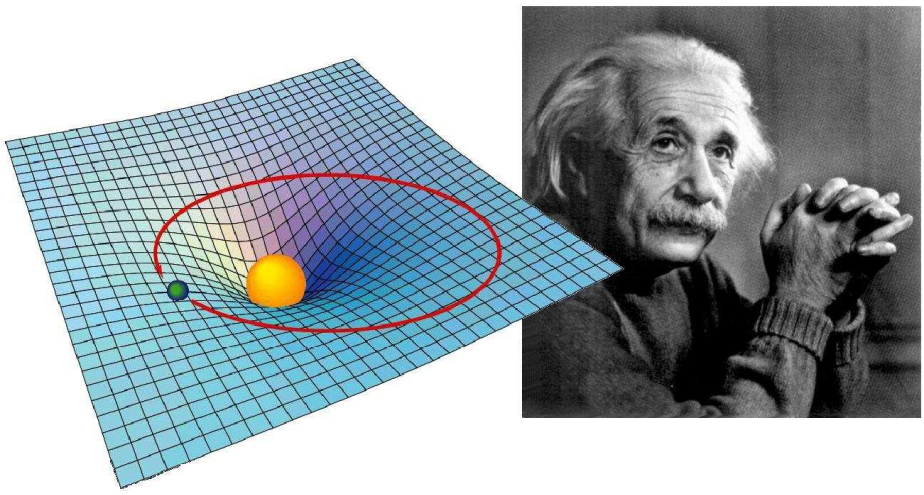
Κώστας Δ. Κόκκοτας

Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

– Σημειώσεις για τους φοιτητές –



13 Φεβρουαρίου 2008

Περιεχόμενα

1 Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΧΩΡΩΝ 1
1.1 ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ 1
1.2 ΤΑΝΥΣΤΕΣ 2
1.2.1 Τανυστική Άλγεβρα και Συμμετρίες 5
1.2.2 Τανυστικές Πυκνότητες 6
1.3 ΣΥΝΑΛΛΟΙΩΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ 7
1.3.1 Κανόνες της συναλλοίωτης παραγώγισης 9
1.4 ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ 10
1.5 Ο ΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΑΝΥΣΤΗΣ 14
1.5.1 Η ορίζουσα του μετρικού τανυστή 17
1.6 ΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑ CHRISTOFELL 18
1.7 ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ 20
1.7.1 Χαρακτηρισμός των γεωδαισιακών 25
1.7.2 Φωτοειδείς γεωδαισιακές 26
1.7.3 Η αφινική παράμετρος 26
1.8 Ο ΤΑΝΥΣΤΗΣ RIEMANN 27
1.8.1 Συμμετρίες του τανυστή Riemann 27
1.9 ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 31

2 Η ΦΥΣΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΧΩΡΩΝ 35
2.1 Ο ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ - ΟΡΜΗΣ 35
2.2 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL 37

3 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΕΔΙΟΥ ΤΟΥ EINSTEIN 39
3.1 ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΒΑΡΥΤΗΤΑ 39
3.2 Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ 40
3.2.1 Το πείραμα του Dicke 41
3.3 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΒΑΡΥΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ 42
3.3.1 Εξισώσεις Einstein 44
3.3.2 Το Νευτώνιο όριο 45

4 ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΕΔΙΟΥ ΤΟΥ EINSTEIN 49
4.1 Η ΛΥΣΗ SCHWARSCHILD 49
4.1.1 Οι εξισώσεις των γεωδαισιακών στο χωρόχρονο Schwarzschild 53
4.1.2 Μελανή Οπή Schwarzschild 56
4.1.3 Οι συντεταγμένες Eddington-Finkelstein 59
4.1.4 Οι συντεταγμένες Kruskal-Szekeres 60
4.1.5 Η λύση των Tolman-Oppenheimer-Volkov 61
4.1.6 Η λύση των Reissner-Nordstrøm 64
4.2 Η ΛΥΣΗ KERR 65

5 ΤΑ ΚΛΑΣΙΚΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ 71
5.1 Η ΜΕΤΑΘΕΣΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΗΛΙΟΥ ΤΩΝ ΠΛΑΝΗΤΩΝ 71
5.2 Η ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ ΦΩΤΟΣ 73
5.3 Η ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΜΕΤΑΘΕΣΗ ΠΡΟΣ ΤΟ ΕΡΥΘΡΟ 76
5.4 Η ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΤΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ RADAR 77

6 ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗ 81
6.1 ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗ 81
6.2 ΛΕΥΚΟΙ ΝΑΝΟΙ 82
6.3 ΑΣΤΕΡΕΣ ΝΕΤΡΟΝΙΩΝ 83

7 ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ 87
7.1 ΑΣΘΕΝΗ ΒΑΡΥΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ 88
7.2 ΒΑΡΥΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ 90
7.2.1 Η επίδραση των βαρυτικών κυμάτων 91
7.2.2 Ενέργεια των βαρυτικών κυμάτων 93
7.2.3 Εκπομπή της βαρυτικής ακτινοβολίας 94
7.3 Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΩΝ ΒΑΡΥΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ 94
7.4 Η ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΤΩΝ ΒΑΡΥΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ 96
7.5 ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ ΒΑΡΥΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ 101
7.5.1 Συγκλίνοντα Ζεύγη Αστέρων Νετρονίων ή/και Μελανών Οπών 101
7.5.2 Βαρυτική Κατάρρευση 104
7.5.3 Ταλαντώσεις και Αστάθειες Αστέρων Νετρονίων 104
7.5.4 Βαρυτικά Κύματα απο τη Μεγάλη Έκρηξη 106

Α΄ ΠΙΝΑΚΑΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ 109

Αναφορές 111

Ευρετήριο 113

1

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΧΩΡΩΝ

1.1 ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Το γεωμετρικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο στηρίζεται η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας είναι η 4-διάστατη *πολλαπλότητα*. Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε ένα όχι αυστηρά μαθηματικό ορισμό της πολλαπλότητας βασιζόμενοι κυρίως στις ιδιότητές της.

Μία n-διάστατη πολλαπλότητα, έστω M, είναι ένας χώρος n διαστάσεων για κάθε σημείο του οποίου μπορούμε να ορίσουμε μια n-άδα πραγματικών αριθμών $x^1, x^2, ..., x^n$ (συντεταγμένες) έτσι ώστε να υπάρχει μια αντιστοιχία ένα προς ένα μεταξύ του κάθε σημείου της πολλαπλότητητας και της n-άδας που του αντιστοιχεί. Η πολλαπλότητα δεν καλύπτεται κατ' ανάγκην από ένα σύστημα συνεταγμένων αλλά ούτε και υπάρχει κάποιο προτιμητέο σύστημα. Στην πράξη έχουμε μια συλλογή από συστήματα συντεταγμένων όπου το καθένα καλύπτει και μια περιοχή της M. Όταν δύο συστήματα συνετεταγμένων επικαλύπτονται τότε υπάρχουν συστήματα εξισώσεων που δίνουν τις συντεταγμένες ενός σημείου στο ένα σύστημα ως συνάρτηση των συντεταγμένων για το ίδιο σημείο από το άλλο σύστημα. Αν για παράδειγμα οι συνεταγμένες x^μ καλύπτουν μια περιοχή U και οι συντεταγμένες $x^{\mu'}$ καλύπτουν μια περιοχή U' και υπάρχει μια κοινή περιοχή των δύο περιοχών U και U', τότε οι συνιστώσες ενός τυχαίου σημείου P της κοινής περιοχής συνδέονται απο εξισώσεις της μορφής

$$x^{\mu'} = x^{\mu'}\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \quad \text{για} \quad \mu' = 1, ..., n \tag{1.1}$$

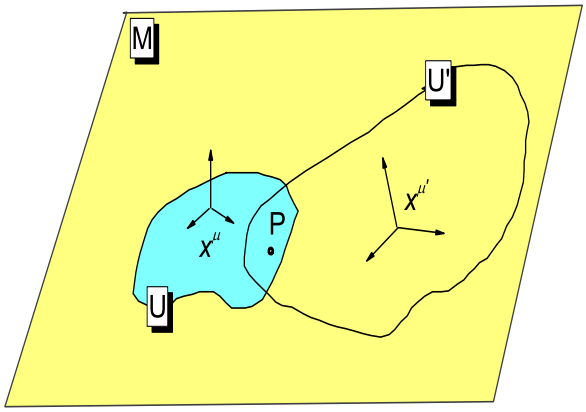
αλλά και τις αντίστροφες τους

$$x^{\mu} = x^{\mu}\left(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'}\right) \quad \text{για} \quad \mu = 1, ..., n \tag{1.2}$$

Αν οι παραπάνω συναρτήσεις είναι διαφορίσιμες δηλαδή υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \quad \text{και} \quad \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} \tag{1.3}$$

τότε η πολλαπλότητα M θα ονομάζεται *διαφορίσιμη πολλαπλότητα*. Ο $n \times n$ πίνακας $A^{\mu'}_{\nu} = \partial x^{\mu'}/\partial x^{\nu}$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας του μετασχηματισμού (1.1), ενώ ο μετασχηματισμός (1.2) ορίζει τον αντίστροφο μετασχηματισμό, η ύπαρξη του οποίου εγγυάται ότι ο πίνακας $A^{\mu'}_{\nu}$ είναι αντιστρέψιμος, ή καλύτερα ότι στην κοινή περιοχή η ορίζουσα $\det |A^{\mu'}_{\nu}|$ είναι διάφορη του μηδενός.



Σχήμα 1.1.

1.2 ΤΑΝΥΣΤΕΣ

Αν θεωρήσουμε μια καμπύλη που διέρχεται από κάποιο σημείο Α σε ένα χώρο (μια πολλαπλότητα) n διαστάσεων. Η καμπύλη αυτή θα καθορίζεται από n συναρτήσεις μιας βαθμωτής ποσότητας λ της μορφής

$$x^{\mu} = z^{\mu}(\lambda)\,. \tag{1.4}$$

Αν στο σημείο A αντιστοιχεί η τιμή της παραμέτρου λ τότε σε ένα διπλανό σημείο A' η τιμή της παραμέτρου θα είναι $\lambda + d\lambda$. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε ως **εφαπτόμενο διάνυσμα** v^{μ} στο σημείο Α το

$$v^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\,. \tag{1.5}$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα v^{μ} που ορίζεται από την παραπάνω σχέση είναι ένα **ανταλλοίωτο διάνυσμα**.

Ένας μετασχηματισμός από το σύστημα x^{μ} σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $\tilde{x}^{\mu}$ ορίζεται από τις n εξισώσεις :

$$\tilde{x}^\mu = f^\mu(x^\nu) \qquad \mu,\nu = 0,1,...,n-1 \tag{1.6}$$

ενώ ο αντίστροφος του θα είναι:

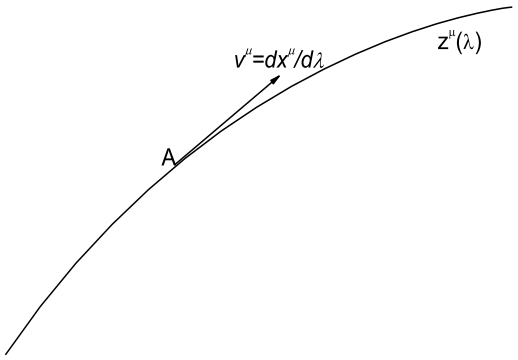
$$x^\mu = g^\mu(\tilde{x}^\nu) \qquad \mu,\nu = 0,1,...,n-1 \tag{1.7}$$

Οι μετσχηματισμοί αυτοί είναι τότε και μόνον τότε δυνατοί αν οι Ιακωβιανές τους είναι διάφορες του μηδενός, δηλαδή αν

$$\det|\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}| \neq 0 \quad \text{και} \quad \det|\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu}| \neq 0\,. \tag{1.8}$$

Ένα απειροστό διάνυσμα dx^ν που ορίζεται σ' ένα σύστημα x^μ θα μετασχηματίζεται σ' ένα άλλο σύστημα $\tilde{x}^\mu$ ως

$$d\tilde{x}^\mu = \sum_\nu \frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu = \sum_\nu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu \quad \text{για} \quad \nu = 0,1,...,n-1 \tag{1.9}$$



Σχήμα 1.2.

Έστω ότι το ανταλλοίωτο διάνυσμα v^μ έχει ορισθεί σε ένα σύστημα συντεταγμένων x^μ, τότε οι συνιστώσες του σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων, έστω το $\tilde{x}^\mu$, θα δίνονται από μετασχηματισμούς της μορφής

$$\tilde{v}^\mu = \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\lambda} = \sum_\nu \frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \sum_\nu \frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}v^\nu \tag{1.10}$$

τούτο είναι δυνατόν επειδή η παράμετρος λ είναι βαθμωτό μέγεθος και κατά συνέπεια η ποσότητα $d\lambda$ είναι αμετάβλητη κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων, οπότε προκύπτει η σχέση (1.10).

Αν δοθεί μια βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x)$ σε ένα σύστημα συνεταγμένων x^μ τότε οι n μερικοί παράγωγοι $\partial\phi/\partial x^\mu$ μετασχηματίζονται στο νέο σύστημα συνεταγμένων ως

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^\mu} = \sum_\nu \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\mu} \tag{1.11}$$

Μια n-αδα ποσοτήτων $b_\mu = \{b_0, b_1, ..., b_{n-1}\}$ που μετασχηματίζεται όπως οι μερικοί παράγωγοι μιας βαθμωτής συνάρτησης ονομάζεται **συναλλοίωτο διάνυσμα**. Οι σχέσεις μετασχηματισμού με βάση την (1.11) είναι:

$$b_\mu = \sum_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\mu}\tilde{b}_\nu\,. \tag{1.12}$$

Ένα παράδειγμα συναλοιώτου διανύσματος είναι το grad μιας βαθμωτής ποσότητας $\phi(x)$. [1] [2]

Τα βαθμωτά μεγέθη και τα διανύσματα (συναλλοίωτα και ανταλλοίωτα) είναι ειδικές περιπτώσεις μια ευρύτερης κατηγορίας γεωμετρικών ποσοτήτων που μετσχηματίζονται με βάση τους προηγούμενους κανόνες. Αυτές οι ποσότητες καλούνται *τανυστές*. Τα βαθμωτά μεγέθη είναι τανυστές μηδνικής τάξης ενώ τα διανύσματα είναι τανυστές πρώτης τάξης.

Θα ονομάζουμε *ανταλλοίωτο τανυστή 2ης τάξης*, σε ένα n-διάστατο χώρο, την ποσότητα $T^{\mu\nu}$ η οποία έχει n^2 συνιστώσες και μετασχηματίζεται ώς

$$\tilde{T}^{\alpha\beta} = \frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu}T^{\mu\nu}\,. \tag{1.13}$$

Κατ' ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και τους τανυστές 2ης τάξης $T_{\mu\nu}$ (*συναλλοίωτος*) και T^μ_ν (*μεικτός*) που μετασχηματίζονται ώς

$$\tilde{T}^\alpha_\beta = \frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\beta}T^\mu_\nu \quad \text{και} \quad \tilde{T}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\beta}T_{\mu\nu} \tag{1.14}$$

Τέλος θα ορίζουμε ώς τανύστή τάξης $m+k$ σε ένα χώρο n διαστάσεων μια ποσότητα που έχει n^{m+k} συνιστώσες και μετασχηματίζεται ώς

$$\tilde{T}^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_k} = \frac{\partial\tilde{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\ldots\frac{\partial\tilde{x}^{\mu_m}}{\partial x^{\alpha_m}}\,\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial\tilde{x}^{\nu_1}}\ldots\frac{\partial x^{\beta_k}}{\partial\tilde{x}^{\nu_k}}T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\beta_1\ldots\beta_k}\,. \tag{1.15}$$

Μια χρήσιμη ποσότητα που είναι το *δέλτα του Kronecker* που ορίζεται ώς

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases} \tag{1.16}$$

και μετασχηματίζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\sum_\alpha \frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu} = \delta^\mu_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\alpha}\,. \tag{1.17}$$

[1] Τα συναλλοίωτα διανύσματα ονομάζονται και *1-μορφές*.

[2] Αν τα ανταλλοίωτα διανύσματα αποτελούν στοιχεία ενός εφαπτόμενου χώρου $T_p(M)$ σε ένα σημείο p μιας πολλαπλότητας M, τα συναλλοίωτα διανύσματα αποτελούν στοιχεία του συνεφαπτόμενου ή δυικού χώρου $T^*_p(M)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένα συναλλοίωτο διάνυσμα A_μ έχει συνιστώσες $(xy, 3y, yz)$ σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων $(x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$. Να βρεθούν οι συναλλοίωτες συνιστώσες του σε σφαιρικές συντεταγμένες $(r, \theta, \phi) = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$.

