

ΚΩΣΤΑΣ ΚΟΚΚΟΤΑΣ

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

– Σημειώσεις για τους φοιτητές –

3 Μαρτίου 2005



---

## Περιεχόμενα

|          |                                   |    |
|----------|-----------------------------------|----|
| <b>1</b> | <b>ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ</b>        | 1  |
| 1.1      | ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ               | 1  |
| 1.1.1    | Χρήσιμοι Τύποι                    | 1  |
| 1.1.2    | Λυμένες Ασκήσεις                  | 2  |
| 1.1.3    | Αλυτες Ασκήσεις                   | 3  |
| 1.2      | ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ RIEMANN                 | 4  |
| 1.2.1    | Χρήσιμοι Τύποι                    | 4  |
| 1.2.2    | Λυμένες Ασκήσεις                  | 4  |
| 1.2.3    | Αλυτες Ασκήσεις                   | 6  |
| <b>2</b> | <b>ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ</b> | 11 |
| 2.1      | ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Einstein                | 11 |
| 2.1.1    | Χρήσιμοι Τύποι                    | 11 |
| 2.1.2    | Λυμένες Ασκήσεις                  | 12 |
| 2.1.3    | Αλυτες Ασκήσεις                   | 16 |
| 2.2      | ΒΑΡΥΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ                   | 20 |



## ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

### 1.1 ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

#### 1.1.1 Χρήσιμοι Τύποι

- Μετασχηματισμοί τανυστών:

$$\bar{a}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\rho} a^\rho \quad \bar{b}_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} b_\rho$$

$$\bar{T}^{\lambda\mu} = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} \quad \bar{T}_\mu^\lambda = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\mu} T_\beta^\alpha \quad \bar{T}_{\lambda\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\mu} T_{\alpha\beta}$$

- Συναλλοίωτη Διαφόριση

$$f_{;\lambda} = f_{,\lambda} \quad (A^{\dots} B^{\dots})_{;\lambda} = A^{\dots}_{;\lambda} B^{\dots} + A^{\dots} B^{\dots}_{;\lambda}$$

$$b_{\lambda;\mu} = b_{\lambda,\mu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha b_\alpha \quad a_{;\mu}^\lambda = a_{,\mu}^\lambda + \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda a^\alpha$$

$$T_{\mu;\nu}^\lambda = T_{\mu,\nu}^\lambda + \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda T_\mu^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^\lambda \quad T_{;\nu}^{\lambda\mu} = T_{,\nu}^{\lambda\mu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda T_\mu^\alpha + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^\lambda_\alpha$$

- Παράλληλη Μεταφορά

$$\delta\phi = 0 \quad \delta a_\lambda = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu a_\nu dx^\mu \quad \delta a^\lambda = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda a^\mu dx^\nu$$

- Εξίσωση Γεωδαισιακών

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

- Τανυστής Καμπυλότητας

$$R_{\lambda\mu\nu}^\rho = -\Gamma_{\lambda\mu,\nu}^\rho + \Gamma_{\lambda\nu,\mu}^\rho - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\rho + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\rho$$

$$\alpha_{\lambda;\mu;\nu} - \alpha_{\lambda;\nu;\mu} = R_{\lambda\mu\nu}^\rho a_\rho - 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\rho a_{\lambda;\rho}$$

$$\delta a^\lambda = -\frac{1}{2} R_{\rho\mu\nu}^\lambda (dx^\mu \delta x^\nu - dx^\nu \delta x^\mu)$$

**1.1.2 Λυμένες Ασκήσεις**

1. **Εαν  $\phi = a_{ij}A^iA^j$  να δειχθεί ότι μπορούμε να γράψουμε πάντα  $\phi = b_{ij}A^iA^j$  όπου  $b_{ij}$  είναι συμμετρικός τανυστής.**

**Απόδειξη**

$$\phi = a_{ij}A^iA^j = a_{ji}A^jA^i = a_{ji}A^iA^j$$

άρα

$$2\phi = (a_{ij} + a_{ji})A^iA^j \quad \text{δηλαδή} \quad \phi = b_{ij}A^iA^j$$

όπου  $2b_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$ .

2. **Αν σε ένα χώρο ορίζονται δύο συνδέσεις να αποδειχθεί ότι η διαφορά τους είναι ένα τανυστικό πεδίο (1,2).**

**Απόδειξη**

Μια σύνδεση μετασχηματίζεται ως εξής κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\rho = A_\alpha^\rho A_\lambda^\beta A_\mu^\gamma \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha + A_\alpha^\rho \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}$$

επομένως όταν πάρω την διαφορά δύο συνδέσεων ο δευτερος όρος του δεξιού μέρους θα απαλειφθεί και η διαφορά θα είναι τανυστής (1,2).

3. **Να αποδειχθεί ο τύπος της συναλλοίωτης διαφόρισης ενός ανταλλοιώτου διανύσματος.**

**Απόδειξη**

Γνωρίζουμε ότι ισχύει:  $b_{\lambda;\mu} = b_{\lambda,\mu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho b_\rho$  και  $\phi_{;\lambda} = \phi_{,\lambda}$  εάν θεωρήσουμε ένα τυχαίο ανταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο  $a^\lambda$  τότε  $a^\lambda b_\lambda = \phi$  και λόγω της δευτερης από τις παραπάνω εξισώσεις θα έχουμε  $(a^\lambda b_\lambda)_{;\mu} = (a^\lambda b_\lambda)_{,m}$  οπότε

$$a_{;\mu}^\lambda b_\lambda + a^\lambda b_{\lambda;\mu} = a_{,\mu}^\lambda b_\lambda + a^\lambda b_{\lambda,\mu}$$

και αντικαθιστώντας το  $b_{;\mu}^\lambda$  από την παραπάνω σχέση λαμβάνω τελικά

$$a_{;\mu}^\lambda = a_{,\mu}^\lambda + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda a^\rho$$

4. **Να βρεθεί η συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστού Kronecker.**

**Απόδειξη**

Είναι:

$$\delta_{\mu;\nu}^\lambda = \delta_{\mu,\nu}^\lambda + \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \delta_\mu^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta_\alpha^\lambda = 0$$

διότι

$$\delta_{\mu,\nu}^\lambda = 0 \quad \text{και} \quad \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \delta_\mu^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta_\alpha^\lambda$$

