη της ταχύτητας διαδοσης της αριθμητικής πληροφορίας:

$$|c| \leq \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{23}$$



Θα μελετήσουμε την 1-διάστατη εξίσωση διάδοσης της θερμότητας που αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα παραβολίκης ΔΕΜΠ.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{για} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{για} \quad 0 \leq t < \infty \tag{24}$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$u(0,t) = c_1, \quad u(1,t) = c_2 \quad \text{για} \quad 0 \leq t < \infty \tag{25}$$

και αρχικές συνθήκες: $u(x,0) = f(x), \quad \text{για} \quad 0 \leq x \leq 1\,.$
Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει τη διάδοση της θερμοκρασίας σε μιά ράβδο της οποίας τα άκρα βρίσκονται συνεχώς σε σταθερή θερμοκρασία c_1 και c_2.
Υποθέτομε ότι το ορθογώνιο $R = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq t < b\}$ σε $(n-1) \times (m-1)$ ορθογώνια με πλευρές $\Delta x = h$ και $\Delta t = k$. Οι εξισώσεις διαφορών για τις παραγώγους θα είναι:

$$u_t(x,t) = \frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} + O(k) \tag{26}$$

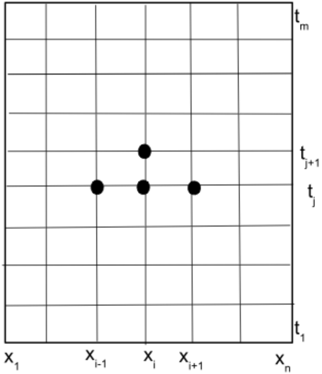
$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + O(h^2) \tag{27}$$

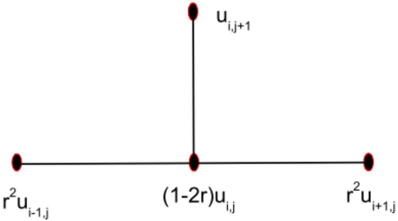
Οπότε η εξίσωση διαφορών γίνεται:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \tag{28}$$

οπότε θέτωντας $r = \alpha^2 k/h^2$ λαμβάνουμε:

$$u_{i,j+1} = (1-2r)\, u_{i,j} + r\,(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) \tag{29}$$





Παραβολικές ΔΕΜΠ: Ευστάθεια

- Απλότητα της σχέσης (29) την κάνει ελκυστική. Αλλά το βασικό μας κριτήριο θα πρέπει να είναι η αριθμητική ευστάθεια
- Αν κάποια σφάλματα που πιθανόν να υπάρχουν στη διαδικασία του αριθμητικού υπολογισμού αποσβένυνται τότε η μέθοδος θεωρείται **ευσταθής**.
- Το σχήμα (29) είναι ευσταθές αν και μόνο αν $0 \leq r \leq 1/2$. Δηλαδή το βήμα k θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη $k \leq h^2/(2\alpha^2)$. Αν η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται τότα σφάλματα σε κάποια χρονική στιγμή θα διαδίδονται και θα διογκόνωνται στη συνέχεια.
- Η εξίσωση διαφορών (29) έχει ακρίβεια $O(k) + O(h^2)$
- Αν επιλέξουμε $r = 1/2$ η εξίσωση διαφορών (29) απλοποιείται ακόμη περισσότερο:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2} \tag{30}$$

Παραβολικές ΔΕΜΠ: Εμμεσοι μέθοδοι

Η **έμμεση μέθοδος** των Crank - Nicholson βασίζεται στην χρήση της χωρικής παραγώγου σε δύο σημεία, το (i,j) (παρόν) αλλά και το $(i,j+1)$ (μελλοντικο!).
Δηλαδή:

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}=\frac{1}{2}\alpha^2\left(\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2}+\frac{u_{i-1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i+1,j+1}}{h^2}\right)$$

που μετά από αναδιάταξη γράφεται:

$$-ru_{i-1,j+1}+2(1+r)u_{i,j+1}-ru_{i+1,j+1}=2(1-r)u_{i,j}+r\left(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}\right) \tag{31}$$