Απόδειξη

Οι συνιστώσες του διανύσματος στις καρτεσιανές συντεταγμένες είναι $A_1 = xy = x^1x^2$, $A_2 = 3y = 3x^2$ και $A_3 = yz = x^2x^3$ οπότε στο νέο σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες θα δίνονται από τη σχέση

$$\tilde{A}_k = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^k} A_j = \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^k} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^k} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^k} A_3$$

οπότε στην ουσία απαιτείται ο υπολογισμός των στοιχείων $\partial x^j/\partial \tilde{x}^k$ του Ιακωβιανού πίνακα του μετασχηματισμού. Γνωρίζουμε τους τύπους μετασχηματισμού των καρτεσιανών σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} x^1 &= r\sin\theta\cos\phi = \tilde{x}^1 \sin\tilde{x}^2 \cos\tilde{x}^3 \\ x^2 &= r\sin\theta\sin\phi = \tilde{x}^1 \sin\tilde{x}^2 \sin\tilde{x}^3 \\ x^3 &= r\cos\theta = \tilde{x}^1 \cos\tilde{x}^2 \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^1} A_3 \\ &= \sin\tilde{x}^2 \cos\tilde{x}^3 x^1 x^2 + 3\sin\tilde{x}^2 \sin\tilde{x}^3 x^2 + \cos\tilde{x}^2 x^2 x^3 \\ &= (\tilde{x}^1)^3 \sin^3\tilde{x}^2 \sin\tilde{x}^3 \cos^2\tilde{x}^3 + 3x^1 \sin^2\tilde{x}^2 \sin^2\tilde{x}^3 \\ &+ (x^1)^2 \sin\tilde{x}^2 \cos^2\tilde{x}^2 \sin\tilde{x}^3 \qquad (1.18) \\ \tilde{A}_2 &= \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^2} A_3 \\ &= \ldots \qquad (1.19) \\ \tilde{A}_3 &= \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^3} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^3} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^3} A_3 \\ &= \ldots \qquad (1.20) \end{aligned}$$

1.2.1 Τανυστική Άλγεβρα και Συμμετρίες

- Ο γραμμικός συνδυασμός δύο τανυστών τάξης m του ιδίου τύπου και *ορισμένων στο ίδιο σημείο του χώρου* είναι ένας τανυστής τάξης m π.χ

$$T_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bS_{\mu\nu}\,. \qquad (1.21)$$

- Το τανυστικό γινόμενο δύο τανυστών (πολλαπλασιασμός) τάξης m και n (που ορίζονται στο ίδιο σημείο του χώρου) είναι ένας τανυστής τάξης $m + n$, για παράδειγμα το τανυστικό γινόμενο δύο διανυσμάτων A^μ και B^ν, είναι

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu \quad \text{ή} \quad T^\mu_\nu = A^\mu B_\nu \quad \text{ή} \quad T_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu \tag{1.22}$$

κατ' αναλογία το τανυστικό γινόμενο των τανυστών $R^\kappa_{\mu\nu}$ και S^β_α έχει ως αποτέλεσμα

$$T^{\kappa\beta}_{\mu\nu\alpha} = R^\kappa_{\mu\nu} S^\beta_\alpha \,. \tag{1.23}$$

- Υπάρχει η δυνατότητα **συστολής** των δεικτών ενός μεικτού τανυστή που στην ουσία ελλατώνει την τάξη του τανυστή κατά 2 τάξεις. Για παράδειγμα:

$$S^\alpha_{\alpha\nu} = S_\nu \quad \text{ή} \quad T^{\alpha\beta}_{\mu\alpha\nu} = T^\beta_{\mu\nu} \,. \tag{1.24}$$

Για τη μελέτη των συμμετριών των τανυστών είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε ένα τανυστή δέυτερης τάξης ως ένα $n \times n$ πίνακα. Τότε λέμε ότι ένας τανυστής $T^{\alpha\beta}$ είναι **συμμετρικός** σε ένα σύστημα συντεταγμένων x^μ αν

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \tag{1.25}$$

και **αντισυμμετρικός** αν

$$T^{\alpha\beta} = -T^{\beta\alpha} \,. \tag{1.26}$$

Αν ένας τανυστής είναι συμμετρικός / αντισυμμετρικός σε ένα σύστημα συντεταγμένων x^μ τότε θα είναι συμμετρικός / αντισυμμετρικός σε κάθε σύστημα συντεταγμένων. Αντίστοιχα, αν ισχύει $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$ ο συναλλοίωτος τανυστής $T_{\alpha\beta}$ θα λέγεται συμμετρικός, ενώ αν $T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha}$ θα λέγεται αντισυμμετρικός. Για τους μεικτούς τανυστές T^β_α δεν μπορούμε να ορίσουμε την ιδιότητα της συμμετρίας γιατί ενώ θα μπορούσε για παράδειγμα να είναι συμμετρικός σε κάποιο συστημα συντεταγμένων δεν είναι βέβαιο ότι σε ένα άλλο σύστημα θα έχει την ίδια ιδιότητα. Οι συμμετρικοί τανυστές 2ης τάξης, σε ένα n-διάστατο χώρο, συνιθίζεται να συμβολίζονται ως $T_{(\alpha\beta)}$ καί έχουν $n(n+1)/2$ ανεξάρτητες συνιστώσες, ενώ ισχύει

$$T_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}\right) \,. \tag{1.27}$$

Οι αντισυμμετρικοί τανυστές σε ένα n-διάστατο χώρο συνιθίζεται να συμβολίζονται ώς $T_{[\alpha\beta]}$ καί έχουν $n(n-1)/2$ ανεξάρτητες συνιστώσες ενώ ισχύει

$$T_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}\right) \,. \tag{1.28}$$

Για τανυστές μεγαλύτερης τάξης θα μπορούσαν να είναι συμμετρικοί ή αντισυμμετρικοί ως προς κάποιους δείκτες, π.χ. $R_{[\mu\nu][\alpha\beta]}$ ή $S_{\alpha(\mu\nu)\beta}$, κοκ.

1.2.2 Τανυστικές Πυκνότητες

Η σχέση (1.13) δίνει το μετασχηματισμό ενός ανταλλοίωτου τανυστή δεύτερης τάξης. Ο τανυστής $T^{\mu\nu}$ θα μπορούσε να ιδωθεί και ως ένας $n \times n$ πίνακας οπότε η ποσότητα $\det|T^{\mu\nu}|$ θα είναι η ορίζουσα του και η σχέση μετασχηματισμού θα γραφεί ως

$$\det|\tilde{T}^{\alpha\beta}| = \det\left|\frac{\partial\tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right| \det\left|\frac{\partial\tilde{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\right| \det|T^{\mu\nu}|\,. \tag{1.29}$$

οπότε αν θέσουμε $\det|\partial\tilde{x}^{\alpha}/\partial x^{\mu}| = \mathcal{J}$ η παραπάνω σχέση θα γραφεί ως

$$\det|\tilde{T}^{\alpha\beta}| = \mathcal{J}^2 \det|T^{\mu\nu}|\,. \tag{1.30}$$

Επομένως η ορίζουσα ενός ανταλλοίωτου τανυστή 2ης τάξης που μετασχηματίζεται με βάση την παραπάνω σχέση είναι μια *ταυυστική πυκνότητα 2ης τάξης*. Στη συνέχεια θα συναντήσουμε τις τανυστικές πυκνότητες στη μελέτη του μετρικού τανυστή.

1.3 ΣΥΝΑΛΛΟΙΩΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Γνωρίζουμε ότι αν σε κάθε σημείο ενός χώρου αντιστοιχίσουμε ένα διάνυσμα τότε ορίζουμε ένα *διανυσματικό πεδίο*. Κατ' αντιστοιχία αν ορίσουμε ένα τανυστή τάξης m σε ένα χώρο τότε θα έχουμε ορίσει ένα *ταυυστικό πεδίο*.

Έχουμε ορίσει προηγουμένως, εξίσωση (1.11), ότι η παράγωγος ενός βαθμωτού μεγέθους είναι συνιστώσες ενός συναλλοιώτου διανύσματος (gradient vector). Αυτή είναι η μόνη περίπτωση στην οποία η παράγωγος ενός τανυστικού πεδίου είναι τανυστής. Γενικά η παραγώγιση ενός τανυστικού πεδίου δεν ορίζει ένα νέο τανυστικό πεδίο. Ο λόγος είναι πως το διαφορικό ενός τανυστή $dT^{\mu\nu\cdots}_{\kappa\lambda\cdots}$ είναι πρακτικά ίσο με τη διαφορά τανυστών που βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του χωρόχρονου. Αλλά σε διαφορετικά σημεία οι τανυστές μετασχηματίζονται με διαφορετικό τρόπο γιατι οι συντελεστές του μετασχηματισμού είναι συναρτήσεις της θέσης.

Το ερώτημα που τίθεται είναι κατά ποιό τρόπο είναι δυνατός ο ορισμός ενός νέου τανυστικού πεδίου από την παραγώγιση ενός αρχικού, αν υποθέσουμε ότι οι συνιστώσες του αρχικού τανυστή είναι *συνεχείς* και *διαφορίσιμες* συναρτήσεις.

Η εξίσωση (1.11) ορίζει πως η μερική παράγωγος (grad) ενός βαθμωτού πεδίου $\phi = \phi(x^{\alpha})$ (τανυστής μηδενικής τάξης) οδηγεί σε τανυστικό πεδίο πρώτης τάξης (διάνυσμα) δηλαδή

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial\tilde{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^{\lambda}} \tag{1.31}$$

Ας θεωρήσουμε τη μερική παράγωγο ενός ανταλλοιώτου διανυσματικού πεδίου, έστω $A^{\lambda}(x^{\mu})$, και συμβολίσουμε την μερική παράγωγο του ως

$$\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} \equiv A^{\lambda}{}_{,\kappa} \tag{1.32}$$

τότε ο μετασχηματισμός του $A^{\lambda}{}_{,\kappa}$ σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων έστω $\tilde{x}^{\kappa}$ οδηγεί στη σχέση

$$\begin{aligned} A^{\mu}_{,\alpha} \equiv \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\tilde{x}^{\nu}}\tilde{A}^{\nu}\right) = \frac{\partial\tilde{x}^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{\rho}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\tilde{x}^{\nu}}\tilde{A}^{\nu}\right) \\ &= \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial\tilde{x}^{\nu}\partial\tilde{x}^{\rho}}\frac{\partial\tilde{x}^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\tilde{A}^{\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial\tilde{x}^{\nu}}\frac{\partial\tilde{x}^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\tilde{A}^{\nu}}{\partial\tilde{x}^{\rho}} \end{aligned} \tag{1.33}$$

Προφανώς αν ο πρώτος όρος της παραπάνω σχέσης ήταν μηδέν θα μπορούσαμε να ισχυρισθούμε ότι η μερική παραγώγιση ενός διανύσματος οδηγεί στην δημιουργία ενός τανυστή δεύτερης τάξης. Δυστυχώς, αυτό δεν είναι γενικά δυνατό, δηλαδή είναι δυνατόν σε κάποιο *ειδικό* σύστημα συντεταγμένων να μηδενίζεται ο συγκεκριμένος όρος αλλά σε ένα τυχαίο σύστημα ο όρος αυτός θα είναι διάφορος του μηδενός. Επομένως, στη γενική περίπτωση θα ισχύει ότι:

$$A^{\mu}_{,\alpha} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\nu}} \frac{\partial \tilde{x}^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} (\tilde{A}^{\nu}_{,\rho} + \underbrace{\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial \tilde{x}^{\sigma} \partial \tilde{x}^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\kappa}}}_{\tilde{\gamma}^{\nu}_{\sigma\rho}} \tilde{A}^{\sigma}) \tag{1.34}$$

Αν επαναλάβω την ίδια διαδικασία για μετασχηματισμό της μερικής παραγώγου του διανύσματος A^{μ} και θεωρήσω ένα μετασχηματισμό από το σύστημα συντεταγμένων x^{μ} σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων x'^{μ} τότε θα έχω τον εξής μετασχηματισμό

$$A^{\mu}_{,\alpha} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \left(A'^{\nu}_{,\rho} + \gamma'^{\nu}_{\sigma\rho} A'^{\sigma} \right) . \tag{1.35}$$

Παρατηρούμε επομένως ότι οι ποσότητες $\gamma'^{\nu}_{\sigma\rho}$ είναι αναγκαίες για το μετασχηματισμό της μερικής παραγώγου. Αν ζητούσαμε το μετσχηματισμό από το σύστημα συντεταγμένων $\tilde{x}^{\mu}$ στο x'^{μ} (και εξαλείφαμε πλήρως τους όρους που σχετίζονται με το σύστημα συντεταγμένων x^{μ}) τότε θα είχαμε μια σχέση της μορφής

$$\tilde{A}^{\mu}_{,\alpha} + \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\lambda} \tilde{A}^{\lambda} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial \tilde{x}^{\alpha}} \left(A'^{\nu}_{,\rho} + \Gamma'^{\nu}_{\sigma\rho} A'^{\sigma} \right) . \tag{1.36}$$

όπου οι ποσότητες $\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\lambda}$ προέκυψαν κατά τη διάρκεια του μετασχηματισμού $\tilde{x}^{\mu} \to x'^{\mu}$ και ονομάζονται *συνδέσεις*. Για να καταλήξουμε στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε μετασχηματισμούς της μορφής :

$$\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\rho}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma'^{\lambda}_{\rho\nu} - \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda} \tag{1.37}$$

που οδηγούν στη σχέση

$$\Gamma'^{\lambda}_{\rho\nu} = \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\mu}_{\kappa\sigma} . \tag{1.38}$$

Η παραπάνω σχέση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι συνδέσεις δεν είναι τανυστές, αλλά ποσότητες που ορίζονται σε κάθε σημείο του χώρου και μέσω αυτών γίνεται δυνατή ο ορισμός μιας αναλλοίωτης μορφής παραγώγισης την οποία ονομάζουμε *συναλλοίωτη παράγωγο*. Ως συναλλοίωτη παράγωγο ενός ανταλλοιώτου διανύσματος A^{μ} ορίζουμε τον τανυστή δεύτερης τάξης που δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$A^{\mu}_{;\alpha} = A^{\mu}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} A^{\lambda} \tag{1.39}$$

1.3.1 Κανόνες της συναλλοίωτης παραγώγισης

- Για βαθμωτό μέγεθος

$$\phi_{;\lambda} = \phi_{,\lambda} \tag{1.40}$$

- Για διανύσματα:

$$a_{\lambda;\mu} = a_{\lambda,\mu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} a_{\rho} \tag{1.41}$$

$$a^{\lambda}{}_{;\mu} = a^{\lambda}{}_{,\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} a^{\rho} \tag{1.42}$$

- Για τανυστές :

$$T^{\lambda\mu}{}_{;\nu} = T^{\lambda\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} T^{\alpha\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} T^{\lambda\alpha} \tag{1.43}$$

$$T^{\lambda}{}_{\mu;\nu} = T^{\lambda}{}_{\mu,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} T^{\alpha}{}_{\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} T^{\lambda}{}_{\alpha} \tag{1.44}$$

$$T_{\lambda\mu;\nu} = T_{\lambda\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} T_{\mu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} T_{\lambda\alpha} \tag{1.45}$$

$$\begin{aligned} T^{\lambda\mu\cdots}{}_{\nu\rho\cdots;\sigma} &= T^{\lambda\mu\cdots}{}_{\nu\rho\cdots,\sigma} \\ &+ \Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma} T^{\alpha\mu\cdots}{}_{\nu\rho\cdots} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} T^{\lambda\alpha\cdots}{}_{\nu\rho\cdots} + \cdots \\ &- \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} T^{\lambda\mu\cdots}{}_{\alpha\rho\cdots} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} T^{\lambda\mu\cdots}{}_{\nu\alpha\cdots} - \cdots \end{aligned} \tag{1.46}$$

Ενώ τέλος θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι και στη συναλλοίωτη παραγώγιση ισχύει ο κανόνας του Leibnitz

$$\left(A^{\alpha\beta\cdots}_{\gamma\delta\cdots} B^{\lambda\mu\cdots}_{\nu\rho\cdots}\right)_{;\sigma} = A^{\alpha\beta\cdots}_{\gamma\delta\cdots\,;\sigma} B^{\lambda\mu\cdots}_{\nu\rho\cdots} + A^{\alpha\beta\cdots}_{\gamma\delta\cdots} B^{\lambda\mu\cdots}_{\nu\rho\cdots\,;\sigma} \tag{1.47}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να αποδειχθεί ο τύπος της συναλλοίωτης διαφόρισης ενός ανταλλοιώτου ταυστή 2ης τάξης.*
   Απόδειξη
   Έστω ο ανταλλοίωτος ταυστής 2ης τάξης $T^{\lambda\mu}$. Το ταυστικό του γινόμενο με δύο συναλλοίωτα διανύσματα a_λ και b_μ δίνει ένα βαθμωτό μέγεθος Φ, δηλαδή $T^{\lambda\mu} a_\lambda b_\mu = \Phi$. Για τα βαθμωτά όμως μεγέθη ισχύει ότι η μερική και η συναλλοίωτη παράγωγος ταυτίζονται άρα

$$\left(T^{\lambda\mu} a_\lambda b_\mu\right)_{;\nu} = \left(T^{\lambda\mu} a_\lambda b_\mu\right)_{,\nu}$$

   οπότε με χρήση του κανόνα του Leibnitz λαμβάνουμε

$$T^{\lambda\mu}{}_{;\nu} a_\lambda b_\mu + T^{\lambda\mu}\left(a_{\lambda;\nu} b_\mu + a_\lambda b_{\mu;\nu}\right) = T^{\lambda\mu}{}_{,\nu} a_\lambda b_\mu + T^{\lambda\mu}\left(a_{\lambda,\nu} b_\mu + a_\lambda b_{\mu,\nu}\right)$$

   οπότε αντικαθιστώντας τις συναλλοιώτους παραγώγους των $a_{\lambda;\nu}$ και $b_{\mu;\nu}$ από τις σχέσεις (1.41) και (1.42) καταλήγουμε στη σχέση

$$\left(T^{\lambda\mu}{}_{;\nu} - T^{\lambda\mu}{}_{,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} T^{\alpha\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} T^{\lambda\alpha}\right) a_\lambda b_\mu = 0$$

και επειδή τα διανύσματα a_λ και b_μ είναι τυχαία και μπορούν να επιλεγούν να είναι μή-μηδενικά θα ισχύει:

$$T^{\lambda\mu}{}_{;\nu} = T^{\lambda\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}T^{\alpha\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}T^{\lambda\alpha}\,.$$

2. *Να βρεθεί η συναλλοίωτη παράγωγος του ταυυστή Kronecker.*
Απόδειξη
Είναι:
$$\delta^{\lambda}_{\mu;\nu} = \delta^{\lambda}_{\mu,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}\delta^{\alpha}_{\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta^{\lambda}_{\alpha} = 0$$
διότι
$$\delta^{\lambda}_{\mu,\nu} = 0 \qquad \textit{και} \qquad \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}\delta^{\alpha}_{\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta^{\lambda}_{\alpha}$$

3. *Να αποδειχθεί ότι οι πράξεις συστολής των δεικτών και της συναλλοίωτης διαφόρισης αντιμετατίθενται.*
Απόδειξη
Η συναλλοίωτη παράγωγος ενός ταυυστή 3ης τάξης είναι:
$$T^{\mu\nu}_{\kappa;\lambda} = T^{\mu\nu}_{\kappa,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}T^{\alpha\nu}_{\kappa} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}T^{\mu\alpha}_{\kappa} - \Gamma^{\alpha}_{\kappa\lambda}T^{\mu\nu}_{\alpha}$$
κάνοντας συστολή στους δείκτες μ και κ η παραπάνω σχέση γράφεται
$$T^{\mu\nu}_{\mu;\lambda} = T^{\mu\nu}_{\mu,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}T^{\alpha\nu}_{\mu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}T^{\mu\alpha}_{\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}T^{\mu\nu}_{\alpha} = T^{\mu\nu}_{\mu,\lambda} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}T^{\mu\alpha}_{\mu}$$
δηλαδή τελικά
$$T^{\nu}{}_{;\lambda} = T^{\nu}{}_{,\lambda} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}T^{\alpha}\,.$$
Αν τώρα προηγηθεί η συστολή θα λάβουμε
$$T^{\mu\nu}_{\mu;\lambda} = T^{\nu}_{;\lambda} = T^{\nu}{}_{,\lambda} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}T^{\alpha}$$
οεδ.

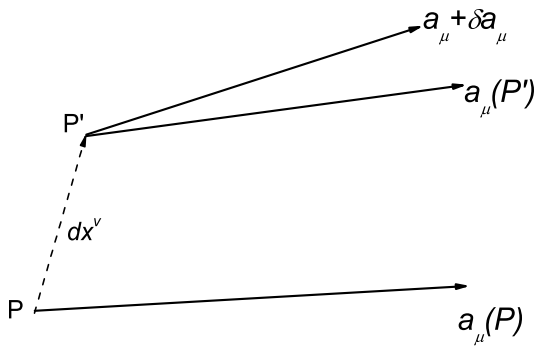
1.4 ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ

Έστω ένα διανυσματικό πεδίο a_μ θα συμβολίσουμε με $a_\mu(P)$ το διάνυσμα στη θέση P και με $a_\mu(P')$ αυτό που βρίσκεται στη θέση P', όπου τα P και P' απέχουν κατά dx^μ. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα

$$\delta^{(1)}a_\mu = a_\mu(P') - a_\mu(P) = a_\mu(P) + a_{\mu,\nu}dx^\nu - a_\mu(P) = a_{\mu,\nu}dx^\nu \qquad (1.48)$$

η οποία όμως δεν είναι διάνυσμα (ή γενικώτερα τανυστής) γιατί η διαφορά δύο διανυσμάτων (ή τανυστών) είναι τανυστής *μόνο αν ορίζονται στο αυτό σημείο*. Αυτό εξηγεί και το ότι ο $a_{\mu,\nu}$ δεν είναι τανυστής.