**1.1.3 Άλυτες Ασκήσεις**

1. Να αποδειχθεί ότι οι πράξεις συστολής δεικτών και συναλλοίωτης διαφοροποίησης αντιμετατίθενται.
2. Με κατάλληλες εναλλαγές των βουβών δεικτών να αποδειχθεί ότι:

$$(A_{abc} + A_{cab} + A_{bca})B^a B^b B^c = 3A_{abc}B^a B^b B^c$$

3. Ένας συναλλοίωτος τανυστής έχει συνιστώσες  $xy, 2y, xz$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Να βρεθούν οι συναλλοίωτες συνιστώσες του σε σφαιρικές συντεταγμένες.
4. Έστω ένας αντισυμμετρικός τανυστής  $T_{[\lambda\mu]}$  να δειχθεί ότι ο  $T_{[\lambda\mu,\nu]}$  είναι τανυστής.
5. Να αποδειχθεί ο τύπος της συναλλοίωτης διαφορίσης ενός τανυστή  $T_{\lambda\mu}$ .
6. Αν  $A_{\mu\nu}^\lambda$  είναι τανυστής, δείξτε ότι το  $A_{\mu\lambda}^\lambda$  είναι συναλλοίωτο διάνυσμα.
7. Να δειχθεί ότι εάν  $T_{\alpha\beta\gamma}$  είναι ένας τανυστής  $(0,3)$  τότε θα ικανοποιούνται τα ακόλουθα:
  - α') Εάν  $T_{[\alpha\beta]\gamma} = 0$  και  $T_{\alpha(\beta\gamma)} = 0$  τότε  $T_{\alpha\beta\gamma} = 0$ .
  - β') Εάν  $T_{[\alpha\beta]\gamma} = 0$  τότε  $3T_{(\alpha\beta\gamma)} = T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta}$ .
  - γ') Εάν  $T_{(\alpha\beta)\gamma} = 0$  τότε  $3T_{[\alpha\beta\gamma]} = T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta}$ .
8. Να δειχθεί ότι εάν  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  είναι τανυστής  $(0,4)$  τότε  $T_{\alpha[[\beta\gamma]\delta]} = T_{\alpha[\beta\gamma\delta]}$ .
9. Να υπολογισθεί το αντισυμμετρικό μέρος του  $a_{i;j}$ .
10. Είναι η διπλή συναλλοίωτη διαφορίση ενός βαθμωτού πεδίου αντιμεταθετική πράξη;
11. Στην Ευκλείδειο γεωμετρία γεωμετρία ισχύει η πρόταση: Η παράλληλη μεταφορά δύο διανυσμάτων αφήνει το βαθμωτό τους γινόμενο αμετάβλητο. Ισχύει η παραπάνω πρόταση και σε ένα μη-Ευκλείδειο χώρο όπου έχει ορισθεί μια σύνδεση.
12. Για τον τανυστή καμπυλότητας να αποδειχθεί ότι ισχύει  $R_{\lambda\mu\nu}^\rho = -R_{\lambda\nu\mu}^\rho$ .
13. Αν η σύνδεση του χώρου είναι συμμετρική να δειχθεί ότι για τον τανυστή καμπυλότητας ισχύει  $R_{[\lambda\nu\mu]}^\rho = 0$ .
14. Αν  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  είναι μία συμμετρική αφινική σύνδεση να δειχθεί ότι οι  $n^3$  ποσότητες  $L_{\beta\gamma}^\alpha$  που ορίζονται από την σχέση  $2L_{\gamma\delta}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$  είναι συντελεστές συμμετρικής αφινικής σύνδεσης.

## 1.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ RIEMANN

### 1.2.1 Χρήσιμοι Τύποι

- Σύμβολα Christoffel

$$\Gamma_{\nu,\lambda\mu} = \frac{1}{2} (g_{\lambda\nu,\mu} + g_{\nu\mu,\lambda} - g_{\lambda\mu,\nu}) \quad \Gamma_{\lambda\mu}^\rho = g^{\rho\nu} \Gamma_{\nu,\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\rho\nu} (g_{\lambda\nu,\mu} + g_{\nu\mu,\lambda} - g_{\lambda\mu,\nu})$$

- Τανυστής Einstein

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$$

- Τανυστής Weyl

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\delta} R_{\gamma\beta} + g_{\beta\gamma} R_{\delta\alpha} - g_{\alpha\gamma} R_{\delta\beta} - g_{\beta\delta} R_{\gamma\alpha}) + \frac{1}{6} (g_{\alpha\gamma} g_{\delta\beta} - g_{\alpha\delta} g_{\gamma\beta}) R$$

### 1.2.2 Λυμένες Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η συνναλοιώτη παράγωγος του μετρικού τανυστή είναι μηδέν (Λήμμα Ricci).

**Απόδειξη**

Από τον ορισμό της συναλλοιώτου παραγώγου ενός τανυστικού πεδίου (0,2) πέρνουμε

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\sigma\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma - g_{\alpha\sigma} \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma = g_{\alpha\beta,\gamma} - 2\Gamma_{(\beta\alpha)\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\alpha\beta,\gamma}$$

2. Να υπολογισθούν οι συνιστώσες του τανυστή Riemann  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  και Einstein  $G_{\alpha\beta}$  για τη 2-σφαίρα.

**Απόδειξη**

Η μετρική σε πολικές συντεταγμένες έχει την μορφή

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Εάν θέσουμε  $x^1 = \theta$  και  $x^2 = \phi$  τότε:

$$g_{11} = r^2, \quad g_{22} = r^2 \sin^2 \theta$$

και

$$g^{11} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

Οι μόνες μή-μηδενικές παράγωγοι του μετρικού τανυστή είναι:

$$g_{22,1} = 2r^2 \sin \theta \cos \theta \quad \text{και} \quad g_{22,11} = 2r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Οι μή-μηδενικές συνιστώσες των συμβόλων ήριστοφελ είναι:



$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{g^{22}g_{22,1}}{2} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{g^{11}g_{22,1}}{2} = -\cos \theta \sin \theta$$

Οπότε οι μόνες μή-μηδενικές συνιστώσες του τανυστή Riemann είναι :

$$R_{212}^1 = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{21,1}^1 + \Gamma_{22}^\sigma \Gamma_{\sigma 1}^1 - \Gamma_{21}^\sigma \Gamma_{\sigma 2}^1 = \sin^2 \theta$$

Δηλαδή μόνο ο  $R_{1212}$  και οι τανυστές με μεταθέσεις των δεικτών της μορφής  $R_{2121}$  είναι διάφοροι του μηδενός

$$R_{1212} = r^2 \sin^2 \theta \quad \text{και} \quad R_{121}^2 = g^{22} R_{212} = 1$$

Η καμπυλότητα Gauss δίνεται από την σχέση :

$$K = \frac{R_{1212}}{g} = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}} = \frac{1}{r^2}$$

Ο τανυστής Ricci έχει μόνο δύο μη-μηδενικές συνιστώσες:

$$R_{11} = R_{121}^2 = 1 \quad \text{και} \quad R_{22} = R_{212}^1 = \sin^2 \theta$$

ενώ το βαθμωτό μέγεθος Ricci δίνεται από :

$$R = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = \frac{2}{r^2}.$$

Τέλος οι συνιστώσες του τανυστή Einstein είναι :

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = 0 \quad \text{και} \quad G_{22} = R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R = 0$$

Δηλαδή στην σφαίρα μηδενίζεται ο τανυστής Einstein.