και για $r=1$ οδηγεί στην

$$-u_{i-1,j+1}+4u_{i,j+1}-u_{i+1,j+1}=u_{i-1,j}+u_{i+1,j} \tag{32}$$

Η προηγούμενη σχέση (32) ανάγεται στην επίλυση του παρακάτω γραμμικού συστήματος:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \dots \\ u_{k,j+1} \\ \dots \\ u_{n-2,j+1} \\ u_{n-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + u_{3,j} \\ u_{2,j} + u_{4,j} \\ \dots \\ u_{k-1,j} + u_{k+1,j} \\ \dots \\ u_{n-3,j} + u_{n-1,j} \\ u_{n-2,j} + 2c_2 \end{pmatrix}$$

Είναι προφανές ότι η διαδικασία πρέπει να επαναλαμβάνεται σε κάθε βήμα αλλά έχει το πλεονέκτημα ότι είναι **ευσταθής για κάθε τιμή του** r!!

Ενα αριθμητικό σχήμα θα θεωρείται ως ευσταθές αν ένα μικρό σφάλμα στις αρχικές συνθήκες ή αρχικά στάδια της εξέλιξης θα παραμένει μικρό καθ΄ όλη τη διάρκεια της εξέλιξης.
Μια εξίσωση διαφορών για την επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών είναι της μορφής

$$\mathbf{u}^{n+1} = Q\mathbf{u}^{n} \tag{33}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Η εξίσωση διαφορών (33) θα είναι ευσταθής άν υπάρχουν θετικές ποσότητες Δx_0 και Δt_0, και θετικές σταθερές K και β τέτοιες ώστε

$$||\mathbf{u}^{n+1}|| \leq Ke^{\beta t}||\mathbf{u}^{0}|| \tag{34}$$

για $0 \leq t = (n+1)\Delta t$, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ και $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$.
ΠΡΟΤΑΣΗ Η εξίσωση διαφορών (33) είναι ευσταθής αν και μόνο εάν υπάρχουν θετικές ποσότητες Δx_0 και Δt_0, και μή-αρνητικές σταθερές K και β τέτοιες ώστε:

$$||Q^{n+1}|| \leq Ke^{\beta t} \tag{35}$$

για $0 \leq t = (n+1)\Delta t$, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ και $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$.

Οταν επιλύουμε προβλήματα αρχικών τιμών ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο είναι ο μετασχηματισμός Fourier Για παράδειγμα, θεωρείστε το πρόβλημα:

$$v_t = v_{xx}, \quad \text{με} \quad v(x,0) = f(x) \tag{36}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης v είναι:

$$\hat{v}(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} v(x,t)dx \tag{37}$$

Αν πάρουμε τον μετασχηματισμό Fourier της ΔΕΜΠ (36) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \hat{v}_t(\omega, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} v_t(x,t)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} v_{xx}(x,t)dx \\ &= -\omega^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} v(x,t)dx = -\omega^2 \hat{v}(\omega, t). \end{aligned} \tag{38}$$

Ενώ μπορούμε να επιστρέφουμε στην αρχική μορφή με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{v}(\omega, t)d\omega \tag{39}$$

Προβλήματα Αρχικών Τιμών και Ευστάθεια

Η ταυτότητα του **Parseval** ορίζει ότι οι norms των συναρτήσεων και των μετασχηματισμών τους ταυτίζονται στους αντίστοιχους χώρους τους.
Στην ανάλυση της ευστάθειας των ΔΕΜΠ θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier και την ταυτότητα του Perseval.
Υπενθυμίζουμε ότι στον ορισμό της ευστάθειας χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα

$$||\mathbf{u}^{n+1}|| \leq Ke^{\beta(n+1)\Delta t}||\mathbf{u}^0|| \tag{40}$$

που μπορεί να γραφεί ως

$$||\hat{u}^{n+1}|| \leq Ke^{\beta(n+1)\Delta t}||\hat{u}^0|| \tag{41}$$

οπότε τα ίδια K και β θα ικανοποιούν την (40).
Οταν η ανισότητα (41) ισχύει, θα θεωρούμε ότι η ακολουθία $\{\hat{u}\}$ είναι **ευσταθής** στον χώρο του μετασχηματισμού και θα ισχύει και για την ακολουθία $\{u\}$.