Σκόπος μας είναι να κατασκευάσουμε ένα νέο διάνυσμα στο σημείο P' το οποίο να μπορεί να θεωρηθεί ώς ‘ ισοδύναμο ’ του διανύσματος a_μ που ορίζεται



Σχήμα 1.3.

στο P. Προς τούτο θα χρησιμοποιήσουμε τη σύνδεση ώστε να δημιουργήσουμε μια μέθοδο εύρεσης του ' ισοδυνάμου ' διανύσματος του a_μ σε ένα γειτονικό σημείο. Με αυτό τον τρόπο θα γίνει δυνατόν τανυστικές εξισώσεις που ορίζονται σε κάποιο σημείο P να ισχύουν και σε ένα κοντινό σημείο P'.

Έστω λοιπόν ότι το ζητούμενο διάνυσμα είναι το $A_\mu(P') = a_\mu(P) + \delta a_\mu$ τότε θα έχουμε

$$\underbrace{a_\mu(P') - A_\mu(P')}_{\text{διάνυσμα}} = \underbrace{a_\mu + \delta^{(1)} a_\mu}_{\text{στο σημείο P}} - \underbrace{(a_\mu + \delta a_\mu)}_{\text{στο σημείο P}} = \underbrace{\delta^{(1)} a_\mu - \delta a_\mu}_{\text{διάνυσμα}}$$
$$= \underbrace{a_{\mu,\nu} dx^\nu - \delta a_\mu}_{\text{διάνυσμα}} . \tag{1.49}$$

Η ποσότητα δa_μ είναι ανάλογη (προφανώς) του dx^ν και του αρχικού διανύσματος $a_\mu(P)$, άρα θα είναι της μορφής

$$\delta a_\mu = C^\lambda_{\mu\nu} a_\lambda dx^\nu . \tag{1.50}$$

όπου $C^\lambda_{\mu\nu}$ μια ποσότητα που δεν είναι υποχρεωτικά τανυστής. Αν τώρα αντικαταστήσουμε την παραπάνω μορφή του δa_μ στη σχέση (1.49) καταλήγουμε στη σχέση

$$a_{\mu,\nu} dx^\nu - \delta a_\mu = \left(a_{\mu,\nu} - C^\lambda_{\mu\nu} a_\lambda\right) dx^\nu \tag{1.51}$$

Επειδή το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι διάνυσμα θα πρέπει και το δεξιό μέρος να είναι διάνυσμα ή καλύτερα ο όρος εντός της παρένθεσης να είναι τανυστής. Προφανώς, τα $a_{\mu,\nu}$ και $C^\lambda_{\mu\nu}$ δεν είναι τανυστές, υπάρχει όμως η δυνατότητα να είναι η ποσότητα $a_{\mu,\nu} - C^\lambda_{\mu\nu} a_\lambda$ τανυστής αν $C^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ δηλαδή αν είναι σύνδεση του χώρου οπότε η ποσότητα εντός της παρενθέσεως γίνεται

η συναλλοίωτη παράγωγος του διανύσματος a_μ που δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι είναι τανυστής. Άρα αν ένα διάνυσμα που ορίζεται στο σημείο P το *μεταφέρω παράλληλα* σε ένα κοντινό σημείο P' η μεταβολή που θα υποστεί θα υπολογίζεται από τη σχέση

$$\delta a_\mu = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} a_\lambda dx^\nu \,. \tag{1.52}$$

Κατ' ανάλογο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι κατά την παράλληλη μεταφορά ενός ανταλλοιώτου διανύσματος η μεταβολή θα δίνεται από τη σχέση

$$\delta a^\mu = -\Gamma^\mu_{\lambda\nu} a^\lambda dx^\nu \,. \tag{1.53}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Θα εξετάσουμε την μεταβολή που υφίσταται ένα διάνυσμα κατά την παράλληλη μεταφορά του κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης. Στην προκειμένη περίπτωση κατά τη μεταφορά του κατά μήκος ενός παραληλογράμμου με πλευρές dx^λ και δx^λ.

Η παράλληλη μεταφορά του διανύσματος a^λ από το σημείο P στο σημείο A θα έχει ως συνέπεια την μεταβολή του διανύσματος κατά μία ποσότητα $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P) a^\mu dx^\nu$ δηλαδή το νέο διάνυσμα θα είναι

$$a^\lambda(A) = a^\lambda(P) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P) a^\mu dx^\nu \tag{1.54}$$

Η περαιτέρω μεταφορά του διανύσματος στο σημείο B θα δώσει το διάνυσμα

$$\begin{aligned} a^\lambda(B) &= a^\lambda(A) - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}(A) a^\rho(A) \delta x^\sigma \\ &= a^\lambda(P) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P) a^\mu dx^\nu - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}(A) \left[a^\rho(P) - \Gamma^\rho_{\beta\nu}(P) a^\beta dx^\nu \right] \delta x^\sigma \end{aligned} \tag{1.55}$$

Επειδή όμως οι ποσότητες dx^ν και δx^ν είναι μικρές μπορούμε προσεγγιστικά να χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση

$$\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}(A) \approx \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}(P) + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma,\mu}(P) dx^\mu \,. \tag{1.56}$$

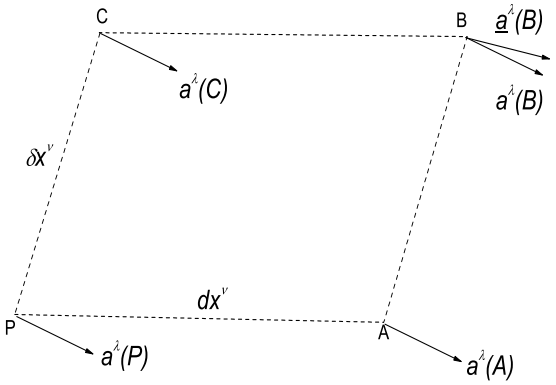
Με αυτή την αντικατάσταση περιγράφουμε τη συνολική μεταβολή που υφίσταται το διάνυσμα a^λ κατά τη μεταφορά του από το σημείο P στο A και στη συνέχεια στο B σαν συνάρτηση μόνο ποσοτήτων ορισμένων στο αρχικό σημείο P. Οπότε το διάνυσμα στο τέλος της διαδρομής θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} a^\lambda(B) = a^\lambda &- \Gamma^\lambda_{\mu\nu} a^\mu dx^\nu - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} a^\rho \delta x^\sigma + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} \Gamma^\rho_{\beta\nu} a^\beta dx^\nu \delta x^\beta + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma,\tau} a^\rho dx^\tau \delta x^\sigma \\ &- \Gamma^\lambda_{\rho\sigma,\tau} \Gamma^\rho_{\beta\nu} a^\beta dx^\tau dx^\nu \delta x^\sigma \end{aligned} \tag{1.57}$$

όπου όλοι οι όροι στο δεξιό μέλος της εξίσωσης ορίζονται στο αρχικό σημείο P. Ο τελευταίος όρος στην παραπάνω σχέση είναι γινόμενο τριών απειροστά μικρών

ποσοτήτων και ως εκ τούτου σημαντικά μικρότερος από τους υπόλοιπους όρους και μπορεί να παραλειφθεί.

Αντί να συνεχίσουμε τη μεταφορά του διανύσματος a^λ στο σημείο C και στη συνέχεια στο σημείο P ώστε να υπολογίσουμε τη συνολική μεταβολή του, μπορούμε εναλλακτικά να μεταφέρουμε το διάνυσμα a^λ ακολουθώντας τη διαδρομή $P \to C \to B$ και να αθροίσουμε τις μεταβολές που έχει υποστεί κατά τη διάρκεια των δύο διαδρομών που ακολούθησε.



Σχήμα 1.4. Σχηματική παράσταση της διαδρομής που ακολουθεί το διάνυσμα a^λ.

Αυτή η τελευταία πράξη είναι σχετικά απλή διότι για να υπολογίσουμε το διάνυσμα που θα προκύψει ακολουθώντας την διαδρομή $P \to C \to B$ αρκεί να εναλλάξουμε στη σχέση (1.57) όπου dx^ν με δx^ν και αντίστροφα όπου δx^ν με dx^ν άρα το νέο διάνυσμα $\underline{a}^\lambda$ θα είναι

$$\underline{a}^\lambda(B) = a^\lambda - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} a^\mu \delta x^\nu - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} a^\rho dx^\sigma + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\beta\nu} a^\beta \delta x^\nu dx^\beta + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma,\tau} a^\rho \delta x^\tau dx^\sigma \tag{1.58}$$

Σχετικά εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\delta a^\lambda \equiv a^\lambda(B) - \underline{a}^\lambda(B) = a^\beta \left(dx^\nu \delta x^\sigma - dx^\sigma \delta x^\nu\right) \left(\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\beta\nu} + \Gamma^\lambda_{\beta\sigma,\nu}\right) \tag{1.59}$$

ενώ εναλλάσσοντας κατάλληλα τους δείκτες χρησιμοποιώντας τις αντικαταστάσεις $\nu \to \sigma$ και $\sigma \to \nu$ δημιουργούμε μια παρόμοια σχέση, δηλαδή

$$\delta a^\lambda = a^\beta \left(dx^\sigma \delta x^\nu - dx^\nu \delta x^\sigma\right) \left(\Gamma^\lambda_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\beta\sigma} + \Gamma^\lambda_{\beta\nu,\sigma}\right) \tag{1.60}$$

Οπότε προσθέτωντας τις δύο τελευταίες σχέσεις λαμβάνουμε ότι η συνολική μεταβολή που υπέστη το διάνυσμα κατά την περιφορά του είναι

$$\delta a^\lambda = -\frac{1}{2} a^\beta R^\lambda_{\beta\nu\sigma} \left(dx^\sigma \delta x^\nu - dx^\nu \delta x^\sigma\right) \tag{1.61}$$

όπου

$$R^{\lambda}_{\beta\nu\sigma} = -\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu,\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\sigma,\nu} - \Gamma^{\mu}_{\beta\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{1.62}$$

Ο τανυστής $R^{\lambda}_{\beta\nu\sigma}$ είναι γνωστός ως **τανυστής Riemann** *εκφράζει την καμπυλότητα του χώρου και θα μελετηθεί διεξοδικά στη συνέχεια.*

1.5 Ο ΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΑΝΥΣΤΗΣ

Μια γεωμετρική ποσότητα που χαρακτηρίζει ένα χώρο είναι η απόσταση δύο σημείων και οι χώροι στους οποίους έχει καθορισθεί ένας τρόπος μέτρησης αποστάσεων λέγονται *μετρικοί χώροι*.

Ο 3-διάστατος Ευκλείδιος χώρος, στον οποίο η απόσταση δύο σημείων δίδεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.63}$$

είναι μια χαρακτηριστική περίπτωση μετρικού χώρου. Ο 4-διάστατος χώρος Minkowski (χωρόχρονος)

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.64}$$

είναι μια άλλη περίπτωση μετρικού χώρου. Αν στον Ευκλείδιο χώρο ονομάσουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες ως $x = x^1$, $y = x^2$ και $z = x^3$ τότε η σχέση (1.63) θα γραφεί ως :

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 \tag{1.65}$$

σε ένα άλλο, τυχαίο, σύστημα αναφοράς, έστω $\tilde{x}^{\mu} = f^{\mu}(x^{\nu})$, η απόσταση δύο σημείων προφανώς θα παραμένει η ίδια αλλά θα περιγράφεται από μια διαφορετική σχέση. Για παράδειγμα η στοιχειώδης απόσταση dx^{ν} θα μεταβληθεί ως

$$dx^{\nu} = \sum_{\alpha} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\alpha}} d\tilde{x}^{\alpha} \tag{1.66}$$

οπότε η αντικατάσταση στη σχέση (1.65) θα οδηγήσει σε μια πολύ πιο σύνθετη γραφή της απόστασης ds^2 όπου πέραν των όρων της μορφής $\left(d\tilde{x}^i\right)^2$ θα υπάρχουν και μεικτοί όροι της μορφής $d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j$. Οπότε η πλέον γενική γραφή θα είναι

$$ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} d\tilde{x}^{\mu} d\tilde{x}^{\nu} = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \,. \tag{1.67}$$

Αν στην παραπάνω σχέση αντικαταστήσουμε τα dx^{μ} από τις σχέσεις (1.66) καταλήγουμε ότι :

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde{x}^{\nu}} g_{\alpha\beta} \tag{1.68}$$

Δηλαδή, ο $g_{\mu\nu}$ είναι ένας τανυστής δεύτερης τάξης που τον ονομάζουμε *μετρικό τανυστή*. Ο μετρικός τανυστής είναι συμμετρικός και τούτο διότι στη σχέση (1.67)

η σειρά με την οποία χρησιμοποιούμε τα dx^μ, dx^ν δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα.

Στην προηγούμενη ενότητα ορίσαμε ότι ένας τανυστής δεύτερης τάξης, T^μ_ν μπορεί να θεωρηθεί ότι δημιουργείται από το τανυστικό γινόμενο δύο διανυσμάτων A^μ και B_ν, σχέση (1.22). Και αν εφαρμόσουμε συστολή στους δύο δείκτες

$$A^\mu B_\mu = T^\mu_\mu = T \tag{1.69}$$

διαπιστώνουμε ότι το τελικό αποτέλεσμα είναι ένα βαθμωτό μέγεθος (στην ουσία έχουμε ένα γενικευμένο ορισμό του εσωτερικού γινομένου). Μια προσεκτικότερη παρατήρηση της σχέσης (1.67) οδηγεί στη διαπίστωση ότι εφόσον το dx^β είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα ο μόνος τρόπος για να αληθεύει αυτό, είναι η ποσότητα $g_{\alpha\beta}dx^\alpha$ να αποτελεί συναλλοίωτο διάνυσμα. Άρα διαπιστώνουμε ότι όταν μετρικός τανυστής *δρα* πάνω σ' ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα (εδώ το dx^α) το μετατρέπει σε συναλλοίωτο. Δηλαδή, ο μετρικός τανυστής έχει τη δυνατότητα να *κατεβάζει* τους δείκτες π.χ.

$$g_{\mu\nu}A^\mu = A_\nu, \quad g_{\mu\nu}T^{\mu\alpha} = T^\alpha_\nu, \quad g_{\mu\nu}T^\mu_\alpha = T_{\alpha\nu}, \quad g_{\mu\nu}g_{\alpha\sigma}T^{\mu\alpha} = T_{\alpha\sigma} \tag{1.70}$$

Μπορούμε να ορίσουμε και την *ανταλλοίωτη μορφή του μετρικού τανυστή*, δηλαδή τον τανυστή $g^{\alpha\beta}$ ούτως ώστε να ισχύει

$$g_{\mu\alpha}g^{\alpha\beta} = \delta^\beta_\mu \tag{1.71}$$

η εύρεση του οποίου (των συνιστωσών του) απαιτεί τη λύση ενός γραμμικού συστήματος που στη συγκεκριμένη περίπτωση επιλύεται σχετικά εύκολα από τη σχέση

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{\det|g_{\mu\nu}|}G^{\alpha\beta} \tag{1.72}$$

όπου $G^{\alpha\beta}$ είναι ο προσαρτημένος πίνακας και $\det|g_{\mu\nu}|$ η ορίζουσα του μετρικού τανυστή. Ο προσαρτημένος πίνακας $G^{\alpha\beta}$ είναι η ορίζουσα του πίνακα που παίρνουμε παραλείποντας την α γραμμή και την β στήλη και θέτωντας το πρόσημο ως $(-1)^{\alpha+\beta}$. Για παράδειγμα ο G^{23} για μετρικό τανυστή σε ένα χώρο 3-διαστάσεων είναι:

$$G^{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}. \tag{1.73}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε μερικούς τυπικούς μετρικούς τανυστές :

- Η μετρική του χώρου Minkowski σε κυλινδικές και σφαιρικές συνεταγμένες

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\phi^2 + dz^2 \tag{1.74}$$
$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{1.75}$$

- Η μετρική μιας σφαίρας ακτίνας R είναι:

$$ds^2 = R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{1.76}$$

- Η μετρική του torus με ακτίνες a και b

$$ds^2 = a^2 d\phi^2 + (b + a\sin\phi)^2\, d\theta^2 \tag{1.77}$$

Τέλος η γωνία ψ δύο στοιχειωδών διανυσμάτων $d^{(1)}x^\alpha$ και $d^{(2)}x^\alpha$ δίνεται, σε αναλογία με την Ευκλείδια γεωμετρία, από τη σχέση:

$$\cos(\psi) = \frac{g_{\alpha\beta} d^{(1)}x^\alpha d^{(2)}x^\beta}{\sqrt{g_{\rho\sigma} d^{(1)}x^\rho d^{(1)}x^\sigma}\sqrt{g_{\mu\nu} d^{(2)}x^\mu d^{(2)}x^\nu}}\,. \tag{1.78}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να υπολογισθεί ο μετρικός τανυστής του Ευκλείδειου χώρου σε κυλινδρικές συντεταγμένες.*
   Απόδειξη
   Η μετρική του Ευκλείδειου χώρου σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, *ενώ ο μετασχηματισμός από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες είναι* $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ *και* $z = z$. *Οπότε*

$$\begin{aligned} dx &= -\rho\sin\phi d\phi + \cos\phi d\rho \\ dy &= \rho\cos\phi d\phi + \sin\phi d\rho \\ dz &= dz \end{aligned}$$

   και ο μετρικός τανυστής στο νέο σύστημα συντεταγμένων γράφεται ως

$$\begin{aligned} ds^2 &= \rho^2\sin^2\phi d\phi^2 + \cos^2\phi d\rho^2 - 2\rho\sin\phi\cos\phi d\phi d\rho \\ &+ \rho^2\cos^2\phi d\phi^2 + \sin^2\phi d\rho^2 + 2\rho\sin\phi\cos\phi d\phi d\rho \\ &+ dz^2 \\ &= d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \end{aligned} \tag{1.79}$$

2. *Να βρεθεί ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής του Ευκλείδειου χώρου σε σφαιρικές συντεταγμένες*
   Απόδειξη
   Ο μετρικός τανυστής είναι:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{1.80}$$

   και η ορίζουσα είναι $g = r^2\sin^2\theta$. *Οπότε οι συνιστώσες του προσαρτημένου πίνακα είναι* $G^{11} = r^4\sin^2\theta$, $G^{22} = r^2\sin^2\theta$ *και* $G^{33} = r^2$ *ενώ τα* $G^{ij} = 0$ *για* $i \neq j$. *Επομένως οι συνιστώσες του ανταλλοίωτου μετρικού τανυστή είναι:*

$$\begin{aligned} g^{11} &= \frac{G^{11}}{r^4\sin^2\theta} = 1, \quad g^{22} = \frac{G^{22}}{r^4\sin^2\theta} = \frac{1}{r^2}, \\ g^{33} &= \frac{G^{33}}{r^4\sin^2\theta} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}, \quad g^{ij} = 0 \quad \textit{για} \quad i \neq j \end{aligned}$$

Αρα

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{1.81}$$

3. *Να υπολογισθεί ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής της μετρικής*

$$ds^2 = 5dx^2 + 3dy^2 + 4dz^2 - 6dxdy + 4dxdz$$

Λύση
Ο μετρικός τανυστής (συναλλοίωτος) της παραπάνω μετρικής είναι:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{1.82}$$

και η ορίζουσα του είναι $g = 12$ *ενώ οι συνιστώσες του προσαρτημένου πίνακα είναι:* $G^{11} = 12$, $G^{12} = 12$, $G^{13} = -6$, $G^{21} = 14$, $G^{22} = 16$, $G^{23} = 6$, $G^{31} = -6$ *και* $G^{32} = 6$ *οπότε ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής είναι:*

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 7/6 & 4/3 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix} . \tag{1.83}$$

1.5.1 Η ορίζουσα του μετρικού τανυστή

Στον υπολογισμό του ανταλλοιώτου μετρικού τανυστή $g^{\alpha\beta}$ χρησιμοποιήσαμε την ορίζουσα του $g_{\mu\nu}$, την οποία θα συμβολίζουμε με g, δηλαδή

$$g \equiv \det |g_{\mu\nu}| \tag{1.84}$$

Με βάση όσα προαναφέραμε στο κεφάλαιο 1.2.2 η ορίζουσα του μετρικού τανυστή είναι τανυστική πυκνότητα βάρους 2. Αυτό εύκολα αποδεικνύεται από το μετασχηματισμό της ορίζουσας του μετρικού τανυστή από ένα σύστημα συντεταγμένων $\tilde{x}^\mu$ σ΄ ένα άλλο x^μ, δηλαδή

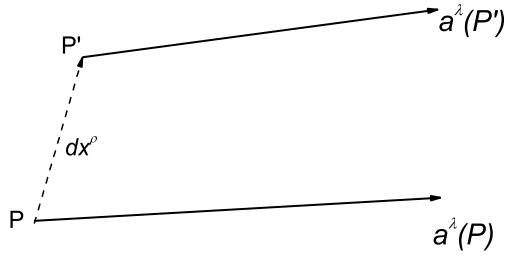
$$\begin{aligned} \tilde{g} = \det \tilde{g}_{\mu\nu} &= \det\left(g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \right) = \det g_{\alpha\beta} \cdot \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \right) \cdot \det\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \right) \\ &= \left(\det \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \right)^2 g = \mathcal{J}^2 g \end{aligned} \tag{1.85}$$

όπου $\mathcal{J}$ είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού.