### 3. Να αποδειχθεί ότι ο τανυστής Einstein έχει μηδενική απόκλιση, δηλαδή $G_{\nu;\mu}^\mu = 0$ .

#### Απόδειξη

Γνωρίζουμε την ταυτότητα Bianchi

$$R_{\mu\nu\rho;\sigma}^\lambda + R_{\mu\rho\sigma;\nu}^\lambda + R_{\mu\sigma\nu;\rho}^\lambda = 0$$

αν κάνω συστολή στους δείκτες  $\lambda = \sigma$  θα πάρω :

$$R_{\mu\nu\rho;\lambda}^\lambda + R_{\mu\rho\lambda;\nu}^\lambda + R_{\mu\lambda\nu;\rho}^\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad R_{\mu\nu\rho;\lambda}^\lambda + R_{\mu\rho;\nu} - R_{\mu\nu;\rho} = 0$$

και πολλαπλασιάζοντας με  $g^{\mu\rho}$  λαμβάνουμε

$$g^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho;\lambda}^\lambda + g^{\mu\rho} R_{\mu\rho;\nu} - g^{\mu\rho} R_{\mu\nu;\rho} = 0 \quad \text{ή} \quad R_{\nu\rho;\lambda}^{\lambda\rho} + R_{;\nu} - R_{\nu;\rho}^\rho = 0$$

οπότε με εναλλαγές στους δείκτες λαμβάνουμε :

$$R_{\rho;\lambda}^\lambda - R_{;\lambda} + R_{\rho;\nu}^\nu = 0 \quad \text{τελικά} \quad 2R_{\rho;\lambda}^\lambda - R_{;\rho} = 0$$

αλλά και

$$G_\mu^\lambda = g^{\lambda n} G_{\mu n} = g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \frac{R}{2} \right) = R_\mu^\lambda - \delta_\mu^\lambda \frac{R}{2}$$

οπότε

$$G_{\mu;\lambda}^\lambda = R_{\mu;\lambda}^\lambda - \frac{1}{2} \delta_\mu^\lambda R_{;\lambda} = R_{\mu;\lambda}^\lambda - \frac{1}{2} R_{;\mu}$$

οεδ.

### 1.2.3 Άλυτες Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα σύμβολα Christoffel και ο τανυστής Riemann για τον χωρό-χρονο που περιγράφεται από την μετρική  $ds^2 = dv^2 - v^2 du^2$ .
2. Να γραφούν τα σύμβολα Christoffel για την μετρική

$$ds^2 = dv^2 + [u^2 - v^2] du^2$$

και να βρεθούν οι εξισώσεις των γεωδαισιακών.

3. Να αποδεχθεί ότι ο 2-διάστατος μετρικός χώρος που περιγράφεται από τη μετρική  $ds^2 = dv^2 - v^2 du^2$  είναι ο 2-διάστατος χώρος Minkowski με μετρική  $ds^2 = dx^2 - dy^2$ .
4. Εστω ότι ένας χώρος περιγράφεται από την μετρική

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \frac{1}{13^2} (3dx + 4dy + 12dz)^2$$

να αποδειχθεί ότι είναι ένας 2-διάστατος χώρος και να βρεθούν τέτοιες συντεταγμένες  $\zeta$  και  $\eta$  ώστε να είναι  $ds^2 = d\zeta^2 + d\eta^2$ .

5. Εστω ένας μετρικός χώρος με  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ . Να γραφούν οι εξισώσεις των γεωδαισιακών και να δειχθεί ότι οι σχέσεις:

$$r^2 \frac{d\theta}{ds} = R_0 = \text{σταθερό}$$

$$\left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 1$$

αποτελούν πρώτα ολοκληρώματα κίνησης.

6. Το γραμμικό στοιχείο σε ένα 3-διάστατο χώρο με σύστημα συντεταγμένων  $(x^1, x^2, x^3)$  δίνεται από τη σχέση:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2 (dx^2)^2 + (x^1 \sin x^2)^2 (dx^3)^2$$

Εξετάστε αν ο χώρος είναι επίπεδος.

7. Στην επιφάνεια μιάς 2-σφαίρας ένα διάνυσμα  $\mathbf{A}$  είναι ίσο με  $\mathbf{e}_\theta$  στο  $\theta = \theta_0$  και  $\phi = 0$ . Ποιά είναι η τιμή του  $\mathbf{A}$  μετά την παράλληλη μεταφορά του κατά μήκος του κύκλου  $\theta = \theta_0$ ? Ποιό είναι το μέτρο του  $\mathbf{A}$  μετά την παράλληλη μεταφορά του;
8. Για μια διαγώνια μετρική να δειχθεί ότι τα σύμβολα Christoffel δίνονται από τις σχέσεις:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = 0, \quad \Gamma_{\nu\nu}^\mu = -\frac{1}{2g_{\mu\mu}}g_{\nu\nu,\mu} \quad \Gamma_{\mu\lambda}^\mu = [\ln(g_{\mu\mu})^{1/2}]_{,\lambda}$$

9. Να αποδειχθούν οι σχέσεις:

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta}, \quad g_{\alpha\mu}g_{,\gamma}^{\mu\beta} = -g^{\mu\beta}g_{\alpha\mu,\gamma}$$

$$g_{,\gamma}^{\alpha\beta} = -\Gamma_{\mu\gamma}^\mu g^{\alpha\beta} - \Gamma_{\gamma\mu}^\beta g^{\mu\alpha}, \quad g_{,\alpha} = -gg_{\beta\gamma}g_{,\alpha}^{\beta\gamma} = gg^{\beta\gamma}g_{\beta\gamma,\alpha}$$

10. Δείξτε ότι η απόκλιση ενός διανύσματος είναι:

$$A_{;a}^a = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}A^a)_{,a}$$

11. Δείξτε ότι η Λαπλασιανή ενός βαθμωτού μεγέθους είναι:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\Phi_{,\nu})_{,\mu}$$

12. Να δειχθεί ότι ένας συμμετρικός τανυστής  $T_{ab}$  μπορεί να πάρει την μορφή:

$$T_{ab} = T_{(ab)} = \left[ T_{(ab)} - \frac{1}{4}T_n^n g_{ab} \right] - \frac{1}{4}T_n^n g_{ab}$$