Θα αναλύσουμε την ευστάθεια του παρακάτω σχήματος

$$u_k^{n+1} = r u_{k-1}^n + (1-2r)u_k^n + r u_{k+1}^n, \quad -\infty < k < \infty \qquad (42)$$

όπου $r = \nu \Delta t/\Delta x^2$.

Αν πάρουμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier και στις δύο πλεύρες

$$\begin{aligned}
\hat{u}^{n+1}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_k^{n+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} \left[r u_{k-1}^n + (1-2r)u_k^n + r u_{k+1}^n \right] \\
&= r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_{k-1}^n + (1-2r) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_k^n \\
&\quad + r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_{k+1}^n \\
&= r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_{k-1}^n + (1-2r)\hat{u}^n(\xi) + r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_{k+1}^n
\end{aligned}$$

Αν κάνουμε την αλλαγή $m = k \pm 1$ τότε λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_{k\pm1}^n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i(m\mp1)\xi} u_m^n \\ &= e^{\pm i\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi} u_m^n = e^{\pm i\xi} \hat{u}(\xi). \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1}(\xi) &= re^{-i\xi}\hat{u}^n(\xi) + (1-2r)\hat{u}^n(\xi) + re^{i\xi}\hat{u}^n(\xi) \\ &= \left[re^{-i\xi} + (1-2r) + re^{i\xi}\right]\hat{u}^n(\xi) \\ &= \left[2r\cos\xi + (1-2r)\right]\hat{u}^n(\xi) \\ &= \left(1 - 4r\sin^2(\xi/2)\right)\hat{u}^n(\xi) \end{aligned} \tag{44}$$

Ο όρος

$$\rho(\xi) = 1 - 4r\sin^2\frac{\xi}{2} \tag{45}$$

ονομάζεται **σύμβολο** του σχήματος διαφορών (42).

Οπότε αν εφαρμόσουμε το διακριτό μετσχηματισμό Fourier, εξαλείφουμε τις παραγώγους ως προς τις παραγώηους του x και απλοποιείται η εξίσωση.
Αν εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα της (44) $n+1$ φορές, λαμβάνουμε

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \left(1 - 4r\sin^2(\xi/2)\right)^{n+1} \hat{u}^0(\xi) \tag{46}$$

Οπότε περιοριζόμαστε στη μελέτη του r μέσω της σχέσης

$$|1 - 4r\sin^2(\xi/2)| \leq 1\,. \tag{47}$$

Μετά επιλέγουμε $K = 1$ και $\beta = 0$ και για να ικανοποιείται η (41).
Οπότε το σχήμα θα είναι ευσταθές άν:

$$-1 \leq 1 - 4r\sin^2(\xi/2) \leq 1 \tag{48}$$

ή καλύτερα αν

$$4r\sin^2(\xi/2) \leq 2 \tag{49}$$

που ισχύει για $r \leq 1/2$.
Αυτή είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση του σχήματος (42).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Για την υπερβολική ΔΕΜΠ

$$u_t + au_x = 0 \tag{50}$$

μελετήστε την ευστάθεια των παρακάτω σχημάτων (όπου $|R| = |a|\Delta t/\Delta x$)

$$\begin{aligned}
u_k^{n+1} &= u_k^n - R\left(u_{k+1}^n - u_k^n\right) \quad \text{(FTFS)}\\
u_k^{n+1} &= u_k^n - R\left(u_k^n - u_{k-1}^n\right) \quad \text{(FTFS)}\\
u_k^{n+1} &= u_k^n - \frac{R}{2}\left(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n\right) \quad \text{(FTCS)}
\end{aligned}$$

Για την υπερβολική ΔΕΜΠ

$$u_t + au_x = 0, \quad \text{με} \quad a < 0 \tag{51}$$

να μελετήσετε την ευστάθεια του παρακάτω σχήματος ($|R| = |a|\Delta t/\Delta x \leq 1$)

$$u_k^{n+1} = (1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n \tag{52}$$