Η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$\sqrt{|\tilde{g}|} = \mathcal{J} \sqrt{|g|} \tag{1.86}$$

δηλαδή η ποσότητα $\sqrt{|g|}$ είναι βαθμωτή πυκνότητα βάρους 1.



Σχήμα 1.5.

1.6 ΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑ CHRISTOFELL

Οι συνδέσεις σε ένα τυχαίο χώρο (μια πολλαπλότητα) στον οποίο δεν είχε ορισθεί ο μετρικός τανυστής χρησιμοποιήθηκαν για να ορίσουμε την παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος. Η παράλληλη μεταφορά εξασφάλιζε ότι το μέτρο ενός τυχαίου διανύσματος a^λ δεν μεταβαλλόταν κατά τη μεταφορά του από ένα σημείο P σε ένα σημείο P', Σχήμα 1.5. Δηλαδή

$$|\mathbf{a}|^2_P = |\mathbf{a}|^2_{P'} \quad \text{ή} \quad g_{\mu\nu}(P)a^\mu(P)a^\nu(P) = g_{\mu\nu}(P')a^\mu(P')a^\nu(P') \tag{1.87}$$

αλλά επειδή τα σημεία P και P' απέχουν dx^ρ θα ισχύει προσεγγιστικά

$$g_{\mu\nu}(P') \approx g_{\mu\nu}(P) + g_{\mu\nu,\rho}(P)dx^\rho \tag{1.88}$$

$$a^\mu(P') \approx a^\mu(P) - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}(P)a^\sigma(P)dx^\rho \tag{1.89}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω δύο σχέσεις στην εξίσωση (1.87) καταλήγουμε εύκολα στη σχέση

$$\left(g_{\mu\nu,\rho} - g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - g_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\right) a^\mu a^\nu dx^\rho = 0 \tag{1.90}$$

επειδή όμως η επιλογή του διανύσματος a^λ αλλά και της στοιχειώδους μετατόπισης dx^ρ ήταν τυχαία θα ισχύει ότι :

$$g_{\mu\nu,\rho} - g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - g_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} = 0\,. \tag{1.91}$$

Η σχέση αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική. Κατ' αρχάς εύκολα διαπιστώνουμε ότι ταυτίζεται με τη συναλλοίωτη παράγωγο του μετρικού τανυστή οπότε

$$g_{\mu\nu;\rho} = 0 \tag{1.92}$$

δηλαδή, **η συναλλοίωτη παράγωγος του μετρικού τανυστή είναι μηδέν** (*Λήμμα Ricci*).

Επιπλέον, από την εξίσωση (1.91) μπορούν να υπολογισθούν οι συνιστώσες των συνδέσεων $\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}$ αν δοθεί ο μετρικός τανυστής $g_{\mu\nu}$. Για τον πλήρη καθορισμό των συνιστωσών της σύνδεσης $\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}$ σε ένα χώρο n-διαστάσεων απαιτούνται n^3 εξισώσεις, η εξίσωση (1.91) κατ' αρχάς παρέχει αυτή τη δυνατότητα, αλλά μια προσεκτικότερη μελέτη δείχνει ότι η εξίσωση (1.91) είναι συμμετρική ως προς τους δείκτες μ, ν, οπότε υπάρχουν μόνο $n\cdot n(n+1)/2$ γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις που σημαίνει ότι για να υπολογίσουμε με μοναδικό τρόπο τις συνιστώσες των συνδέσεων αυτές θα πρέπει να είναι **συμμετρικές**. Δηλαδή, **οι συνδέσεις στους χώρους Riemann είναι συμμετρικές**.

Αν στη σχέση (1.91) εναλλάξουμε τους δείκτες ώστε να γραφεί ως

$$g_{\nu\rho,\mu} - g_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} - g_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} = 0 \tag{1.93}$$

τότε συνεχίζοντας την εναλλαγή δημιουργούμε τη σχέση

$$g_{\rho\mu,\nu} - g_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - g_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} = 0\,. \tag{1.94}$$

Αν τώρα προσθέσουμε τις σχέσεις (1.91) και (1.93) και αφαιρέσουμε τη σχέση (1.94) βρίσκουμε ότι

$$g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\rho\mu,\nu} = 2g_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} \tag{1.95}$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας με $g^{\alpha\nu}$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}\left(g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\rho\mu,\nu}\right)\,. \tag{1.96}$$

Η παραπάνω σχέση καθορίζει με μοναδικό τρόπο τις συνδέσεις (συμμετρικές) του χώρου Riemann που ονομάζονται **σύμβολα Christoffel**.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

1. *Να υπολογισθούν τα σύμβολα Christoffel για τη μετρική της σφαίρας*

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2\sin^2\theta d\phi^2$$

Λύση

Τα μόνα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel είναι:

$$\Gamma^{1}_{22} = -\sin\theta\cos\theta \quad \textit{και} \quad \Gamma^{2}_{12} = \cot\theta\,. \tag{1.97}$$

2. *Να υπολογισθούν τα σύμβολα Christoffel για τη μετρική της σφαίρας*

$$ds^2 = dv^2 + [u^2 - v^2]du^2$$

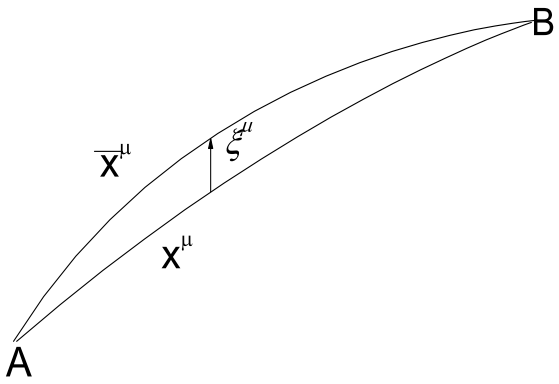
Λύση

Τα μόνα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel είναι:

$$\Gamma^{1}_{22} = v, \quad \Gamma^{2}_{12} = \frac{-v}{u^2 - v^2} \quad \textit{και} \quad \Gamma^{2}_{22} = \frac{u}{u^2 - v^2}\,. \tag{1.98}$$

1.7 ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

Μεταξύ όλων των δυνατών καμπυλών που συνδέουν δύο σημεία ενός χώρου (εδώ μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας) υπάρχει μια οικογένεια καμπυλών της οποίας οι καμπύλες έχουν ακρότατο μήκος. Οι καμπύλες αυτές ομομάζονται **γεωδαισιακές καμπύλες**, μια σηματική ιδιότητα των συγκεκριμένων καμπυλών γιατί αντιπροσωπεύουν τις τροχιές σωματιδίων που κινούνται υπό την επίδραση βαρυτικού πεδίου.



Σχήμα 1.6.

Έστω ότι το μήκος μιας καμπύλης $x^\mu(s)$ που ενώνει δύο σημεία A και B είναι S και δίνεται από μια σχέση της μορφής

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \left[g_{\mu\nu}(x^\alpha) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right]^{1/2} ds \tag{1.99}$$

Μια γειτονική καμπύλη $\tilde{x}^\mu(s)$ που συνδέει τα ίδια σημεία A και B θα περιγράφεται από την εξίσωση

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon\xi^\mu \tag{1.100}$$

με $\xi^\mu = 0$ στα άκρα A και B. Το μήκος της νέας καμπύλης θα είναι

$$\tilde{S} = \int_A^B \left[g_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha) \frac{d\tilde{x}^\mu}{ds} \frac{d\tilde{x}^\nu}{ds} \right]^{1/2} ds \tag{1.101}$$

Οπότε για απλότητα αντικαθιστούμε

$$u^\mu = \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad \text{και} \quad u^\mu = \dot{\tilde{x}}^\mu = \frac{d\tilde{x}^\mu}{ds} = \dot{x} + \epsilon\dot{\xi}^\mu \tag{1.102}$$

επίσης

$$f(x^\alpha, u^\alpha) = [g_{\mu\nu}(x^\alpha)u^\mu u^\nu]^{1/2} \tag{1.103}$$

$$\tilde{f}(\tilde{x}^\alpha, \tilde{u}^\alpha) = [g_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha)\tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu]^{1/2} \tag{1.104}$$

Άρα μπορώ να ορίσω την διαφορά $\delta S = \tilde{S} - S$ και η οποία θα πρέπει να μηδενίζεται για να είναι το μήκος S ακρότατο δηλαδή η απόσταση των σημείων A και B ελάχιστη. Οπότε [3]

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_A^B \delta f \, ds = \int_A^B \left(\tilde{f} - f\right) ds \\ &= \epsilon \int_A^B \left[\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\right)\right] \xi^\alpha ds + \epsilon \int_A^B \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\xi^\alpha\right) ds \end{aligned} \tag{1.105}$$

ο δεύτερος όρος της παραπάνω σχέσης ολοκληρώνεται με προφανή τρόπο και είναι μηδέν διότι στα άκρα του διαστήματος $\xi^\alpha = 0$. Άρα το μήκος θα γίνει ακρότατο άν

$$\delta S = \epsilon \int_A^B \left[\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\right)\right] \xi^\alpha ds = 0 \tag{1.106}$$

και επειδή το διάνυσμα ξ^α είναι τυχαίο η συνθήκη ακροτάτου μήκους θα είναι:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial u^\mu}\right) - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = 0 \tag{1.107}$$

Η Langrangian για ένα ελεύθερα κινούμενο σωματίδιο, μάζας $m = 2$, θα είναι

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \equiv f^2 \tag{1.108}$$

οπότε αντικαθιστώντας τις παρακάτω σχέσεις στην εξίσωση (1.107)

$$\frac{\partial f}{\partial u^\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha}\mathcal{L}^{-1/2} \tag{1.109}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha}\mathcal{L}^{-1/2} \tag{1.110}$$

καταλήγουμε στη συνθήκη ακροτάτου μήκους των Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0\,. \tag{1.111}$$

[3] Θα γίνει χρήση των παρακάτω σχέσεων:

$$f(\tilde{x}^\alpha, \tilde{u}^\alpha) = f(x^\alpha + \epsilon\xi^\alpha, u^\alpha + \epsilon\dot{\xi}^\alpha) = f(x^\alpha, u^\alpha) + \epsilon\left(\xi^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \dot{\xi}^\alpha \frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\right) + O(\epsilon^2)$$

και

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\xi^\alpha\right) = \frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\dot{\xi}^\alpha + \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\right)\xi^\alpha$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε πώς από τις εξισώσεις Euler-Lagrange θα καταλήξουμε στην τελική μορφή των εξισώσεων των γεωδαισιακών.

Έχουμε προαναφέρει ότι η Langrangian έχει τη μορφή $\mathcal{L} = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ οπότε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha} = g_{\mu\nu}\frac{\partial u^\mu}{\partial u^\alpha}u^\nu + g_{\mu\nu}u^\mu\frac{\partial u^\nu}{\partial u^\alpha} = g_{\mu\nu}\delta^\mu_\alpha u^\nu + g_{\mu\nu}u^\mu\delta^\nu_\alpha = 2g_{\mu\alpha}u^\mu \tag{1.112}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha}u^\mu u^\nu \tag{1.113}$$

επομένως

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(2g_{\mu\alpha}u^\mu\right) &= 2\frac{dg_{\mu\alpha}}{ds}u^\mu + 2g_{\mu\alpha}\frac{du^\mu}{ds} = 2g_{\mu\alpha,\nu}u^\nu u^\mu + 2g_{\mu\alpha}\frac{du^\mu}{ds}\\ &= g_{\mu\alpha,\nu}u^\nu u^\mu + g_{\nu\alpha,\mu}u^\mu u^\nu + 2g_{\mu\alpha}\frac{du^\mu}{ds}\end{aligned} \tag{1.114}$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (1.111) καταλήγουμε στη σχέση

$$g_{\mu\alpha}\frac{du^\mu}{ds} + \frac{1}{2}\left[g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\alpha\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}\right]u^\mu u^\nu = 0$$

που αν πολλαπλασιάσουμε με $g^{\rho\alpha}$ οδηγεί στην εξίσωση των γεωδαισιακών

$$\frac{du^\rho}{ds} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0\,. \tag{1.115}$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $du^\rho/ds = u^\rho{}_{,\mu}u^\mu$ εύκολα καταλήγουμε στη μορφή

$$u^\rho{}_{;\nu}u^\nu = 0 \tag{1.116}$$

Συχνότερα συναντώνται οι εξισώσεις των γεωδαισιακών στην παρακάτω μορφή

$$\frac{d^2x^\rho}{ds^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{1.117}$$

επομένως μια γεωδαισιακή προσδιορίζεται πλήρως αν σε ένα σημείο της δίδεται το εφαμπτόμενο διάνυσμα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Οι γεωδαισιακές είναι καμπύλες ακροτάτου μήκους και στη φυσική αντιπροσωπεύουν τροχιές ελεύθερα κινούμενων σωματιδίων. Σε ένα επίπεδο χώρο οι γεωδαισιακές καμπύλες είναι ευθείες και τούτο, αν και τετριμμένο ως πρόταση, διαπιστώνεται εύκολα από τον μηδενισμό των συμβόλων Christoffel στις εξισώσεις (1.115) ή (1.117). Σε ένα καμπύλο χώρο τα σύμβολα Christoffel δεν μηδενίζονται και κατά συνέπεια οι γεωδαισιακές καμπύλες παύουν να είναι ευθείες.

2. Απο τις εξισώσεις Euler-Lagrange (1.111), ή καλύτερα από την εξίσωση (1.113) διαπιστώνουμε ότι αν ο μετρικός τανυστής δεν εξαρτάται από μια συγκεκριμένη συντεταγμένη, έστω την x^κ τότε θα ισχύει:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\kappa}\right) = 0 \tag{1.118}$$

που σημαίνει ότι η ποσότητα $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}^\kappa$ είναι σταθερή κατά μήκος της γεωδαισιακής καμπύλης. Αλλά από την εξίσωση (1.112) γνωρίζουμε ότι

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\kappa} = g_{\mu\kappa}u^\mu$$

δηλαδή η κ συνιστώσα της γενικευμένης ορμής $p_\kappa = g_{\mu\kappa}u^\mu$ παραμένει σταθερή κατά μήκος της γεωδαισιακής. Αυτό μας θυμίζει τη γνωστή πρόταση από την αναλυτική δυναμική όπου αν η Lagrangian δεν περιείχε κάποια συγκεκριμένη συντεταγμένη τότε η αντίστοιχη συνιστώσα της γενικευμένης ορμής διατηρήτο, και η συντεταγμένη αυτή ονομάζοταν *αγνοήσιμη*. Με αυτό τον τρόπο εύκολα εξάγονται τα ολοκληρώματα κίνησης για μια δοθείσα μετρική. Για παράδειγμα, η μετρική Schwarschild είναι ανεξάρτητη από τις συνιστώσες t και ϕ που έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη δύο ολοκληρωμάτων κίνησης, του ολοκληρώματος της *ενέργειας* και της *στροφορμής*.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Θα δείξουμε ότι για τις γεωδαισιακές καμπύλες ισχύει ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάποιο σημείο τους συνεχίζει να είναι εφαπτόμενο αν το μεταφέρουμε παράλληλα ακολουθώντας την καμπύλη.*

   Απόδειξη

   Έστω μια καμπύλη με εξίσωση $x^\mu = f^\mu(s)$, όπου s είναι το ίδιο μήκος και στην συγκεκριμένη περίπτωση αποτελεί την παράμετρο που καθορίζει την καμπύλη. Αν

   $$u^\mu = dx^\mu/ds$$

   είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα σημείο $P(s)$ τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα κοντινό σημείο $P'(s+ds)$ θα έχει συνιστώσες

   $$u^\mu(P') = u^\mu(P) + \frac{d}{ds}\left(u^\mu(s)\right)ds = \frac{dx^\mu}{ds} + \frac{d^2x^\mu}{ds^2}ds \tag{1.119}$$

   Το διανύσμα που προκύπτει από την παράλληλη μεταφορά από το σημείο P στο σημείο P' θα έχει συνιστώσες

   $$u^\mu + \delta u^\mu = u^\mu - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}u^\rho dx^\sigma = \frac{dx^\mu}{ds} - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}ds\,. \tag{1.120}$$

Τα διανύσματα που ορίζονται από τις εξισώσεις (1.119) και (1.120) θα πρέπει να είναι συγγραμικά και στην συγκεκριμένη περίπτωση ίσα[4] *δηλαδή*

$$\frac{dx^\mu}{ds} + \frac{d^2x^\mu}{ds^2}ds = \frac{dx^\mu}{ds} - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}ds \tag{1.121}$$

που εύκολα διαπιστώνουμε ότι οδηγεί στη γνωστή εξίσωση των γεωδαισιακών καμπυλών

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} = 0\,. \tag{1.122}$$

2. *Να γραφούν οι εξισώσεις των γεωδαισιακών για τη μετρική*

$$ds^2 = dv^2 + \left[u^2 - v^2\right] du^2$$

Λύση

Τα μόνα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel είναι:

$$\Gamma^1_{22} = v, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{-v}{u^2 - v^2} \quad \textit{και} \quad \Gamma^2_{22} = \frac{u}{u^2 - v^2}\,. \tag{1.123}$$

οπότε οι εξισώσεις των γεωδαισιακών γράφονται ως

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma^1_{22}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 0 \tag{1.124}$$

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma^2_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma^2_{22}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 0 \tag{1.125}$$

Οπότε τελικά

$$\frac{d^2v}{ds^2} + v\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 0 \tag{1.126}$$

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{u^2 - v^2}\left(u\frac{du}{ds} - v\frac{dv}{ds}\right)\left(\frac{du}{ds}\right) = 0\,. \tag{1.127}$$

Στη συνέχεια θα δημιουργήσουμε τις εξισώσεις των γεωδαισιακών με χρήση της εξίσωσης Euler-Lagrange. Η Lagrangian για την παραπάνω μετρική θα είναι:

$$\mathcal{L} = \dot{v}^2 + (u^2 - v^2)\dot{u}^2$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\partial\mathcal{L}/\partial\dot{v} &= 2\dot{v} \\
\partial\mathcal{L}/\partial\dot{u} &= 2(u^2 - v^2)\dot{u} \\
\partial\mathcal{L}/\partial v &= -2v\dot{v}^2 \\
\partial\mathcal{L}/\partial u &= 2u\dot{u}^2
\end{aligned}$$

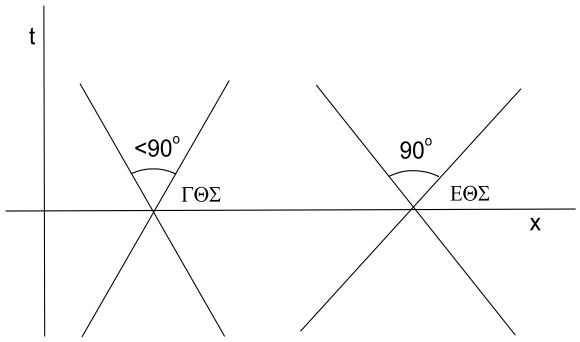
[4] Αν αντι της παραμέτρου s (ίδιο μήκος) είχαμε χρησιμοποιήσει μια τυχαία παράμετρο λ τότε ο συντελεστής αναλογίας των δύο διανυσμάτων θα είχε τη μορφή $1 + \psi(\lambda)d\lambda$.