13. Εγκαταστήστε ένα σύστημα συντεταγμένων στην επιφάνεια ενός torus (σαμπρέλλας) και υπολογίστε όλες τις συνιστώσες του μετρικού τανυστή, των συμβόλων Christoffel και του τανυστή Riemann. [ $ds^2 = a^2 d\phi^2 + (b+a \sin \phi)^2 d\theta^2$  με  $a < b$ ].
14. Στους χώρους με λιγότερες από 4 διαστάσεις είναι δυνατόν να βρεθούν απλούστερες εκφράσεις για τον τανυστή Riemann. Υπολογίστε τον τανυστή Riemann
- α) σε 1-διάστατο χώρο.
- β) σε 2-διάστατο χώρο σαν συνάρτηση του μετρικού τανυστή και του βαθμωτού μεγέθους Ricci
- γ) στον 3-διάστατο χώρο σαν συνάρτηση του μετρικού τανυστή και του τανυστή Ricci.
15. Σε ένα 3-διάστατο χώρο με γραμμικό στοιχείο  $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$  να αποδειχθεί ότι οι φωτεινικές γεωδαισιακές δίνονται από τις σχέσεις

$$x = \ell u + \ell', \quad y = m u + m', \quad z = n u + n'$$

όπου  $u$  είναι μια παράμετρος και  $\ell, \ell', m, m', n, n'$  είναι αυθαίρετες σταθερές που ικανοποιούν τη σχέση:  $\ell^2 + m^2 - n^2 = 0$ .

16. Να αποδειχθεί ότι για κάθε τανυστή δεύτερης τάξης ισχύει  $T_{;\mu\nu}^{\mu\nu} = T_{;\nu\mu}^{\mu\nu}$ .  
 17. Να αποδειχθούν οι σχέσεις:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 \quad R_{\alpha\delta\beta\gamma;\nu} + R_{\alpha\delta\nu\beta;\gamma} + R_{\alpha\delta\gamma\nu;\beta} = 0$$

18. Δείξτε ότι ένα χρονοειδές διάνυσμα δεν μπορεί να είναι ορθογώνιο σε ένα άλλο χρονοειδές ή φωτοειδές διάνυσμα.  
 19. Δείξτε ότι δύο φωτοειδή διανύσματα είναι ορθογώνια εάν και μόνο εάν είναι παράλληλα.  
 20. Να δειχθεί ότι ο μηδενισμός του τανυστή Riemann είναι ικανή συνθήκη για να χαρακτηριστεί ένας χωρόχρονος ως χωρόχρονος Minkowski.  
 21. Εστω τα διανύσματα  $T^a = (1, 0, 0, 0)$ ,  $X^a = (0, 1, 0, 0)$ ,  $Y^a = (0, 0, 1, 0)$  και  $Z^a = (0, 0, 0, 1)$ . Να δειχθεί ότι τα μόνα μη-μηδενικά εσωτερικά γινόμενα μεταξύ των διανυσμάτων είναι:

$$T^2 = -X^2 = -Y^2 = -Z^2 = 1$$

Στη συνέχεια ορίζοντας τα διανύσματα:

$$L^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^a + Z^a), \quad N^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^a - Z^a)$$

$$M^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^a + iY^a), \quad \bar{M}^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^a - iY^a)$$

με  $i = \sqrt{-1}$ . Να δειχθεί ότι και τα 4 διανύσματα είναι φωτοειδή και ότι το μόνο μη μηδενικό εσωτερικό γινόμενο είναι:

$$L^a N_a = -M^a \bar{M}_a = 1$$

22. Εστω **A** και **B** δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα εφαπτόμενα σε ένα σημείο σε μία 2-διάστατη επιφάνεια σε ένα  $n$ -διάστατο χώρο ( $n \geq 2$ ). Η βαθμωτή καμπυλότητα Riemann θα δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta} A^\alpha A^\beta B^\gamma B^\delta}{(g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) A^\alpha A^\beta B^\gamma B^\delta}$$

23. Να αποδειχθεί ότι  $g^{\lambda\rho} C_{\lambda\mu\nu\rho} = 0$  όπου  $C_{\lambda\mu\nu\rho}$  είναι ο τανυστής Weyl.  
 24. Εκφράστε τις εξισώσεις του Maxwell σε τανυστική μορφή.  
 25. α) Να αποδειχθεί ότι ένας σύμμορφος (conformal) μετασχηματισμός της μετρικής (δηλ.  $g_{\alpha\beta} \rightarrow f(x^\mu) \bar{g}_{\alpha\beta}$  όπου  $f$  μια αυθαίρετη συνάρτηση των συντεταγμένων) διατηρεί τις γωνίες.  
 β) Να αποδειχθεί ότι όλες οι φωτοειδείς καμπύλες συνεχίζουν να είναι φωτοειδείς μετά από σύμμορφους μετασχηματισμούς της μετρικής.  
 26. Εστω  $A = \det(A_{\mu\nu})$ . Να δειχθεί ότι η  $A$  δεν είναι βαθμωτό μέγεθος και αλλάζει σε μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Επομένως δεν πρέπει να ισχύει  $A_{;\mu} = A_{,\mu}$ . Πως θα πρέπει να ορισθεί τότε το  $A_{;\mu}$ .

27. Ναδειχθεί ότι αν μια γεωδαισιακή είναι χρονοειδής σε ένα σημείο P τότε θα είναι χρονοειδής γεωδαισιακή παντού κατά μήκος της. Το αυτό και για φωτοειδείς ή χωροειδείς γεωδαισιακές.
28. Ναδειχθεί ότι :  $\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u = \mathcal{L}_{[u,v]}$
29. Αν:  $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$  τότε  $F_{[\mu\nu;\lambda]} = 0$ .
30. Πόσες ανεξάρτητες συνιστώσες έχει ο τανυστής Riemann σε ένα n-διάστατο χώρο.
31. Να αποδειχθεί ότι η παραγωγή Lie αντιμετωπίζεται με την σύστολή δεικτών.
32. Να λυθεί η εξίσωση Killing και να βρεθούν τα διαν. πεδία Killing για τη 2-σφαίρα.
33. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση Killing  $\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$  είναι ισοδύναμη με τον μηδενισμό της Lie παραγωγού του μετρικού τανυστή. Ποιά η γεωμετρική ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος.
34. Η μετρική για έναν αξονικά συμμετρικό περιστρεφόμενο αστέρα δέχεται δύο διανύσματα Killing  $\xi_{(t)}$  και  $\xi_{(\phi)}$ . Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν άλλα ανεξάρτητα διανύσματα Killing να αποδειχθεί ότι τα  $\xi_{(t)}$  και  $\xi_{(\phi)}$  αντιμετωπίζονται.
35. Ναδειχθεί ότι κάθε διάνυσμα Killing είναι λύση της εξίσωσης:

$$\xi^{\nu;\lambda}_{;\lambda} + R^{\nu}_{\sigma} \xi^{\sigma} = 0$$

36. Εάν  $\xi$  είναι ένα διάνυσμα Killing ναδειχθεί ότι:

$$\xi_{\mu;\alpha\beta} = R_{\gamma\beta\alpha\mu} \xi^{\gamma}$$

37. Στο χωρόχρονο Minkowski να βρεθούν τα 10 γραμμικά ανεξάρτητα του Killing διανύσματα.
38. Εάν  $\xi(x^{\mu})$  είναι ένα διανυσματικό πεδίο Killing και  $u$  είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα σε μια γεωδαισιακή, ναδειχθεί ότι το  $\xi \cdot u$  είναι σταθερό κατά μήκος της γεωδαισιακής.
39. Να βρεθεί η παράγωγος Lie του μετρικού τανυστή.
40. Να αποδειχθεί ότι οι τύποι που δίνουν τις παραγωγούς Lie μπορούν να γραφούν αντικαθιστώντας τις συνήθεις παραγωγούς με συναλλοίωτες.



## ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

### 2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Einstein

#### 2.1.1 Χρήσιμοι Τύποι

- Εξισώσεις Πεδίου της ΓΘΣ

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \Lambda g_{\alpha\beta} = -kT_{\alpha\beta} \quad \text{όπου} \quad k = \frac{8pG}{c^4}$$

- Γραμμικό Στοιχείο Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

- Εξισώσεις Γεωδαισιακών στο χωρόχρονο Schwarzschild

$$\ddot{r} - \frac{1}{2}v'\dot{r}^2 - re^v\dot{\theta}^2 - re^v\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}e^{2v}v'\dot{t}^2 = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} - \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\theta}\dot{\phi} = 0$$

$$\ddot{t} + v'\dot{r}\dot{t} = 0$$

- Ολοκληρώματα κίνησης στο χωρόχρονο Schwarzschild ( $\theta=0$ )

$$r^2\dot{\phi} = A \quad \text{Στροφορμής}$$

$$e^v\dot{t} = B \quad \text{Ενέργειας}$$

- Μετάθεση του περιηλίου

$$\delta\phi = \frac{6\pi m}{r}$$

- Απόκλιση των φωτεινών ακτίνων

$$\delta = \frac{4m}{r}$$

- Βαρυτική μετάθεση προς το ερυθρό

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{M}{r}$$

- Καθυστέρηση των σημάτων ραдар ( $r_I, r_{II}$  αποστάσεις Γή και Πλανήτη,  $M_\odot, R_\odot$  μάζα και ακτίνα Ηλίου.

$$\Delta T = 4M_\odot \left[ 1 + \log \left( \frac{4r_I r_{II}}{R_\odot^2} \right) \right]$$

- Γεωδαισιακή Απόκλιση

$$\frac{D^2 x^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu_{\alpha\sigma\beta} \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

- Γραμμικό Στοιχείο Reissner-Nordström

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

- Γραμμικό Στοιχείο Kerr

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{2Mr}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2$$

οπου  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  και  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ .

### 2.1.2 Λυμένες Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι οι εξισώσεις Einstein μπορούν να γραφούν ως:

$$R_{\mu\nu} = -k \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

#### Απόδειξη

Οι εξισώσεις Einstein γράφονται:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -k T_{\mu\nu}$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας με  $g^{\rho\nu}$  καταλήγουμε στην

$$2R^\rho_\nu - \delta^\rho_\nu R = -k T^\rho_\nu$$



και με συστολή των δεικτών  $\mu$  και  $\nu$  πέρνουμε  $2R - 4R = -kT$  δηλ.  $R = kT$ .  
Επομένως

$$R_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$$

2. **Αν η αδρανειακή μάζα  $m_i$  δεν ήταν ίση με την βαρυτική μάζα  $m_g$  ποιά θα ήταν η περίοδος ενός απλού εκρεμμούς μήκους  $\ell$  σε απόσταση  $R$  από το κέντρο σφαιρικής μάζας  $M_g$ .**

**Απόδειξη**

Στην Νευτώνεια μηχανική η περίοδος ενός εκρεμμούς είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Από τον β' νόμο του Νεύτωνα όμως γνωρίζουμε ότι

$$m_i g = G \frac{m_g M_g}{R^2}$$

οπότε η περίοδος γίνεται

$$T = 2\pi R \sqrt{\frac{\ell m_i}{m_g M_g G}}$$

3. **Να αποδειχθεί ότι ισχύει ο 3ος νόμος του Kepler για κυκλικές τροχιές γύρω από μια μελανή οπή Schwarzschild.**

**Απόδειξη**

Από τα ολοκληρώματα κίνησης  $r^2 \dot{\phi} = A$  και  $e^v \dot{t} = B$  και απο την εξίσωση των γεωδαισιακών για ακτινική κίνηση δηλ.

$$\ddot{r} - \frac{1}{2}v' \dot{r}^2 - r e^v \dot{\theta}^2 - r e^v \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}e^{2v} v' \dot{t}^2 = 0$$

και θέτοντας

$$\frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{και} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

παίρνω τελικά

$$-r e^v \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}e^{2v} v' \dot{t}^2 = 0$$

άρα

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\dot{\phi}}{\dot{t}}\right)^2 = \frac{e^v}{2} \frac{v'}{r} = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} e^v \\ &= \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = \frac{m}{r^3} \end{aligned}$$

4. **Να γραφεί το γραμμικό στοιχείο του χωρόχρονου Schwarzschild σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων ούτως ώστε το χωρικό τμήμα να είναι ανάλογο με αυτό του Ευκλείδειου χώρου.**

**Απόδειξη**

Το νέο σύστημα συντεταγμένων  $(t', r', \theta', \phi')$  μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση των συντεταγμένων Schwarzschild  $(t, r, \theta, \phi)$  ως εξής:

$$t = t', \quad r = \left(1 + \frac{r_s}{4r'}\right) r', \quad \theta = \theta', \quad \phi = \phi'$$

Οπου  $r_s = 2Gm/c^2$ , οπότε στο νέο σύστημα συντεταγμένων το γραμμικό στοιχείο γράφεται:

$$ds^2 = \left(\frac{1 - r_s/4r'}{1 + r_s/4r'}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_s}{4r'}\right)^4 (dr'^2 + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Οι συντεταγμένες  $(r', \theta, \phi)$  καλούνται *Σφαιρικές Ισοτροπικές* συντεταγμένες. Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  που συνδέονται με τις  $(r', \theta, \phi)$  με τις σχέσεις  $x = r' \sin(\theta) \cos(\phi)$ ,  $y = r' \sin(\theta) \sin(\phi)$  και  $z = r' \cos(\theta)$ . Οπότε το γραμμικό στοιχείο θα γραφεί

$$ds^2 = \left(\frac{1 - r_s/4r'}{1 + r_s/4r'}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_s}{4r'}\right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

όπου  $r'^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Οι συντεταγμένες αυτές ονομάζονται *Ισοτροπικές Καρτεσιανές*.