Κατάρχάς πέρνουμε τον μετασχηματισμο Fourier του σχήματος

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1} &= (1+R)\hat{u}^n - Re^{i\xi}\hat{u}^n \\ &= [(1+R) - R\cos\xi - iR\sin\xi]\,\hat{u}^n \end{aligned} \tag{53}$$

Στη συνέχεια επειδή το σύμβολο είναι μιγαδικό

$$\rho(\xi) = (1+R) - R\cos\xi - iR\sin\xi \tag{54}$$

θα βρούμε τα όρια της **απόλυτης τιμής** του ρ που θα πρέπει να είναι μικρότερα της μονάδας ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα (41) (για $K = 1$ και $\beta = 0$). Οπότε

$$|\rho|^2 = (1+R)^2 - 2R(1+R)\cos\xi + R^2$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|\rho|^2$ για $\xi \in [-\pi, \pi]$ και βρίσκουμε ότι υπάρχει μέγιστο στα $\xi = 0$ και $\xi = \pm\pi$.
Οι τιμές του $|\rho(\xi)|$ στα μέγιστα είναι

$$|\rho(0)| = 1 \quad \text{και} \quad |\rho(\pm\pi)| = |1 + 2R|$$

Για να ισχύει $|\rho(\pm\pi)| \leq 1$ θα πρέπει το R να ικανοποιεί τη συνθήκη $-1 \leq 1 + 2R \leq 1$.
Επειδή δε $R < 0$ θα είναι $1 + 2R \leq 1$ και επομένως το σχήμα θα είναι υπο-συνθήκη ευσταθές αν $R \geq -1$.

Ευστάθεια: Σχήμα Lax-Wendroff

Η ΔΕΜΠ $u_t + au_x = 0$ μπορεί να γραφεί ως:

$$u_{tt} = (-au_x)_t = -au_{xt} = -a(u_t)_x = -a(-au_x)_x = a^2 u_{xx} \quad (55)$$

Οπότε επειδή:

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= u_k^n + (u_t)_k^n \Delta t + (u_{tt})_k^n \frac{\Delta t^2}{2} + O\left(\Delta t^3\right) \\ &= u_k^n + (-au_x)_k^n \Delta t + (a^2 u_{xx})_k^n \frac{\Delta t^2}{2} + O\left(\Delta t^3\right) \\ &= u_k^n - a\left(\frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)\right)\Delta t \\ &\quad + a^2\left(\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)\right)\frac{\Delta t^2}{2} + O\left(\Delta t^3\right) \end{aligned}$$

δηλαδή προσεγγίζουμε την ΔΕΜΠ $u_t + au_x = 0$ με την εξίσωση διαφορών

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{R}{2}\delta_0 u_k^n + \frac{R^2}{2}\delta^2 u_k^n \quad \text{με} \quad R = a\Delta t/\Delta x. \quad (56)$$

Ευστάθεια: Σχήμα Lax-Wendroff

Το σχήμα Lax-Wendorff έχει ακρίβεια $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$ και το **σύμβολο του** είναι:

$$\rho(\xi) = 1 - 2R^2 \sin^2(\xi/2) - iR \sin \xi \tag{57}$$

Αλλά επειδή

$$|\rho(\xi)|^2 = 1 - 4R^2 \sin^4(\xi/2) + 4R^4 \sin^4(\xi/2) \tag{58}$$

αν διαφορίσουμε ως προς ξ βρίσκουμε τις ακραίες τιμές $\xi = \pm\pi$ και 0. Για τις οποίες βρίσκουμε:

$$|\rho(0)|^2 = 1 \quad \text{και} \quad |\rho(\pm\pi)|^2 = |\rho(\pi)|^2 = (1 - 2R^2)^2. \tag{59}$$

Οπότε για $R^2 \leq 1$ λαμβάνουμε $(1 - 2R^2)^2 \leq 1$ και επομένως το σχήμα Lax-Wendroff είναι υπο-συνθήκη ευσταθές για

$$|R| = |a|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1\,. \tag{60}$$

και είναι **2ης τάξης ως προς τη χρονική και χωρική διάσταση**.