οπότε καταλήγουμε στις ακόλουθες εξισώσεις :

$$\ddot{v} + v\dot{u}^2 = 0 \tag{1.128}$$

$$\ddot{u} + \frac{u}{u^2 - v^2}\dot{u}^2 - \frac{v}{u^2 - v^2}\dot{v}\dot{u} = 0 \tag{1.129}$$

που προφανώς είναι αστίστοιχες των εξισώσεων (1.126) και (1.127). Επιπλέον αν τις συγκρίνουμε όρο προς όρο με τις εξισώσεις (1.124) και (1.125) διαπιστώνουμε ότι θα πρέπει να μηδενίζονται τα σύμβολα Christoffel Γ^1_{11}, Γ^1_{12} *και* Γ^2_{11} *ενώ τα μη μηδενικά είναι αυτά που δίνονται από τις σχέσεις (1.123). Επομένως, ο υπολογισμός των γεωδαισιακών εξισώσεων μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange έχει το πλεονέκτημα ότι δεν απαιτείται ο υπολογισμός των συμβόλων Christoffel ενώ επιπλέον ο υπολογισμός τους γίνεται άνευ πράξεων με απλή παρατήρηση των κατάλληλων όρων των γεωδαισιακών εξισώσεων.*



Σχήμα 1.7. Η μορφή του κώνου φωτός σε ένα καμπύλο και σε ένα επίπεδο χώρο.

1.7.1 Χαρακτηρισμός των γεωδαισιακών

Οι γεωδαισιακές καμπύλες χαρακτηρίζονται ως **χρονοειδείς**, **χωροειδείς** και **φωτοειδείς** κατ' αναλογία με όσα γνωρίζουμε από την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας (ΕΘΣ). Το κριτήριο στη συγκεκριμένη περίπτωση αποτελεί το πρόσημο του μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος της γεωδαισιακής καμπύλης. Για παράδειγμα, αν το εφαπτόμενο διάνυσμα της γεωδαισιακής καμπύλης είναι το u^μ τότε το μέτρο του δίνεται από τη σχέση $|\mathbf{u}|^2 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ και

- $|\mathbf{u}|^2 < 0$ **χρονοειδής**

- $|\mathbf{u}|^2 = 0$ **φωτοειδής**
- $|\mathbf{u}|^2 > 0$ **χωροειδής**

Η καμπύλωση του χώρου έχει ως συνέπεια την αλλαγή του ανοίγματος του κώνου φωτός, δηλαδή, οι γεννέτηρες του (φωτοειδείς καμπύλες) δεν τέμνονται σε ορθή γωνία. Για παράδειγμα, σε ένα χώρο με μετρική $ds^2 = -f(t,x)dt^2 + g(t,x)dx^2$ οι γεννέτηρες του κώνου φωτός θα δίνονται από τις σχέσεις $dt/dx = \pm\sqrt{g/f}$ που οδηγούν στις σχέσεις της ΕΘΣ για $f,\, g \to 1$.

1.7.2 Φωτοειδείς γεωδαισιακές

Συχνά στη φυσική συναντώνται περιπτώσεις μελέτης διάδοσης κυμάνσεων με την ταχύτητα του φωτός π.χ. ηλεκρομαγνητικά ή βαρυτικά κύματα. Οι γεωδαισιακές που ακολουθούν μηδενικής μάζας ηρεμίας σωματίδια κινούμενα με την ταχύτητα του φωτός λέγονται *φωτοειδείς γεωδαισιακές* και στην ουσία καθορίζουν τις γενέτειρες του κώνου φωτός που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών σημείων επί των φωτοειδών γεωδαισιακών είναι μηδέν, δηλαδή $ds = 0$ οπότε δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παράμετρος s ως παράμετρος της γεωδαισιακής καμπύλης. Αντ' αυτής μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια νέα παράμετρος λ και η εξίσωση των γεωδαισιακών να γραφεί ως

$$\frac{d^2x^\kappa}{d\lambda^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{1.130}$$

ενώ θα ισχύει ότι

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0\,. \tag{1.131}$$

1.7.3 Η αφινική παράμετρος

Στην εξαγωγή των εξισώσεων των γεωδαισιακών επιλέξαμε ως παράμετρο για την καμπύλη το ίδιο μήκος s. Η επιλογή αυτή απλοποιεί τη μορφή των εξισώσεων αλλά δεν είναι υποχρεωτική, για παράδειγμα θα μπορούσαμε να επιλέξουμε μια τυχαία παραμετροποίηση της γεωδαισιακής καμπύλης ως προς μια παράμετρο σ. Οι εξισώσεις των γεωδαισιακών καμπυλών ως προς τη νέα παράμετρο λαμβάνουν τη μορφή

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} = -\frac{d^2\sigma/ds^2}{(d\sigma/ds)^2}\frac{dx^\mu}{d\sigma} \tag{1.132}$$

και ισχύουν για κάθε παράμετρο σ. Για τον υπολογισμό της νέας εξίσωσης χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} \tag{1.133}$$

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 + \frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{d^2\sigma}{ds^2} \tag{1.134}$$

Η νέα εξίσωση για τις γεωδαισιακές, εξ. (1.132), ανάγεται στην αρχική εξίσωση (1.117) αν μηδενισθεί το δεξιό της μέλος. Αυτό είναι δυνατόν αν

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} = 0 \tag{1.135}$$

που οδηγεί σε μια γραμμική σχέση μεταξύ των s και σ

$$\sigma = \alpha s + \beta \tag{1.136}$$

όπου τα α και β είναι αυθαίρετες σταθερές.

Μια παράμετρος για την οποία η εξίσωση των γεωδαισιακών έχει τη μορφή που δίνεται απο την εξίσωση (1.117) λέγεται **αφινική παράμετρος**. Καθε αφινική παράμετρος θα συνδέεται με την παράμετρο s (ίδιο μήκος) με μια γραμμική σχέση της μορφής (1.136) και προφανώς όλες οι αφινικές παράμετροι θα συνδέονται μεταξύ τους με γραμμικές σχέσεις.

1.8 Ο ΤΑΝΥΣΤΗΣ RIEMANN

Στο κεφάλαιο 1.4 είχαμε δείξει ότι η παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης σε ένα καμπύλο χώρο μεταβάλλει το διάνυσμα κατά μια ποσότητα που είναι ανάλογη ενός τανυστή 4ης τάξης του τανυστή καμπυλότητας ή τανυστή Riemann. Ο τανυστής Riemann αποτελεί θεμελιώδες μέγεθος της γεωμετρίας Riemann διότι καθορίζει με μοναδικό τρόπο την καμπυλότητα ενός χώρου. Ο μηδενισμός του τανυστή Riemann σημαίνει ότι ο χώρος είναι επίπεδος.

Οπως εύκολα διαπιστώνουμε ο τανυστής Riemann

$$R^{\lambda}{}_{\beta\nu\mu} = -\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} \tag{1.137}$$

είναι συνάρτηση των συμβόλων Christoffel και των παραγώγων τους και κατά συνέπεια του μετρικού τανυστή και των παραγώγων του, πρώτης και δεύτερης τάξης.

1.8.1 Συμμετρίες του τανυστή Riemann

Η μελέτη των συμμετριών του τανυστή Riemann διευκολύνεται αν θεωρήσουμε την (ολικά) συναλλοίωτη μορφή του:

$$R_{\kappa\beta\nu\mu} = g_{\kappa\lambda}R^{\lambda}{}_{\beta\nu\mu} \tag{1.138}$$

ή αναλυτικότερα

$$R_{\kappa\beta\nu\mu} = \frac{1}{2}\left(g_{\kappa\mu,\beta\nu} + g_{\beta\nu,\kappa\mu} - g_{\kappa\nu,\beta\mu} - g_{\beta\mu,\kappa\nu}\right) + g_{\alpha\rho}\left(\Gamma^{\alpha}_{\kappa\mu}\Gamma^{\rho}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\kappa\nu}\Gamma^{\rho}_{\beta\mu}\right) \tag{1.139}$$

Από την παραπάνω σχέση (1.137) παρατηρούμε εύκολα ότι ο τανυστής Riemann είναι αντισυμμετρικός ως προς τους δείκτες $\nu\mu$ και τους δείκτες $\kappa\beta$, και συμμετρικός ως προς την εναλλαγή της σειράς του ζεύγους των δεικτών $\kappa\beta \leftrightarrow \nu\mu$, δηλαδή

$$R_{\kappa\beta\nu\mu} = -R_{\kappa\beta\mu\nu} \tag{1.140}$$

$$R_{\kappa\beta\nu\mu} = -R_{\beta\kappa\nu\mu} \tag{1.141}$$

$$R_{\kappa\beta\nu\mu} = R_{\nu\mu\kappa\beta} \tag{1.142}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις εύκολα δείχνεται ότι όλες οι συνιστώσες του τανυστή Riemann για τις οποίες ισχύει $\kappa = \beta$ ή $\nu = \mu$ μηδενίζονται.

Επιπλέον ισχύει ότι

$$R_{\kappa[\beta\mu\nu]} = 0 \tag{1.143}$$

Αν δεν λάβουμε υπ' όψη τις συμμετρίες του τανυστή Riemann τότε θα είχε $4^4 = 256$ ανέξαρτητες συνιστώσες σε ένα 4-διάστατο χώρο. Όμως οι συμμετρίες περιορίζουν σημαντικά τον αριθμό των ανεξαρτήτων συνιστωσών που τελικά για 4-διάστατο χωρόχρονο λαμβάνουμε μόνο **20**.

Πιο συγκεκριμένα, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι ο τανυστής Riemann προέρχεται από το τανυστικό γινόμενο δύο αντισυμμετρικών τανυστών 2ης τάξης, έστω $P_{\kappa\beta}$ και $Q_{\mu\nu}$, δηλαδή:

$$R_{\kappa\beta\mu\nu} = P_{\kappa\beta}\, Q_{\mu\nu} \tag{1.144}$$

οι δύο νέοι τανυστές επειδή είναι αντισυμμετρικοί θα έχουν $n(n-1)/2 = 4(4-1)/2 = 6$ ανεξάρτητες συνιστώσες οπότε θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι ο καθένας είναι ισοδύναμος με ένα διάνυσμα σε 6-διάστατο χώρο. Επειδή όμως υπαρχει συμμετρία μεταξύ των ζευγών δεικτών $\kappa\beta$ και $\mu\nu$ το τανυστικό γινόμενο αυτών των δύο διανυσμάτων του 6-διάστατου χώρου θα δημιουργεί ένα συμμετρικό τανυστή 2ης τάξης στον 6-διάστατο χώρο με $m(m+1)/2 = 6(6+1)/2 = 21$ ανεξάρτητες συνιστώσες. Αυτός ο τανυστής δημιουργήθηκε από τον τανυστή Riemann και προφανώς περικλειει ακριβώς την ίδια πληροφορία με αυτόν άρα και ο τανυστής Riemann θα έχει 21 ανεξάρτητες συνιστώσες. Αν λάβουμε υπ'οψη και την εξίσωση (1.143) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή Riemann είναι **20**. Γενικώτερα, ο τανυστής Riemann σε ένα χώρο N διαστάσεων θα έχει:

$$\frac{N^2(N^2-1)}{12} \tag{1.145}$$

ανεξάρτητες συνιστώσες.

Τανυστής Ricci

Η συστολή του τανυστή Riemann όπως δίνεται από την εξίσωση (1.137) οδηγεί σε ένα τανυστή δεύτερης τάξης, τον **τανυστή Ricci**

$$R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}{}_{\alpha\lambda\beta} = g^{\lambda\mu} R_{\lambda\alpha\mu\beta} \tag{1.146}$$

δηλαδή η αναλυτική του μορφή είναι:

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\nu\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu} \tag{1.147}$$

που εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι συμμετρικός, δηλαδή

$$R_{\beta\mu} = R_{\mu\beta}\,. \tag{1.148}$$

Η παραπέρα συστολή του τανυστή Ricci οδηγεί στη δημιουργία της **βαθμωτής καμπυλότητας Ricci**

$$R = R^{\alpha}{}_{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta}\,. \tag{1.149}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο μηδενισμός του τανυστή Riemann, $R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$, σημαίνει ότι ο χώρος είναι επίπεδος, ενώ ο μηδενισμός του τανυστή Ricci, $R_{\mu\nu} = 0$, σημαίνει ότι ο χώρος είναι κενός ύλης - ενέργειας (οι λόγοι θα γίνουν προφανείς αργότερα). Επομένως, η εξίσωση $R_{\mu\nu} = 0$ από μόνη της δεν σημαίνει ότι ο χώρος δεν είναι καμπύλος. Με βάση αυτή τη διαπίστωση θα μπορούσαμε να εξηγήσουμε το λόγο για τον οποίο η ΓΘΣ δεν είναι συμβατή με χώρους 3 διαστάσεων (πχ 1 χρονική και 2 χωρικές διαστάσεις). Ο λόγος είναι ότι σε χώρους 3 διαστάσεων ο τανυστής Riemann έχει $3^2(3^2-1)/12 = 6$ ανεξάρτητες συνιστώσες, αλλά τόσες έχει και ο τανυστής Ricci $3(3+1)/2 = 6$ επομένως ο μηδενισμός του τανυστή Ricci θα συνεπάγεται και το μηδενισμό του τανυστή Riemann που σημαίνει ότι όπου δεν υπάρχει ύλη η καμπυλότητα θα είναι μηδενική. Στις 4 διαστάσεις ο τανυστής Ricci έχει 10 ανεξάρτησες συνιστώσες ενώ ο τανυστής Riemann 20, επομένως ο μηδενισμός του τανυστή Ricci δεν συνεπάγεται και μηδενισμό του τανυστή Riemann.

Τανυστής Einstein

Ο συνδυασμός του τανυστή Ricci και της βαθμωτής καμπυλότητας Ricci οδηγούν στον τανυστή δεύτερης τάξης, τανυστή Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{1.150}$$

που υπεισέρχεται στις εξισώσης Einstein για τη βαρύτητα. Για τον τανυστή Einstein ισχύει:

$$G^{\mu}{}_{\nu\mu} = \left(R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu} R \right)_{;\mu} = 0\,. \tag{1.151}$$

Τανυστής Weyl

Ένας άλλος συνδυασμός του τανυστή Ricci και της βαθμωτής καμπυλότητας Ricci οδηγεί στον *μηδενικού ίχνους τανυστή δεύτερης τάξης*,

$$S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \tag{1.152}$$

δηλαδή ισχύει:

$$S = S^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 0 \,. \tag{1.153}$$

Τέλος ένας ιδιαίτερα χρήσιμος τανυστής τέταρτης τάξης είναι ο τανυστής του Weyl που μπορεί να γραφεί ως συνδυασμός του τανυστή Riemann και του τανυστή Ricci ή του τανυστή μηδενικού ίχνους :

$$\begin{aligned} C_{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\lambda\mu\nu\rho} &- \frac{1}{2} \left(g_{\lambda\rho} S_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} S_{\lambda\rho} - g_{\lambda\nu} S_{\mu\rho} - g_{\mu\rho} S_{\lambda\nu} \right) \\ &- \frac{1}{12} R \left(g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} \right) \qquad (1.154) \\ = R_{\lambda\mu\nu\rho} &- \frac{1}{2} \left(g_{\lambda\rho} R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} R_{\lambda\rho} - g_{\lambda\nu} R_{\mu\rho} - g_{\mu\rho} R_{\lambda\nu} \right) \\ &+ \frac{1}{6} R \left(g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} \right) \,. \qquad (1.155) \end{aligned}$$

και μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$g^{\lambda\rho} C_{\lambda\mu\nu\rho} = 0 \,. \tag{1.156}$$

Η χρησιμότητα του τανυστή Weyl μπορεί να διαπιστωθεί από τη μελέτη των **σύμμορφων** μετασχηματισμών. Πιο συγκεκριμένα, δύο χώροι $(M, g_{\mu\nu})$ και $(M, \tilde{g}_{\mu\nu})$ θα λέγονται σύμμορφοι αν οι μετρικές τους συνδέονται με μια σχέση της μορφής

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2A} g_{\mu\nu} \tag{1.157}$$

όπου η ποσότητα A είναι συνάρτηση των συντεταγμένων. Μια τέτοιου είδους απεικόνηση ονομάζεται *σύμμορφη* και αποδεικνύεται ότι ξ γωνία δύο διανυσμάτων δεν αλλάζει κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς. Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \neq \tilde{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \quad \text{ενώ} \quad C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \tilde{C}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \,. \tag{1.158}$$

Δηλαδή, ο τανυστής Weyl παραμένει αναλλοίωτος κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς. Επιπλέον, πρέπει να τονισθεί ότι από τη σχέση (1.155) έχει τις ίδιες συμμετρίες με τον τανυστή Riemann. Αυτό σημαίνει ότι έχει και τον ίδιο αριθμό ανεξαρτήτων συνιστωσών, δηλαδή 20. Αλλά επιπλεόν, λόγω της σχέσης (1.156) θα υπάρχουν 10 ακόμη εξισώσεις μεταξύ των συνιστωσών (γιατί·) και επομένως ο τελικός αριθμός των ανεξαρτήτων συνιστωσών του τανυστή Weyl είναι **10**.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δείξτε ότι η αντιμετάθεση των δεικτών της διπλής συναλλοίωτης παραγώγισης ενός διανύσματος είναι ανάλογη του τανυστή Riemann