5. **Να βρεθεί η γωνία απόκλισης μιας φωτεινής ακτίνας που κινείται στο βαρυτικό πεδίο ενός σφαιρικά συμμετρικού σώματος στην Νευτώνεια μηχανική.**

**Απόδειξη**

Στη Νευτώνεια μηχανική η εξίσωση κίνησης μιας φωτεινής ακτίνας μπορεί να υπολογισθεί για παράδειγμα από την διατήρηση της ενέργειας. Δηλαδή

$$\dot{x} - \frac{2GM}{r} = c^2$$

όπου  $r$  είναι η απόσταση από το κέντρο του σώματος και  $M$  η μάζα του. Αν χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\phi$  στο επίπεδο κίνησης τότε:

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = c^2 + \frac{2GM}{r}$$

και λόγω του ολοκληρώματος της στροφορμής  $r^2 \dot{\phi} = A$  οι προηγούμενες εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως:

$$u^2 + u^2 = \frac{1}{A^2} (c^2 + 2GMu)$$

όπου  $u = 1/r$  και παραγωγίζοντας

$$u'' + u = \frac{GM}{A^2}$$

όπου η οξεία σημαίνει παραγωγή ως προς την γωνία  $\phi$ .

Αν η επίδραση του βαρυτικού πεδίου δεν υπήρχε τότε η εξίσωση θα γραφόταν  $u'' + u = 0$  με προφανή λύση  $u = \sin(\phi)/R$  που παριστάνει ευθεία γραμμή, ( $R$  είναι σταθερά συνδεόμενη με το ολοκλήρωμα της στροφορμής  $A = Rc$ ). Οπότε η λύση στη γενική περίπτωση μπορεί να γραφεί ως:

$$u = \frac{1}{R} \sin(\phi) + \frac{GM}{c^2 R^2}$$

σε Καρτεσιανές συντεταγμένες η λύση γράφεται

$$y = R - \frac{GM}{c^2 R} (x^2 + y^2)^{1/2}$$

και για μεγάλα  $x$

$$y \approx R - \frac{GM}{c^2 R} |x|$$

οπότε η γωνία της απόκλισης στη Νεωτώνεια μηχανική είναι:

$$\Delta\phi = \frac{2GM}{c^2 R}$$

που είναι το **μισό** απ' όσο προβλέπει η ΓΘΣ.

**6. Δύο ρολόγια κινούνται σε απόσταση  $r_1 = 6M$  και  $r_2 = 10M$  από μία μελανή οπή Schwarzschild.**

**α') Ποιά είναι η περίοδος περιφοράς που μετράει το κάθε ρολόι ως προς την περίοδο που μετράει ένας παρατηρητής στο άπειρο.**

**β') Αν το πείραμα το επαναλαμβάναμε στη Γή με δύο ρολόγια σε τροχιές  $r_1 = 10\text{km}$  και  $r_2 = 20\text{km}$ , και η ακρίβεια των ρολογιών είναι της τάξης των  $10^{-13}\text{sec}$  θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε διαφορές μετά από μία πλήρη περιφορά του κάθε ρολογιού·**

**Μάζα Γής :  $M_{\oplus} = 5.98 \times 10^{24}\text{kg}$ , ακτίνα Γής :  $R_{\oplus} = 6370\text{km}$ .**

**Απόδειξη**

**α)** Ο ίδιος χρόνος των περιστρεφόμενων ρολογιών δίνεται από τη σχέση:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

που γράφεται:

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

Για απλότητα τη θεωρήσουμε ότι τα ρολόγια κινούνται στο ισημερινό επίπεδο  $\theta = 0$ . Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τον **τρίτο νόμο το Kepler**:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{M}{R^3} \equiv \Omega^2 = \frac{2\pi}{P}$$

καταλήγουμε στη σχέση:

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{3M}{R}.$$

Στις συγκεκριμένες τροχιές θα έχουμε:

$$\left(\frac{d\tau_1}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{3M}{r_1} = \frac{1}{2}.$$

και

$$\left(\frac{d\tau_2}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{3M}{r_2} = \frac{5}{7}.$$

Δηλαδή στην πρώτη περίπτωση θα είναι:  $P_\infty^{(1)} = 2\pi \times 6\sqrt{6}M$  και  $P_1 = 1/\sqrt{2}P_\infty^{(1)} = 12\pi\sqrt{3}M$ , ενώ στη δεύτερη  $P_\infty^{(2)} = 2\pi \times 10\sqrt{10}M$  και  $P_2 = \sqrt{5/7}P_\infty^{(2)} = 20\pi\sqrt{50/7}M$ .

**β** Για δύο ρολόγια σε τροχιές  $h = 10km$  και  $2h = 20km$  θα πάρουμε

$$\left(\frac{d\tau_1}{d\tau_2}\right)^2 = \frac{1 - \frac{3M_\oplus}{R_\oplus + h}}{1 - \frac{3M_\oplus}{R_\oplus + 2h}} \approx 1 - \frac{3M_\oplus}{R_\oplus + h} + \frac{3M_\oplus}{R_\oplus + 2h}$$

και τελικά

$$d\tau_1 = (1 - 1.6 \times 10^{-12}) d\tau_2$$

που με την δοθείσα ακρίβεια μέτρησης των ρολογιών είναι δυνατόν να μετρηθεί.