Απόδειξη

Η συναλλοίωτη παράγωγος ενός διανύσματος (έστω συναλλοιώτου) δίνεται από μια σχέση της μορφής

$$a_{\lambda;\mu} = a_{\lambda,\nu} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} a_{\nu} \tag{1.159}$$

ενώ η ποσότητα $a_{\lambda;\mu}$ είναι συναλλοίωτος τανυστής δεύτερης τάξης και κατά συνέπεια η συναλλοίωτη παράγωγος του θα είναι:

$$a_{\lambda;\mu;\nu} = a_{\lambda;\mu,\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} a_{\kappa;\mu} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} a_{\lambda;\kappa}$$

οπότε αντικαθιστώντας τις συναλλοιώτους παραγώγους από τη σχέση (1.159) στην προηγούμενη εξίσωση καταλήγουμε στον παρακάτω τύπο για τη διπλή συναλλοίωτη παραγώγιση

$$a_{\lambda;\mu;\nu} = a_{\lambda,\mu,\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu,\nu} a_{\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} a_{\kappa,\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} a_{\kappa,\mu} + \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}_{\kappa\mu} a_{\rho} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} a_{\lambda;\kappa} \tag{1.160}$$

Με απλή εναλλαγή των δεικτών μ και ν στην παραπάνω σχέση υπολογίζουμε το $a_{\lambda;\nu;\mu}$, οπότε

$$\begin{aligned} a_{\lambda;\mu;\nu} - a_{\lambda;\nu;\mu} &= \left(-\Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\Gamma^{\kappa}_{\rho\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\kappa}_{\rho\mu}\right) a_{\kappa} \\ &= R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} a_{\kappa} \end{aligned} \tag{1.161}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι:

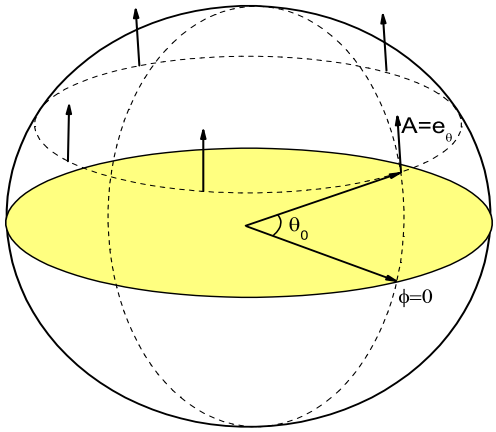
$$a^{\lambda}_{;\mu;\nu} - a^{\lambda}_{;\nu;\mu} = -R^{\lambda}_{\kappa\mu\nu} a^{\kappa} \,. \tag{1.162}$$

1.9 ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να μελετήσετε την παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος $\mathbf{A}$ κατά μήκος μια τροχιάς σταθερού ϕ (πλάτους) στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Να δείξετε ότι η παράλληλη μεταφορά μετά από μια πλήρη μεταφορά περί του άξονα διατηρεί το μέτρο του.*

   Απόδειξη

   Ένα τυχαίο διάνυσμα στην επιφάνεια της σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας ($ds^2 = d\theta^2 + sin^2 d\phi^2$) θα είναι της μορφής $\mathbf{A} = A^1\mathbf{e}_\theta + A^2\mathbf{e}_\phi$ όπου τα $\mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_\phi$ είναι μοναδιαία διανύσματα βάσης. Τα σύμβολα Christoffel θα είναι $\Gamma^1_{22} =$



Σχήμα 1.8.

$-\sin\theta\cos\theta$ *και* $\Gamma^2_{12} = \cot\theta$ *οπότε οι εξίσωσεις που δίνουν την παράλληλη μεταφορά είναι:*

$$\delta A^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu} A^\mu dx^\nu$$

οι οποίες μπορούν να γραφούν και ως :

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\nu} = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu} A^\mu$$

Οπότε επειδή θα θεωρήσουμε μεταφορά σταθερού $x^1 = \theta$ *οι εξισώσεις θα έχουν τη μορφή*

$$\frac{\partial A^1}{\partial x^2} = -\Gamma^1_{22} A^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A^1}{\partial \phi} = \sin\theta\cos\theta A^2 \tag{1.163}$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial x^2} = -\Gamma^2_{12} A^1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A^2}{\partial \phi} = -\cot\theta A^1 \tag{1.164}$$

Οπότε παραγωγίζοντας την πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις ως προς ϕ *και αντικαθιστώντας στη δεύτερη δημιουργούμε τη διαφορική εξίσωση*

$$\frac{\partial^2 A^1}{\partial \phi^2} = -\cos^2\theta A^1 \tag{1.165}$$

με γενική λύση

$$A^1 = \alpha\cos(\phi\cos\theta) + \beta\sin(\phi\cos\theta) \tag{1.166}$$

όπου τα α *και* β *είναι ολοκληρωτικές σταθερές που θα καθορισθούν από τις αρχικές συνθήκες. Αν τώρα αντικαταστήσουμε την παραπάνω λύση στην εξίσωση (1.164) βρίσκουμε εύκολα ότι:*

$$A^2 = \frac{1}{\sin\theta}\left[-\alpha\sin(\phi\cos\theta) + \beta\cos(\phi\cos\theta)\right] \tag{1.167}$$

Θα εφαρμόσουμε τις παραπάνω σχέσεις για ένα μοναδιαίο διάνυσμα που στην αρχική του θέση $(\theta,\phi) = (\theta_0, 0)$ *έχει συνιστώσες* $A^1 = 1$ *και* $A^2 = 0$ *δηλαδή είναι* $\mathbf{A} = \mathbf{e}_\theta$ *και* $|\mathbf{A}|^2 = 1$. *Επομένως οι σταθερές ολοκλήρωσης με βάση τα παραπάνω παίρνουν τις τιμές* $\alpha = 1$ *και* $\beta = 0$, *δηλαδή το διανύσμα σε μια τυχαία θέση κατά τη διάρκεια της παράλληλης μεταφοράς του θα έχει συνιστώσες*

$$A^1 = \cos(\phi\cos\theta) \quad \textit{και} \quad A^2 = -\frac{\sin(\phi\cos\theta)}{\sin\theta}\,. \tag{1.168}$$

Οπότε για $\phi = 2\pi$ *το αρχικό διάνυσμα* $\mathbf{A} = \mathbf{e}_\theta$ *μετά την παράλληλη μεταφορά του κατά* 2π *γίνεται*

$$\mathbf{A} = A^1\mathbf{e}_\theta + A^2\mathbf{e}_\phi = \cos(2\pi\cos\theta)\mathbf{e}_\theta - \frac{\sin(2\pi\cos\theta)}{\sin\theta}\mathbf{e}_\phi \tag{1.169}$$

δηλαδή οι συνιστώσες του είναι διάφορες του αρχικού διανύσματος αλλά το μέτρο του παραμένει όσο και του αρχικού διανύσματος

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}|^2 &= g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu = \left(A^1\right)^2 + \sin^2\theta\left(A^2\right)^2 \\ &= \cos^2(2\pi\cos\theta) + \sin^2\theta\frac{\sin^2(2\pi\cos\theta)}{\sin^2\theta} = 1\,. \end{aligned} \tag{1.170}$$

2

Η ΦΥΣΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΧΩΡΩΝ

2.1 Ο ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ - ΟΡΜΗΣ

Ο τανυστής ενέργειας - ορμής αποτελεί βασικό στοιχείο κάθε θεωρίας για τη βαρύτητα. Η κλασσική Νεωτώνεια αντίληψη ότι η πυκνότητα ενέργειας ρ είναι αυτή που καθορίζει τη μορφή του βαρυτικού πεδίου μέσω της εξίσωσης Poisson

$$\nabla^2 U = 4\pi G\rho \tag{2.1}$$

αναιρείται στην πράξη από την ΕΘΣ. Μπορούμε εύκολα να το αντιληφθούμε από το εξής παράδειγμα : Αν θεωρήσουμε ένα ‘ νέφος ’ σωματιδίων τότε ένας παρατηρητής που κινείται μαζί με το ‘ νέφος ’ θα μετρά ως ολική πυκνότητα ενέργειας το άθροισμα των ενεργειών των επιμέρους σωματιδίων. Αντίθετα ένας παρατηρητής που κινείται με διαφορετική ταχύτητα (σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα) θα παρατηρεί επιπλέον ροές ενέργειας αλλά και ορμής στις διάφορες διευθύνσεις. Επομένως, με βάση την ΕΘΣ, όπου όλες οι μορφές ενέργειας είναι ισοδύναμες, ο δεύτερος παρατηρητής θα πρέπει να τοποθετήσει στο δεξιό μέλος της εξίσωσης Poisson και την κινητική ενέργεια που μετρά για το κάθε σωματίδιο χωριστά, άρα οι δύο παρατηρητήτες θα κάνουν διαφορετικές μετρήσεις για την ένταση του βαρυτικού πεδίου. Δημιουργείται επομένως η ανάγκη έκφρασης της ενέργειας ενός συστήματος με τρόπο που να είναι ανεξάρτητος του παρατηρητή (δηλαδή του συστήματος συντεταγμένων) και τούτο είναι δυνατόν μόνο αν εκφράσουμε την ενεργειακή κατάσταση ενός συστήματος με τη μορφή τανυστή. Ο ζητούμενος τανυστής είναι ένας τανυστής δεύτερης τάξης και είναι γνωστός ως *τανυστής ενέργειας - ορμής*. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε με απλές υποθέσεις να ορίσουμε τις συνιστώσες αυτού του τανυστή και επιπλέον να δείξουμε ότι μέσω αυτού του τανυστή μπορούμε να εκφράσουμε τους κλασσικούς νόμους διατήρησης της ενέργειας και της ορμής.

Αν υποθέσουμε ότι το ‘ νέφος ’ των σωματιδίων έχει μια πυκνότητα ανά μονάδα όγκου n και τα σωματίδια έχουν ταχύτητα $\mathbf{u}$. Τότε η *πυκνότητα ενέργειας* δίνεται από τη σχέση

$$T^{00} = \frac{nm}{\sqrt{1-u^2}} \tag{2.2}$$

που είναι απλά το γινόμενο της πυκνότητας των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου επί την σχετικιστική έκφραση της ενέργειας των σωματιδίων.

Η *πυκνότητα ροής ενέργειας* στη διεύθυνση x θα είναι το ποσό της ενέργειας που μεταφέρεται στη μονάδα του χρόνου δια μέσου μιας μοναδιαίας επιφάνειας του επιπέδου xy, δηλαδή

$$T^{0x} = \frac{nmu_x}{\sqrt{1-u^2}}\,. \tag{2.3}$$

Στη γενική περίπτωση η παραπάνω σχέση θα γραφεί ως

$$T^{0\kappa} = \frac{nmu^\kappa}{\sqrt{1-u^2}}\,. \tag{2.4}$$

που μπορεί να ιδωθεί και ως ' πυκνότητα ορμής ' σε μία συγκεκριμένη διεύθυνση και είναι ανεξάρτητη της σειράς των δεικτών, δηλαδή $T^{0\kappa}$. Οι υπόλοιπες συνιστώσες θα ορισθούν ως το ποσό της j συνιστώσας της ορμής που διαρρέει την k διεύθυνση ανα μονάδα επιφάνεις και χρόνου. Για παράδειγμα η x ανά σωματίδιο είναι $nu_x/\sqrt{1-u^2}$ και η $x-y$ ροή της πυκνότητας ορμής είναι $[mu_x/\sqrt{1-u^2}]u_y$, δηλαδή η γενική έκφραση θα είναι

$$T^{ij} = \frac{nmu^iu^j}{\sqrt{1-u^2}}\,. \tag{2.5}$$

Οπότε η γενική μορφή του τανυστή ενέργειας - ορμής θα είναι

$$T^{\mu\nu} = n_0 m u^\mu u^\nu \tag{2.6}$$

όπου $n_0 = n\sqrt{1-u^2}$ είναι η *ίδια ενεργειακή πυκνότητα* όπως την μετράμε σε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται μαζί με τα σωματίδια, και στην ουσία εκφράζει τη συστολή του όγκου που υφίσταται το ' νέφος ' των σωματιδίων καθώς κινείται με ταχύτητα $\mathbf{u}$. Και η ποσότητα $\rho = n_0 m$ είναι η *ίδια πυκνότητα μάζας*.

Αν αντικαταστήσουμε το ' νέφος ' των σωματιδίων με τέλειο ρευστό τότε η μορφή του γίνεται:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}p \tag{2.7}$$

όπου p είναι η πυκνότητα του ρευστού.

Τέλος οι νόμοι διατήρησης ενέργειας και ορμής θα δίνονται από τις σχέσεις

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \tag{2.8}$$

που στο Νευτώνειο όριο ανάγονται στι κλασσικες εξισώσεις της υδροδυναμικής.

Αν στην εξίσωση (2.7) υποθέσουμε ότι ο χώρος μας είναι επίπεδος τότε $\eta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ οπότε οι συνιστώσες του τανυστή ενέργειας ορμής θα είναι:

$$T^{00} = (\rho + p)u^0u^0 \approx \rho \tag{2.9}$$

$$T^{0j} = (\rho + p)u^0u^j \approx \rho u^j \tag{2.10}$$

$$T^{ij} = (\rho + p)u^iu^j + p\delta^{i,j} \approx \rho u^iu^j + p\delta^{i,j} \tag{2.11}$$

οπότε από την πρώτη συνιστώσα της εξίσωσης (2.8) θα πάρουμε:

$$T^{0\nu}{}_{;\nu} = T^{00}{}_{,0} + T^{0i}{}_{,i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho u^i\right)_{,i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{2.12}$$

που είναι η γνωστή **εξίσωση συνέχειας** ή εξίσωση διατήρησης της μάζας. Ενώ οι άλλες τρείς συνιστώσες της (2.8)

$$T^{j\nu}{}_{;\nu} = T^{j0}{}_{,0} + T^{ji}{}_{,i} = \frac{\partial(\rho u^j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^j u^i)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x^j} = 0 \tag{2.13}$$

που σε συνδυασμό με την προηγούμενη εξίσωση συνέχειας δίνει:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} p \tag{2.14}$$

που είναι οι γνωστές **εξισώσεις Euler**.

2.2 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, εξισώσεις Maxwell, στη γνωστή τους γραφή έχουν τη μορφή:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{2.15}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.17}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{2.18}$$

Αν $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ είναι το διάνυσμα που παριστάνει το ηλεκτρικό πεδίο και $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου τότε μπορούμε να ορίσουμε τον τανυστή Maxwell από τις σχέσεις :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Ο τανυστής Maxwell, $F_{\mu\nu}$, είναι ο τανυστής που περιγράφει το ΗΜ πεδίο, επίσης ισχύει

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \tag{2.20}$$

που είναι σχέση του με το δυναμικό του ηλεκρομαγνητικού πεδίου A_μ.

Με βάση τα προηγούμενα οι εξισώσεις Maxwell στην ΕΘΣ λαμβάνουν την πλέον ‘ συμπαγή ’ μορφή:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0 \tag{2.22}$$

όπου j^μ είναι το 4-διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου, δηλαδή

$$j^\mu = \left(j^0, j^k\right) = (c\rho, \mathbf{j}) \tag{2.23}$$

Στον καμπύλο χώρο, η αντικατάσταση της μερικής παραγώγου από τη συναλλοίωτο παράγωγο, θα δώσει τις ζητούμενες εξισώσεις, δηλαδή ο τανυστής Maxwell έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = \left(A_{\mu,\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} A_\rho\right) - \left(A_{\nu,\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} A_\rho\right) \\ &= A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \end{aligned} \tag{2.24}$$

που ουσιαστικά διατηρεί τη μορφή του λόγω της αντισυμμετρικοτητάς του. Ενώ οι εξισώσεις Maxwell στον καμπύλο χώρο θα γραφούν ως :

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{2.25}$$

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\mu\lambda;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0 \tag{2.26}$$

Η εξίσωση συνέχειας στην ηλεκτροδυναμική με βάση τις παραπάνω σχέσεις, και ειδικά την εξίσωση (2.22) αλλά και την αντισυμμετρικότητα του τανυστή Maxwell είναι

$$j^\mu{}_{;\mu} = 0\,. \tag{2.27}$$

Η εξίσωση κίνησης ενός φορτισμένου σωματιδίου (φορτίου e και μάζας m) εντός ενός ΗΜ πεδίου, στην ΕΘΣ, δίνεται από τη σχέση:

$$mc\frac{du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^\mu{}_\nu u^\nu \tag{2.28}$$

ενώ στη ΓΘΣ

$$mc\left(\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} u^\lambda u^\nu\right) = \frac{e}{c} F^\mu{}_\nu u^\nu \tag{2.29}$$

όπου $u^\mu = dx^\mu/ds$ είναι η 4-ταχύτητα του φορτισμένου σωματιδίου.

Τέλος ο τανυστής ενέργειας - ορμής του ΕΜ πεδίου έχει τη μορφή

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha} F^\nu_\alpha - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right) \tag{2.30}$$

και προφανώς ισχύει ο νόμος διατήρησης της ενέργειας - ορμής :

$$T^{\lambda\mu}{}_{;\mu} = 0\,. \tag{2.31}$$

Επιπλέον, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η συνιστώσα T^{00} του τανυστή ενέργειας - ορμής είναι η ενεργειακή πυκνότητα του ηλεκρομαγνητικού πεδίου

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right) \tag{2.32}$$

ενώ οι

$$T^{0k} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E} \times \mathbf{B}\right)^k\,. \tag{2.33}$$

είναι στην ουσία οι συνιστώσες του διανύσματος Poynting.

3

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΕΔΙΟΥ ΤΟΥ EINSTEIN

3.1 ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΒΑΡΥΤΗΤΑ

Η κλασσική Νεωτώνεια αντίληψη για τη μορφή του βαρυτικού πεδίου πηγάζει από την εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 U(\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(\mathbf{x}) \tag{3.1}$$

όπου $U(\mathbf{x})$ το δυναμικό και $\rho(\mathbf{x})$ η πυκνότητα της ύλης που δημιουργεί το βαρυτικό πεδίο.

Η λύση της μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$U(\mathbf{x}) = -G\int d^3\mathbf{x'}\frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|} \tag{3.2}$$

που για την περίπτωση της στατικής σφαιρικής κατανομής ύλης, ακτίνας R, γίνεται

$$U(r) = -\frac{1}{r}\int_0^R r'^2\rho(r')dr' \quad \text{για} \quad r > R \tag{3.3}$$

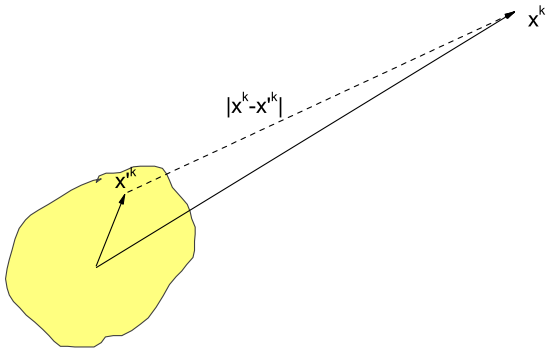
$$U(r) = -\frac{1}{r}\int_0^r r'^2\rho(r')dr' - \int_r^R r'\rho(r')dr' \quad \text{για} \quad r < R \tag{3.4}$$

Αν η κατανομή της ύλης δεν είναι σφαιρικά συμμετρική τότε ο όρος $1/|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|$ θα γραφεί ώς

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|} = \frac{1}{r} + \sum_k \frac{x^k x'^k}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_k\sum_l \left(3x'^k x'^l - \mathbf{r}'^2\delta_k^l\right)\frac{x^k x^l}{r^5} + \ldots \tag{3.5}$$

οπότε η λύση της εξίσωσης Poisson, εξίσωση (3.2), θα γραφεί ως

$$U(\mathbf{x}) = -\frac{GM}{r} - \frac{G}{r^3}\sum_k x^k D^k - \frac{G}{2}\sum_{kl} Q^{kl}\frac{x^k x^l}{r^5} + \ldots \tag{3.6}$$



Σχήμα 3.1.

όπου

$$M = \int \rho(\mathbf{x'}) d^3x' \tag{3.7}$$

$$D^k = \int x'^k \rho(\mathbf{x'}) d^3x' \tag{3.8}$$

$$Q^{kl} = \int \left(3x'^k x'^l - \mathbf{r'}^2 \delta^l_k\right) \rho(\mathbf{x'}) d^3x' \tag{3.9}$$

Προφανώς M είναι η *ολική μάζα* του συστήματος ενώ D^k είναι το διάνυσμα της *διπολικής ροπής* και Q^{kl} ο *τανυστής τετραπολικής ροπής*. Το διάνυσμα της διπολικής ροπής μηδενίζεται αν επιλέξουμε ως αρχή του συστήματος συντεταγμένων το κέντρο μάζης του συστήματος, δηλαδή δεν υπάρχει διπολική συνεισφορά στο βαρυτικό πεδίο. Αντίθετα, ο τανυστής τετραπολικής ροπής είναι μη-μηδενικός για μη-σφαιρικές κατανομές ύλης και συνεισφέρει στο δυναμικό έναν επιλέον όρο που είναι $\sim 1/r^3$ και επομένως η ελκτική δύναμη περιέχει πέραν του όρου $1/r^2$ και έναν όρο $\sim 1/r^4$.

3.2 Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Η Νευτώνεια αρχή της ισοδυναμίας ορίζει πως η *βαρυτική μάζα* που εισέρχεται στον παγκόσμιο νόμο της βαρύτητας

$$F = G\frac{mm'}{r^2} \tag{3.10}$$

είναι ίδια με την *αδρανειακή μάζα* που εισέρχεται στο νόμο της κίνησης

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{\gamma} \tag{3.11}$$

Μια έμμεση επιβεβαίωση της παραπάνω αρχής προέρχεται από την επιτυχή εξήγηση των κινήσεων των πλανητών περί τον Ήλιο. Στις μέρες μας υπάρχουν πολλά πειράματα που επιβεβαιώνουν με μεγάλη ακρίβεια την παραπάνω αρχή, Eötvös (1890), Dicke (1964), Braginsky (1971),

$$\frac{m_G - m_I}{m_G} < 10^{-13} \tag{3.12}$$

Η αρχή της ισοδυναμίας είναι αναπόσπαστο κομμάτι κάθε θεωρίας για τη βαρύτητα. Ως εκ τούτου, ήδη από τον 17ο αιώνα σχεδιάστηκαν πειράματα για την πειραματική της επιβεβαίωση. Ο Γαλιλαίος πρώτος το 1610 επιβεβαίωσε πειραματικά με εκκρεμή στα οποία είχε αναρτήσει μάζες από διαφορετικό υλικό ότι ο λόγος

$$\gamma = |m_I - m_G|/m_G$$

είναι μικρότερος του 2×10^{-3}. Ο Newton το 1680 βελτίωσε ακόμη περισσότερο την ακρίβεια του πειράματος του Γαλιλαίου θέτωντας το όριο $\gamma < 10^{-3}$. Στις αρχές του 19ου αίωνα ο Bessel βελτίωσε κατά σχεδόν δύο τάξεις μεγέθους την ακρίβεια του παραπάνω πειράματος θέτωντας το όριο στο $\gamma < 2 \times 10^{-5}$. Στη συνέχεια ο Eötvös (1890 & 1908) χρησιμοποιώντας εκκρεμές στρέψης βελτίωσε την ακρίβεια στο $\gamma < 3 \times 10^{-9}$ ενώ διαδοχικά πειράματα από τους Dicke et al. (1964) $\gamma < 3 \times 10^{-11}$, Braginsky et al. (1971) $\gamma < 9 \times 10^{-13}$, Kuroda and Mio (1989) $\gamma < 8 \times 10^{-10}$, Adelberger et al. (1990) $\gamma < 1 \times 10^{-11}$ βελτίωσαν την ακρίβεια των προηγούμενων μετρήσεων.

3.2.1 Το πείραμα του Dicke

Θα περιγράψουμε στη συνέχεια την αρχή λειτουργίας του πειράματος του Dicke et al. (1964) που χρησιμοποίησε το εκρεμμές στρέψης για να μελετήσει την έλξη του Ήλιου σε σώματα διαφορετικού υλικού.

Αν θεωρήσουμε μία ράβδο μήκους 2ℓ αναρτημενή από το μέσο της στα άκρα της οποίας αναρτώνται δύο μάζες από διαφορετικά υλικά έστω $m^{(1)}$ και $m^{(2)}$, όπως στο σχήμα 3.2. Οι δυνάμεις που δρούν στις δύο μάζες κατα μήκος του άξονα Γης - Ηλίου είναι η βαρυτική έλξη του Ήλιου, η κεντρομόλος λόγω της περιστροφής περί τον Ήλιο και η τάση που ασκείται από τη ράβδο έστω F. Θα ξεκινήσουμε γράφοντας το νόμο κίνησης της Γης περί τον Ήλιο, δηλαδή

$$\frac{GMm_G^{(E)}}{R^2} = \frac{m_I^{(E)}v^2}{R} \tag{3.13}$$

όπου M είναι η μάζα του Ήλιου, $m^{(E)}$ η μάζα της Γης και v η ταχύτητα περιφοράς της Γης περί τον Ήλιο και R η απόσταση Γής - Ηλίου. Λύνοντας ως προς την ταχύτητα καταλήγουμε στη σχέση

$$v^2 = \frac{GM}{R}\left(\frac{m_G}{m_I}\right)^{(E)} \tag{3.14}$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε μια από τις μάζες είναι

$$F^{(1)} + \frac{GMm_G^{(1)}}{R^2} = \frac{m_I^{(1)} v^2}{R} \tag{3.15}$$

$$F^{(2)} + \frac{GMm_G^{(2)}}{R^2} = \frac{m_I^{(2)} v^2}{R} \tag{3.16}$$

οπότε αντικαθιστώντας την ταχύτητα v από τη σχέση (3.14) καταλήγουμε ότι

$$F^{(1)} = \frac{GMm_I^{(1)}}{R^2} \left[\left(\frac{m_G}{m_I} \right)^{(E)} - \left(\frac{m_G}{m_I} \right)^{(1)} \right] \tag{3.17}$$

$$F^{(2)} = \frac{GMm_I^{(2)}}{R^2} \left[\left(\frac{m_G}{m_I} \right)^{(E)} - \left(\frac{m_G}{m_I} \right)^{(2)} \right] \tag{3.18}$$

Είναι εύκολο από τη αρχή να επιλέξουμε τις αδρανειακές μάζες των δύο σωμάτων να είναι ίσες δηλαδή $m_I^{(1)} = m_I^{(2)} = m$ θα διαπιστώσουμε ότι σε κάθε χρονική στιγμή πως η ροπή L που ασκείται στη ράβδο να είναι:

$$L = \left(F^{(1)} - F^{(2)} \right) \ell = \frac{GM}{R^2} \left[m_G^{(1)} - m_G^{(2)} \right] \ell \,. \tag{3.19}$$

Αν υπάρχει κάποια ροπή δηλαδή άν $m_G^{(1)} \neq m_G^{(2)}$ κατά την περιστροφή της Γης περί τον άξονα της θα παρατηρηθεί μια περιδική περιστροφική ταλάντωση περί τον άξονα του εκκρεμούς με περίοδο 12 ωρών. Με αυτού του είδους την πειραματική διάταξη, η οποία προφανώς βρισκόταν σε θάλαμο κενού μονωμένη από εξωτερικές θερμικές και ηλεκτρομαγνητικές επιδράσεις οι Roll, Krotkov και Dicke επέτυχαν ακριβεία μετρήσεων της τάξης του

$$\frac{m_G^{(1)} - m_G^{(2)}}{m} \leq 3 \times 10^{-11} \,. \tag{3.20}$$

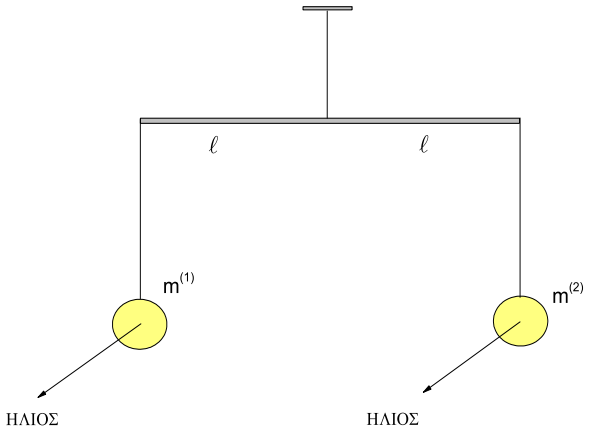
Πειράματα αυτού του είδους γίνονται και στις μέρες μας με ακρίβεια που βελτιώνεται συνεχώς, εν τούτοις θα πρέπει να επισημάνουμε ότι τα πειράματα αυτά συνιστούν την *προσεγγιστική* ορθότητα της αρχής της ισοδυναμίας.

3.3 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΒΑΡΥΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Ο Einstein διατύπωσε μια γενικότερη έκφραση για την αρχή της ισοδυναμίας πιο συγκεκριμένα όρισε ότι οι βαρυτικές και οι αδρανειακές δυνάμεις είναι πλήρως ισοδύναμες και ως εκ τούτου δεν μπορούν να διαχωρισθούν πειραματικά.

Οι συνέπειες της παραπάνω γενικευμένης αρχής είναι εξαιρετικά σημαντικές :

1. Οι βαρυτικές επιταχύνσεις θα περιγράφονται με τον ίδιο τρόπο όπως και οι αδρανειακές επιταχύνσεις. Τούτο όμως έχει σοβαρές συνέπειες, για παράδειγμα, παρατηρούμενο από ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων ένα



Σχήμα 3.2.

ελεύθερο σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση που δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = 0 \tag{3.21}$$

Αν όμως εισάγουμε γενικευμένες (μή-αδρανειακές) συντεταγμένες η εξίσωση κίνησης θα λάβει τη γνωστή γενική μορφή (εξίσωση γεωδαισιακών)

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \tag{3.22}$$

ο δεύτερος όρος της οποίας είναι η αδρανειακή επιτάχυνση του σωματιδίου που προήλθε από τη χρήση μη-αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων. Άρα οι *αδρανειακές επιταχύνσεις* περιγράφονται από τα σύμβολα Christoffel, αλλά με βάση τη γενικευμένη αρχή της ισοδυναμίας του Einstein και οι *βαρυτικές επιταχύνσεις* θα περιγράφονται από τα σύμβολα Christoffel. Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στο παρακάτω συμπέρασμα: *Εφόσον τα σύμβολα Christoffel είναι συναρτήσεις του μετρικού τανυστή και επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο μετρικός τανυστής θα έχει ρόλο και βαρυτικού δυναμικού.*

2. Οταν υπάρχουν βαρυτικές επιταχύνσεις σε μια περιοχή του χώρου τότε ο χώρος δεν είναι επίπεδος διότι τα σύμβολα Christoffel δεν θα μηδενίζονται παντού[1] Επομένως, όταν υπάρχει βαρυτικό πεδίο ($\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \neq 0$) ο χώρος θα είναι αναγκαστικά ένας καμπύλος χώρος Riemann. Δηλαδή, η παρουσία του βαρυτικού πεδίου γίνεται αισθητή μέσω της αλλαγής της γεωμετρίας του χώρου από επιπεδο (Minkowski) σε καμπύλο χώρο Riemann.

[1] Υπάρχει δυνατότητα μηδενισμού των συμβόλων Christoffel σε κάποιο σημείο (σε κάποιο ειδικό σύστημα συντεταγμένων) αλλά όχι σε όλο το χώρο.

Επομένως το βαρυτικό πεδίο έχει γεωμετροποιηθεί.

3. Άμεση συνέπεια των παραπάνω είναι η μη-ύπαρξη αδρανειακών συστημάτων συντεταγμένων στην ΓΘΣ. Αν υπήρχαν αδρανειακά συστήματα αυτά θα ήταν τα συστήματα στα οποία οι αδρανειακές επιταχύνσεις θα μηδενιζόταν και κατά συνέπεια και οι βαρυτικές θα ήταν δυνατόν να χωρισθούν από τις αδρανειακές σε αντίθεση με τη γενικευμένη αρχή της ισοδυναμίας.

Η μη ύπαρξη επομένως ' ειδικών ' συστημάτων συντεταγμένων (των αδρανειακών) και η αντικατάσταση τους από "γενικά" συστήματα (μη-αδρανειακά) οδηγεί στην ονομασία της νέας θεωρίας για τη βαρύτητα ως **Γενική** θεωρία Σχετικότητας.

3.3.1 Εξισώσεις Einstein

Με βάση την προηγούμενη συζήτηση καταλήγουμε στο ότι εφόσον η πηγή του βαρυτικού πεδίου είναι ένας τανυστής, ο τανυστής ενέργειας - ορμής $T_{\mu\nu}$, θα πρέπει και η περιγραφή του πεδίου να γίνεται απο ένα τανυστή 2ης τάξης, δηλαδή οι εξισώσεις πεδίου στη βαρύτητα θα πρέπει να είναι της μορφής

$$F_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}\,. \tag{3.23}$$

Ο τανυστής $F_{\mu\nu}$ θα πρέπει να είναι συνάρτηση του μετρικού τανυστή και των παραγώγων του 1ης και 2ης τάξης. Επειδή όμως οι νόμοι διατήρησης της ενέργειας και ορμής επιβάλλουν ${T^{\mu\nu}}_{;\mu} = 0$ θα πρέπει να ισχύει ότι

$${F^{\mu\nu}}_{;\mu} = 0\,. \tag{3.24}$$

Με βάση το θεώρημα που αναφέρει ότι: *Οι μόνοι τανυστές που μπορούν να κατασκευαστούν απο τον μετρικό τανυστή και τις 1ης και 2ης τάξης παραγώγους του, που να είναι γραμμικός ως προς τις 2ης τάξης παραγώγους, είναι ο τανυστής Riemann και οι συστολές του.*

Αρα ο $F^{\mu\nu}$ μπορεί να γραφεί ως

$$F^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} + ag^{\mu\nu}R + bg^{\mu\nu}\,. \tag{3.25}$$

και επομένως οι εξισώσης του πεδίου θα γραφούν ως

$$R^{\mu\nu} + ag^{\mu\nu}R + bg^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \tag{3.26}$$

λόγω όμως της εξίσωσης (3.24) θα πρέπει να ισχύει

$$\left(R^{\mu\nu} + ag^{\mu\nu}R + bg^{\mu\nu}\right)_{;\mu} = 0 \tag{3.27}$$

Αποδεικνύεται ότι τούτο είναι δυνατόν μόνο αν $a = -1/2$. Αρα η τελική μορφή των εξισώσεων Einstein είναι

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}\,. \tag{3.28}$$

Η σταθερά Λ είναι γνωστή ως **κοσμολογική σταθερά**[2] και στις μέρες μας αποδεικνύεται εξαιρετικά σημαντική για την κατανόηση της διαστολής του Σύμπαντος. Η σταθερά κ που δείχνει το βαθμό σύζευξης της γεωμετρίας του χωρόχρονου με την κατανομή της ύλης-ενέργειας δίνεται ως συνδυασμός θεμελιωδών σταθερών της φυσικής όπως θα δείξουμε στη συνέχεια ($k = 8\pi G/c^4$).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να δειχθεί ότι οι εξισώσεις Einstein μπορούν να γραφούν ως :

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \tag{3.29}$$

Απόδειξη

Οι εξισώσεις Einstein γράφονται:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}$$

οπότε πολλαπλασιάζουτας με $g^{\rho\nu}$ καταλήγουμε στην

$$2R^{\rho}{}_{\nu} - \delta^{\rho}{}_{\nu} R = -2\kappa T^{\rho}{}_{\nu}$$

και με συστολή των δεικτών μ και ν πέρνουμε $2R - 4R = -2\kappa T$ δηλ. $R = \kappa T$. Επομένως

$$R_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) .$$

3.3.2 Το Νευτώνιο όριο

Θα δείξουμε τώρα ότι για την περίπτωση ασθενών βαρυτικών πεδίων και για κινήσεις με μικρή ταχύτητα, οι εξισώσεις των γεωδαισιακών ανάγονται στις γνωστές εξισώσεις κίνησης της Νευτώνειας θεωρίας και οι εξισώσεις Einstein ανάγονται στις εξισώσεις των γεωδαισιακών.

[2] Η κοσμολογική σταθερά προτάθηκε απο τον Einstein με σκοπό την περιγραφή ενός στατικού σύμπαντος, δηλαδή ενός σύμπαντος που δεν θα καταρρεύσει από τις βαρυτικές του έλξεις. Πολύ γρήγορα όμως εγκαταλείφθηκε όταν διαπιστώθηκε η απομάκρυνση των γαλαξιών απο τον Hubble που οδηγούσε σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν. Ο Einstein τότε μίλησε για το μεγαλύτερο λάθος της ζωής του! Οι πρόσφατες μάλιστα παρατηρήσεις δείχνουν ένα σύμπαν που βρίσκεται σε επιταχυνόμενη διαστολή και η κοσμολογική σταθερά αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο για όλες τις θεωρίες που προσπαθούν να εξηγήσουν την επιταχυνόμενη διαστολή. Από άποψη μονάδων η κποσμολογική σταθερά έχει τη μορφή

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^2} \rho_v$$

όπου ρ_v είναι η ενεργειακή πυκνότητα του κενού. Σύμφωνα με τη ΓΘΣ μια θετική τιμή της κοσμολογικής σταθεράς (που σημαίνει θετική ενέργεια του κενού) έχει ως συνέπεια την επιταχυνόμενη διαστολή του κενού χώρου.