### 2.1.3 Άλυτες Ασκήσεις

1. Ναδειχθεί ότι αν η απόσταση δύο γειτονικών συμβάντων είναι χωροειδής τότε η ευθεία κοσμική γραμμή που τα ενώνει αντιστοιχεί στην μακρύτερη ίδια απόσταση μεταξύ των συμβάντων.
2. Να ευρεθεί ποιά από τα παρακάτω διανύσματα είναι χρονοειδή, φωτοειδή ή χωροειδή:  $(1,3,0,0)$ ,  $(3,3,0,0)$ ,  $(3,-3,0,0)$ ,  $(-3,3,0,0)$ ,  $(0,3,0,0)$ ,  $(3,1,0,0)$ .
3. Μια μπάλλα εξφενδονίζεται προς τα πάνω και επιστρέφει στο χέρι αυτού που την πέταξε μετά από χρόνο  $t$ . Χρησιμοποίησε τοπικές συτεταγμένες με τον  $x$  άξονα να δείχνει προς τα πάνω και τον χρόνο να αρχίζει την στιγμή που η μπάλλα εξφενδονίζεται. Ποιές είναι οι συνιστώσες της μπάλλας στο ανώτερο σημείο και πότε θα επιστρέψει σ'αυτόν που την εξφενδόνισε; Ποιά είναι η καμπύλωση της τροχιάς στον χωρό-χρονο;

4. Ποιά είναι η ακτίνα Schwarzschild για ένα γαλαξία  $10^{11} M_{\odot}$  (σε παρσεκς), τον Ηλιο (σε Km), την Γή (σε Km) και ένα πρωτόνιο (σε m).
5. Ένα αστέρι έχει την μάζα του Ηλιου και ακτίνα 3 Km πόση είναι η σχετική διόρθωση στην επιφάνεια του.
6. Εάν η "σταθέρα" της βαρύτητας  $G$  δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται αργά με τον χρόνο ναδειχθεί ότι η ακτινική απόσταση των πλανητών από τον Ηλιο μεταβάλλεται ανάλογα του  $1/G$ .
7. Ναδειχθεί ότι σε χωρόχρονο χωρίς βαρυτικές πηγές οι εξισώσεις Einstein ανάγονται στην  $R_{\mu\nu} = 0$ .
8. Υπολογίστε τον τανυστή του Riemann για το μετρικό τανυστή του Schwarzschild. Πού έχει ανώμαλα σημεία.
9. Βρείτε δύο διανύσματα Killing
  - α') του χωρόχρονου του Schwarzschild
  - β') του χωρόχρονου του Kerr.
10. Υπολογίστε τον τανυστή του Riemann για το χωρόχρονο των Reissner-Nördström. Επαληθεύστε τις εξισώσεις Einstein στο κενό.
11. Ναδειχθεί ότι οι Νευτώνειες εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου σε ένα Νευτώνειο δυναμικό  $\Phi$  μπορούν να γραφούν σαν γεωδαισιακές εξισώσεις στον 4-διάστατο χωρόχρονο. Να υπολογισθούν τα σύμβολα Christoffel και ο τανυστής Riemann και ναδειχθεί ότι δεν προέρχονται από κάποια μετρική.
12. Εξετάζοντας την σχετική επιτάχυνση μιας οικογένειας από τροχιές σωματιδίων στην Νευτώνεια βαρύτητα και συγκρίνοντας με το Νευτώνειο όριο της εξίσωσης γεωδαισιακής απόκλισης να βρεθεί η αντιστοιχία:

$$R_{\alpha 0 \beta 0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$$

μεταξύ του Νευτώνειου δυναμικού και του τανυστή Riemann.

13. Ένας στατικός χωρόχρονος παράγεται από ένα τέλειο ρευστό. Ναδειχθεί ότι η 4-ταχύτητα του ρευστού είναι παράλληλη στο διάνυσμα Killing του χρόνου.
14. Στο χωρόχρονο Schwarzschild από τις εξισώσεις των γεωδαισιακών να αποδειχθεί η σχέση

$$\left[ \frac{d}{d\phi} \left( \frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{B^2 - 1}{A^2} + \frac{2M}{A^2 r} + \frac{2M}{r^3}$$

όπου  $A$  και  $B$  τα ολοκληρώματα στροφορμής και ενέργειας.

15. Να υπολογισθεί η ακτινική συνιστώσα στην οποία το φως ταξιδεύει σε κυκλική τροχιά γύρω από ένα σώμα μάζας  $M$  χρησιμοποιώντας
  - α') Νευτώνεια μηχανική
  - β') τη ΓΘΣ.
 Να εκφρασθεί το αποτέλεσμα σαν πολλαπλάσιο της ακτίνας Schwarzschild.
16. Να υπολογισθεί η βαρυτική μετάθεση προς το ερυθρό για τη γραμμή εκπομπής του ποτάσιου (769.9 nm) που εκπέμπεται από την επιφάνεια του Ηλιου.

17. Ψπολογίστε την ακτίνα του ορίζοντα μια μελανής οπής Schwarzschild με μάζα  $10^8 M_\odot$ . Να δειχθεί ότι η ταχύτητα ενός σώματος κινούμενου στην μικρότερη ευσταθή τροχιά γύρω από την μελανή οπή είναι  $c/2$ . Στην συνέχεια να υπολογισθεί η περίοδος όπως μετρείται από έναν ελευθερα κινούμενο τοπικό παρατηρητή και από έναν άλλον που βρίσκεται μακριά από τη μελανή οπή.
18. Ο παρατηρητής Α βρίσκεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας  $25\text{Km}$  γύρω από ένα μη περιστρεφόμενο αστέρι νετρονίων μάζας  $1.4M_\odot$ , και ακτίνας  $10\text{km}$ . Ο παρατηρητής Β βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια του αστεριού και ο παρατηρητής Γ στο άπειρο. Ποιά είναι η περίοδος της κυκλικής κίνησης που μετρά ο κάθε ένας από τους παρατηρητές για τον παρατηρητή Α. Δίνονται:  $M_\odot = 1.989 \times 10^{33}\text{gr}$ ,  $G = 6.67 \times 10^{-8}\text{cm}^3/\text{g sec}^2$ ,  $c = 3 \times 10^{10}\text{cm/s}$
19. Ένα ρολόι βρίσκεται σε κυκλική τροχιά γύρω από μια μελανή οπή Schwarzschild σε απόσταση  $r = 10M$ .  
 α) Πόσος χρόνος κυλά με αυτό το ρολόι για μια περιφορά.  
 β) Αν στέλνει ένα σήμα σε κάποιο μακρινό παρατηρητή μετά από κάθε περιφορά. Τί χρονικό διάστημα μετράει αυτός ο παρατηρητής για την περιφορά του ρολογιού.  
 γ) Ένα τρίτο ρολόι βρίσκεται ακίνητο (χρησιμοποιεί πυραύλους) σε απόσταση επίσης  $r = 10M$ . Πόσος χρόνος κυλά μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του πρώτου ρολογιού.
20. Να υπολογισθεί η μετάθεση του περιάστρου για τα διπλά συστήματα:  
 α) Μάζες  $M_1 = M_2 = M_\odot$ , απόσταση  $10^7\text{cm}$  και περίοδο  $0.0122\text{ sec}$   
 β) Μάζες  $M_1 = 0.76M_\odot$ ,  $M_2 = 0.57M_\odot$ , απόσταση  $1.5 \times 10^{11}\text{ cm}$  και περίοδο 8 ώρες (W UMa)  
 γ) Μάζες  $M_1 = 1.07M_\odot$ ,  $M_2 = 0.041M_\odot$ , απόσταση  $1.6 \times 10^{10}\text{cm}$  και περίοδο 17 min (AM CVn)
21. Να υπολογισθεί η μετάθεση του περιηλίου της τροχιάς ανα έτος των πλανητών: Αφροδίτη ( $1.1 \times 10^{13}\text{cm}$ ,  $1.9 \times 10^7\text{sec}$ ), Γη ( $1.5 \times 10^{13}\text{cm}$ ,  $3.2 \times 10^7\text{sec}$ ), Αρη ( $2.3 \times 10^{13}\text{cm}$ ,  $5.9 \times 10^7\text{sec}$ ).
22. Δείξε ότι στο χωρόχρονο Kerr η γεωδαισιακή που περνά από το ισημερινό επίπεδο ( $\theta = \pi/2$ ) και έχει  $p^\theta = 0$  (δηλαδή εφάπτεται του επιπέδου σ αυτό το σημείο) θα παραμείνει για πάντα σ αυτό το επίπεδο.
23. Ο Ήλιος περιστρέφεται με περίοδο 25 ημερών και έχει μάζα  $M = 2 \times 10^{33}\text{gr}$  και ακτίνα  $R = 7 \times 10^{10}\text{cm}$ . Αν καταρρεύσει θα δημιουργήσει μια μελανή οπή Kerr με μάζα  $M$  και στροφορμή  $J$ . Πόση θα είναι η γωνιακή παράμετρος Kerr,  $a = J/M$  σε cm. Πόσος είναι ο λόγος  $a/M$ .
24. Να δείξετε ότι η επιφάνεια του ορίζοντα μιας μελανής οπής Kerr είναι :

$$A = 4\pi M(r_+^2 + a^2).$$

25. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ της  $M_{ir}$  και της επιφάνειας του ορίζοντα της μελανής οπής Kerr.

26. Για τη μελανή οπή Kerr ναδειχθεί ότι για σταθερή μάζα  $M$  η επιφάνεια του ορίζοντα γίνεται μέγιστη όταν  $a = 0$  (Schwarzschild). Αντίθετα για σταθερή επιφάνεια του ορίζοντα η μάζα γίνεται ελάχιστη όταν  $a = 0$ .
27. Να αποδειχθεί ότι:

$$M^2 = M_{ir}^2 + \frac{S^2}{4M_{ir}^2}$$

28. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης (δηλ. οι εξισώσεις που συνδέουν τα  $t, r, t$ ) για σωματίδιο που πέφτει ακτινικά σε μια μελανή οπή Schwarzschild.  
α') Αν το σωματίδιο ξεκινά από ηρεμία σε απόσταση  $R$ .  
β') Αν το σωματίδιο ξεκινά από ηρεμία από το άπειρο.
29. Ένας παρατηρητής περιγράφει την ακτινική του πτώση σε μια μελανή οπή. Πριν περάσει τον ορίζοντα Schwarzschild η συχνότητα εκπομπής αρχίζει να μετατίθεται βαρυτικά με μια χρονική εξάρτηση  $\exp(-t/A)$ . Οπου  $t$  ο συντεταγμένος χρόνος. Μήπως από τον υπολογισμό του  $A$  μπορεί να υπολογισθεί η μάζα της μελανής οπής;
30. Ένας φυσικός δορυφόρος μάζας  $m$  και ακτίνας  $R$  περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά γύρω από ένα πλανήτη μάζας  $M$ . Ναδειχθεί ότι αν ο δορυφόρος πλησιάσει τον πλανήτη κοντύτερα από

$$R_{crit} = R\left(\frac{2M}{m}\right)^{1/2}$$

τότε θα ερχίσουν να αποκολλώνται βράχοι από την επιφάνεια του λόγω των παλιρροιογόνων δυνάμεων. (Η απόσταση  $r_{crit}$  ονομάζεται οριο Roche).

31. Να υπολογισθεί η παλιρροιογόνος δύναμη που δρά σε ένα αστροναύτη τη στιγμή που ακουμπούν τα πόδια του τον ορίζοντα μια μελανής οπής μάζας  $2 \times 10^{33}$  gr.
32. Εάν κάποιος πέφτει ελεύθερα ακτινικά προς μία μελανή οπή μάζας  $10M_\odot$  θα αισθανθεί μια παλλοιοριακή δύναμη πάνω του που θα τείνει να τον διαμελίσει. Να υπολογισθεί η απόσταση από το κέντρο της μελανής οπής στη οποία η παλλοιοριακή επιτάχυνση θα γίνει  $400ms^{-2}m^{-1}$ . Σε αυτή την απόσταση ο ταξιδιώτης θα διαμελισθεί.
33. Να αποδειχθεί ο τύπος της γεωδαισιακής απόκλισης

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu_{\alpha\sigma\beta} \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

34. Έστω μια επιφάνεια  $f(t, x, y, z) = 0$  στον 4-διάστατο χώρο μπορούμε να ορίζουμε ένα κάθετο (normal) διάνυσμα στην επιφάνεια το  $n_\mu = f_{,\mu}$ . Η επιφάνεια θα λέγεται φωτοειδής αν  $n_\mu n^\mu = 0$ . Ναδειχθεί ότι η επιφάνεια  $r - r_s = 0$  είναι φωτοειδής στο χωρόχρονο Schwarzschild. Επίσης ότι οι επιφάνειες  $r - r_\pm = 0$  είναι φωτοειδείς στο χωρόχρονο Kerr.

**2.2 ΒΑΡΥΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ**

1. Ναδειχθεί ότι στην γραμμική θεωρία οι συνιστώσες του τανυστή Riemann είναι:

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\nu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu})$$

2. Ναευρεθούν οι εξισώσεις πεδίου της γραμμικής θεωρίας.
3. Αν η  $\phi_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \cos(k_\alpha x^\alpha)$  είναι μια λύση των εξισώσεων πεδίου της γραμμικής θεωρίας να αποδειχθεί ότι το  $k_\alpha$  είναι φωτοειδές διάνυσμα και ότι είναι κάθετο στον  $A_{\mu\nu}$ .
4. Ναυπολογισθεί ο τανυστής τετραπολικής ροπής ενός ομογενούς σώματος που έχει σχήμα ελλειψοειδούς.
5. Ναυπολογισθεί ο τανυστής τετραπολικής ροπής για ένα ζεύγος δύο σωμάτων μάζας  $m_1$  και  $m_2$  που βρίσκονται σε απόσταση  $r$ .