Εξισώσεις κίνησης

Οι εξισώσεις των γεωδαισιακών γράφονται συνήθως ως προς τον ίδιο χρόνο τ ή το ίδιο μήκος s. Στο Νευτώνειο όριο δεν υπάρχει η έννοια του ιδίου μήκους ή ιδίου χρόνου αλλά αντ' αυτού θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον απόλυτο ή συντεταγμένο χρόνο t ο οποίος δεν είναι αφινική παράμετρος, άρα θα χρησιμοποιήσουμε την μορφή (1.132) των γεωδαιδιακών εξισώσεων, δηλαδή

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} = -\frac{d^2\sigma/ds^2}{(d\sigma/ds)^2}\frac{dx^\mu}{d\sigma} \tag{3.30}$$

οπότε επιλέγοντας τον απόλυτο χρόνο ως παράμετρο, δηλαδή $\sigma = x^0 = t$ η παραπάνω σχέση θα γραφεί ως

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = -\frac{d^2t/ds^2}{(dt/ds)^2}\frac{dx^\mu}{dt} \tag{3.31}$$

η πρώτη από τις παραπάνω 4 εξισώσεις (για το x^0) δίνει προφανώς $dx^0/dt = dt/dt = 1$ και $d^2x^0/dt^2 = 0$ οπότε

$$\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = -\frac{d^2t/ds^2}{(dt/ds)^2}\frac{dx^\mu}{dt} \tag{3.32}$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.31) μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις των γεωδαισιακών ως

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \left(\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{dx^\mu}{dt}\right)\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = 0 \tag{3.33}$$

ουσιαστικά έχουμε χρησιμοποιήσει την πρώτη από τις εξισώσεις των γεωδαισιακών για να απαλλείψουμε τους όρους στο δεξιό μέλος της (3.31), άρα στη ουσία έχουν μείνει 3 εξισώσεις για τις 3 συνιστώσες x^k για $(k = 1, 2, 3)$ και αναγόμαστε στη μορφή

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \left(\Gamma^k_{\alpha\beta} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{dx^k}{dt}\right)\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = 0\,. \tag{3.34}$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε προσεγγίσεις και πιο συγκεκριμένα ότι η ταχύτητες είναι σημαντικά μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός (υπενθυμίζουμε ότι χρησιμοποιούμε γεωμετρικές μονάδες άρα $c = 1$) και προφανώς θα ισχύει $u^k = dx^k/dt << 1$ άρα $\Gamma^k_{\alpha\beta} >> \Gamma^0_{\alpha\beta}dx^k/dt$ οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} \approx -\Gamma^k_{00} \tag{3.35}$$

Δηλαδή το σύμβολο Christoffel, Γ^k_{00}, αντιστοιχεί στη Νευτώνεια δύναμη ανά μονάδα μάζας. Αν προσπαθήσουμε να το υπολογίσουμε για περίπου επίπεδο χώρο, δηλαδή $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ με $\eta_{\mu\nu} >> h_{\mu\nu}$, το σύμβολο Christoffel Γ^k_{00}, θα πάρει τη μορφή

$$\Gamma^k_{00} = \frac{1}{2}g^{k\lambda}\left(2g_{\lambda 0,0} - g_{00,\lambda}\right) \approx -\frac{1}{2}\eta^{k\lambda}g_{00,\lambda} = \frac{1}{2}\delta^{kj}g_{00,j} = \frac{1}{2}g_{00,k} \tag{3.36}$$

Άρα η εξισώσεις των γεωδαισιακών θα δίνονται προσεγγιστικά απο τις σχέσεις

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} \approx g_{00,k}\,. \tag{3.37}$$

Η σχέση αυτή θα πάρει τη γνωστή Νευτώνεια μορφή

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} \approx \frac{\partial U}{\partial x^k} \tag{3.38}$$

αν υποθέσουμε ότι η συνιστώσα της μετρικής g_{00} έχει τη μορφή

$$g_{00} \approx \eta_{00} + h_{00} = 1 + h_{00} = 1 + 2U \tag{3.39}$$

(θέσαμε $U = 2h_{00}$) δηλαδή η ποσότητα (βαθμωτό μέγεθος) U είναι το Νευτώνειο δυναμικό.

Εξισώσεις Einstein

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι εξισώσεις Einstein ανάγονται στην εξίσωση Poisson.

Μια εναλλακτική γραφή των εξισώσεων Einstein είναι και η (3.29), δηλαδή

$$R_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{3.40}$$

για την απόδειξη του ζητούμενου θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τη συνιστώσα 00 γιατί στην ουσία για μικρές ενεργειακές συγκεντρώσεις η κυρίαρχη συνιστώσα του τανυστή ενέργειας - ορμής είναι η T_{00}. Επομένως

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\kappa\left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T\right) \approx -\kappa\left(T_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}T\right) \approx -\frac{1}{2}\kappa T_{00} \\ &= -\frac{1}{2}\kappa\rho \end{aligned} \tag{3.41}$$

οπου θεωρήσαμε ότι $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \approx \eta^{00}T_{00} = T_{00}$. Η 00 συνιστώσα του τανυστή Ricci δίνεται από τη σχέση

$$R_{00} = \Gamma^\mu_{00,\mu} - \Gamma^\mu_{0\mu,0} + \Gamma^\mu_{00}\Gamma^\nu_{\nu\mu} - \Gamma^\mu_{0\nu}\Gamma^\nu_{0\mu} \approx \Gamma^\mu_{00,\mu} \approx \Gamma^j_{00,j} \tag{3.42}$$

αλλά όπως αποδείξαμε νωρίτερα $\Gamma^j_{00} \approx g_{00,j}/2$ επομένως

$$R_{00} \approx \Gamma^j_{00,j} \approx \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^j \partial x^j} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} \approx \nabla^2 U \tag{3.43}$$

άρα καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\nabla^2 U = \frac{1}{2}\kappa\rho \tag{3.44}$$

από την οποία συγκρίνοντας με την εξίσωση Poisson (2.1) υπολογίζουμε τη τιμή της άγνωστης σταθεράς κ που είναι

$$\kappa = 8\pi G\,. \tag{3.45}$$

4

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΕΔΙΟΥ ΤΟΥ EINSTEIN

Οι εξισώσεις του Einstein είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και οι μαθηματικές μας γνώσεις δεν επιτρέπουν την γενική επίλυση τους. Εν τούτοις, αν θεωρήσουμε ότι η ζητούμενη λύση έχει μερικές ' λογικές ' συμμετρίες, προερχόμενες από συγκεκριμένες φυσικές παραδοχές τότε είναι δυνατή η εξεύρεση λύσεων που μπορούν να αναπαραστούν το χωρόχρονο πέριξ και εντός αστρικών αντικειμένων που παρατηρούμε. Τέτοιες παραδοχές είναι για παράδειγμα ότι η πηγή του πεδίου είναι σφαιρικά συμμετρική ή αξονικά συμμετρική, είτε ότι ο χωρόχρονος μακρυά από την πηγή είναι επίπεδος.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μερικές από τις πλέον σημαντικές λύσεις των εξισώσεων Einstein, αν και για το επίπεδο του παρόντος συγγράμματος η μόνη λύση που θα μελετηθεί λεπτομερώς είναι η απλούστερη σφαιρικά συμμετρική και στατική λύση Schwarzschild.

4.1 Η ΛΥΣΗ SCHWARSCHILD

Μια λύση των εξισώσεων Einstein που περιγράφει σφαιρικά συμμετρικούς χωρόχρονους έχει τη μορφή

$$ds^2 = e^{\nu(t,r)}dt^2 - e^{\lambda(t,r)}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{4.1}$$

οπου οι $\lambda(t,r)$ και $\nu(t,r)$ είναι άγνωστες συναρτήσεις που θα προσδιορισθούν απο τη λύση των εξισώσεων Einstein στο κενό, δηλαδή από τη λύση της εξίσωσης

$$R_{\mu\nu} = 0\,. \tag{4.2}$$

Τα σύμβολα Christoffel για τη μετρική (4.1) είναι:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{\nu}}{2}\,, \qquad \Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\,, \qquad \Gamma^0_{01} = \frac{\nu'}{2} \tag{4.3}$$

$$\Gamma^1_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{2}\,, \qquad \Gamma^0_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu}\,, \qquad \Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2} \tag{4.4}$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}\,, \qquad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda} \tag{4.5}$$

$$\Gamma^3_{23} = \cot\theta\,, \qquad \Gamma^1_{33} = -re^{-\lambda}\sin^2\theta\,, \qquad \Gamma^2_{33} = \sin\theta\ \cos\theta \tag{4.6}$$

Οπότε οι ζητούμενες συνιστώσες του τανυστή Ricci θα είναι:

$$R_{11} = -\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} + e^{\lambda-\nu}\left[\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4}\right] \tag{4.7}$$

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right] - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} \tag{4.8}$$

$$R_{10} = \frac{\dot{\lambda}}{r} \tag{4.9}$$

$$R_{22} = = -e^{-\lambda}\left[1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right] + 1 \tag{4.10}$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22} \tag{4.11}$$

Ας προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε τη συναρτησιακή μορφή των $\nu(t,r)$ και $\lambda(t,r)$ σε ένα χωρόχρονο από τον οποίο απουσιάζει ύλη, δηλαδή $R_{\mu\nu} = 0$. Οπότε από το άθροισμα $R_{11} + e^{\lambda-\nu}R_{00} = 0$ καταλήγουμε στη σχέση

$$\nu' + \lambda' = 0 \tag{4.12}$$

επίσης από τη συνιστώσα $\{01\}$ του τανυστή Ricci

$$R_{10} = \frac{\dot{\lambda}}{r} = 0 \tag{4.13}$$

οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\lambda = \lambda(r)$. Από την εξίσωση $R_{22} = 0$ (εξίσωση 4.10) αναγόμαστε στη σχέση

$$\nu' - \lambda' = \frac{2}{r}(e^{\lambda} - 1) \tag{4.14}$$

Άρα

$$\nu' = \frac{1}{r}(e^{\lambda} - 1) \tag{4.15}$$

$$\lambda' = -\frac{1}{r}(e^{\lambda} - 1) \tag{4.16}$$

Επειδή το δεξιό μέλος των παραπάνω εξισώσεων είναι συνάρτηση μόνο του r για να ισχύει η πρώτη θα πρέπει η συνάρτηση $\nu = \nu(t,r)$ να μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\nu(t,r) = \alpha(t) + \tilde{\nu}(r) \tag{4.17}$$

που μας οδηγεί στον ορισμό μία νέας μεταβλητής για το χρόνο, έστω $\tilde{t}$, για την οποία θα ισχύει

$$d\tilde{t} = e^{\alpha/2}dt \tag{4.18}$$

δηλαδή η χρονική εξάρτηση της $\nu(t,r)$ "απορροφιέται" από την αλλαγή απο τη μεταβλητή t στην $\tilde{t}$.

Άρα από την εξίσωση (4.12) καταλήγουμε στην σχέση

$$\lambda(r) = -\tilde{\nu}(r) \tag{4.19}$$

δηλαδή οι δύο άγνωστες συνιστώσες του μετρικού τανυστή είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε, για απλότητα, τη γραφή $\nu(r)$ αντί της $\tilde{\nu}(r)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BIRKOFF

Αν η γεωμετρία του χωρόχρονου σε μια περιοχή του είναι σφαιρικά συμμετρική και αποτελεί λύση των εξισώσεων του Einstein στο κενό, τότε υποχρεωτικά αποτελεί τμήμα της γεωμετρίας Schwarzschild.

Το εξωτερικό πεδίο ενός σφαιρικά συμμετρικού και ηλεκτρικά ουδέτερου αστέρα ικανοποιεί τις συνθήκες του Birkoff ανεξάρτητα άν ο αστέρας είναι στατικός, πάλλεται ή καταρρέει, επομένως το εξωτερικό του πεδίο θα είναι τμήμα της γεωμετρίας Schwarzschild.

Λύνοντας την εξίσωση (4.16) είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε και τη συνάρτηση $\lambda(r)$. Προς τούτο αντικαθιστούμε $f = e^{-\lambda}$ οπότε η εξίσωση (4.16) γράφεται ως

$$rf' + f = 1 \tag{4.20}$$

που έχει προφανή λύση

$$f = e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{k}{r} \tag{4.21}$$

όπου k είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης και θα καθορισθεί από τις οριακές συνθήκες. Στη συγκεκριμένη περίπτωση για $r \to \infty$ θα πρέπει η λύση που βρήκαμε να ανάγεται στη Νευτώνεια, που όπως δείξαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο είναι

$$g_{00} = 1 + \frac{2}{c^2}U(r) \tag{4.22}$$

όπου $U(r)$ είναι το Νευτώνειο δυναμικό που για την περίπτωση της σφαιρικής συμμετρίας είναι

$$U(r) = -\frac{GM}{r} \tag{4.23}$$

οπότε

$$k = \frac{2GM}{c^2} \tag{4.24}$$

και η λύση του Schwarzschild λαμβάνει τη μορφή

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\phi d\phi^2\right) . \tag{4.25}$$

Η ποσότητα $2GM/rc^2$ προσδιορίζει ουσιαστικά το βαθμό απόκλισης του χωρόχρονου Schwarzschild από το χωρόχρονου Minkowski. Για τον Ήλιο με μάζα $M_\odot \approx 2 \times 10^{33} gr$ και ακτίνα $R_\odot = 696.000 km$ ο όρος $2GM/rc^2$ λαμβάνει την τιμή $\approx 4 \times 10^{-6}$, άρα οι διορθώσεις της ΓΘΣ ακόμη και στην επιφάνεια του Ήλιου είναι μικρές. Αντίθετα σε πολύ πυκνά σώματα όπως οι αστέρες νετρονίων ($R \approx 10 km$, $M = 1.4 M_\odot$) οι διορθώσεις αυτές είναι της τάξης του $\sim 0.3 - 0.5$. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές γεωμετρικές μονάδες ($G = c = 1$) ως προς τις οποίες ο όρος $2GM/rc^2$ γίνεται $2M/r$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να βρεθούν τα σύμβολα Christoffel για τη μετρική του Schwarzschild.*
   Λύση
   Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.96) καταλήγουμε ότι τα μόνα μή μηδενικά συμβολα Christoffel είναι τα

$$\begin{aligned} &\Gamma^t{}_{tr} = \frac{1}{2}\nu' , \quad \Gamma^r{}_{tt} = \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda} , \quad \Gamma^r{}_{rr} = \frac{1}{2}\lambda' \\ &\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -re^{-\lambda} , \quad \Gamma^r{}_{\phi\phi} = -re^{-\lambda}\sin^2\theta , \quad \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \frac{1}{r} \\ &\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\,\cos\theta , \quad \Gamma^\phi{}_{r\phi} = \frac{1}{r} , \quad \Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} . \end{aligned} \tag{4.26}$$

2. *Να γραφεί το γραμμικό στοιχείο του χωρόχρονου Schwarzschild σε ένα νέο σύστημα συντεγμένων ούτως ώστε το χωρικό τμήμα να είναι ανάλογο με αυτό του Ευκλείδειου χώρου.*
   Απόδειξη
   Το νέο σύστημα συντεταγμένων (t', r', θ', ϕ') μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση των συντεταγμένων Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) ως εξής

$$t = t', \quad r = \left(1 + \frac{r_s}{4r'}\right) r', \quad \theta = \theta', \quad \phi = \phi'$$

   όπου $r_s = 2Gm/c^2$, οπότε στο νέο σύστημα συντεταγμένων το γραμμικό στοιχείο γράφεται:

$$ds^2 = \left(\frac{1 - r_s/4r'}{1 + r_s/4r'}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_s}{4r'}\right)^4 \left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

   Οι συντεταγμένες (r', θ, ϕ) καλούνται **σφαιρικές ισοτροπικές** *συντεταγμένες.*

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) *που συνδέονται με τις* (r', θ, ϕ) *με τις σχέσεις* $x = r' \sin(\theta)\cos(\phi)$, $y = r' \sin(\theta)\cos(\phi)$ *και* $z = r' \cos(\theta)$. *Οπότε το γραμμικό στοιχείο θα γραφεί*

$$ds^2 = \left(\frac{1 - r_s/4r'}{1 + r_s/4r'}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_s}{4r'}\right)^4 \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \tag{4.27}$$

όπου $r'^2 = x^2 + y^2 + z^2$. *Οι συντεταγμένες αυτές ονομάζονται* **ισοτροπικές καρτεσιανές**.

4.1.1 Οι εξισώσεις των γεωδαισιακών στο χωρόχρονο Schwarzschild

Οι εξισώσεις των γεωδαισιακών μπορούν εύκολα να βρεθούν με χρήση της εξίσωσης (1.117) για την οποία τα απαιτούμενα σύμβολα Christoffel δίνονται από τις σχέσεις (4.26).

$$\ddot{r} - \frac{1}{2}\nu' \dot{r}^2 - r e^{\nu} \dot{\theta}^2 - r e^{\nu} \sin^2\theta \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} e^{2\nu} \nu' \dot{t}^2 = 0 \tag{4.28}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta \dot{\phi}^2 = 0 \tag{4.29}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\theta}\dot{\phi} = 0 \tag{4.30}$$

$$\ddot{t} + \nu' \dot{r} \dot{t} = 0 \tag{4.31}$$

όπου η τελεία σημαίνει παραγώγιση ως προς τον ίδιο χρόνο τ ή το ίδιο μήκος s και η οξεία παραγώγιση ως προς r. Μια επιπλέον εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί κάποιας από τις παραπάνω με χρήση της σχέσης

$$g_{\lambda\mu} \dot{x}^{\lambda} \dot{x}^{\mu} = 1 \tag{4.32}$$

ή αναλυτικότερα

$$-e^{\nu}\dot{t}^2 + e^{\lambda}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta} + r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2 = 1 \tag{4.33}$$

Αν σε κάποια χρονική στιγμή η γεωδιασιακή διέρχεται από ένα τυχαίο σημείο P του ισημερινού επιπέδου $\theta = \pi/2$ και η εφαπτομενή της βρίσκεται επί του ιδίου επιπέδου, τότε θα ισχύει

$$\dot{\theta} = 0 \quad \text{στο} \quad P \tag{4.34}$$

και με βάση την εξίσωση (4.29) θα είναι

$$\ddot{\theta} = 0 \quad \text{στο} \quad P \tag{4.35}$$

αλλά και όλες οι χρονικές παράγωγοι θα μηδενίζονται. Αυτό σημαίνει ότι η τροχιά θα βρίσκεται πάντα επί του ισημερινού επιπέδου.

Επομένως οι γεωδαισιακές που βρίσκονται στο ισημερινό επίπεδο ($\theta = \pi/2$) θα δίνονται από τις σχέσεις :

$$\ddot{r} - \frac{1}{2}\nu' \dot{r}^2 - re^{\nu}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}e^{2\nu}\nu' \dot{t}^2 = 0 \tag{4.36}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} = 0 \tag{4.37}$$

$$\ddot{t} + \nu' \dot{r}\dot{t} = 0 \tag{4.38}$$

ενώ η σχέση (4.33) θα γραφεί ως :

$$-e^{\nu}\dot{t}^2 + e^{\lambda}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = 1\,. \tag{4.39}$$

Από τις εξισώσεις (4.37) και (4.38) εύκολα αποδεικνύεται ότι :

$$\frac{d}{d\tau}\left(r^2\dot{\phi}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\dot{\phi} = L = \text{σταθερό} : \text{ Ολοκλήρωμα Στροφορμής} \tag{4.40}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(e^{\nu}\dot{t}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{\nu}\dot{t} = E = \text{σταθερό} : \text{ Ολοκλήρωμα Ενέργειας} \tag{4.41}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.39) και τα ολοκληρώματα κίνησης καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση κίνησης

$$\left(\frac{d}{d\phi}u\right)^2 + u^2 = \frac{E^2 - 1}{L^2} + \frac{2Mu}{L^2} + 2Mu^3 \tag{4.42}$$

όπου $u = 1/r$. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί εύκολα να αναχθεί σε μια εξίσωση παρόμοια με την εξίσωση Kepler της Νευτώνειας δυναμικής, δηλαδή

$$\frac{d^2}{d\phi^2}u + u = \frac{M}{L^2} + 3Mu^2 \tag{4.43}$$

από την οποία απουσιάζουν παραγωγίσεις ως προς τον ίδιο χρόνο τ. Η εξίσωση (4.43) όπως προαναφέρθηκε αποτελεί επέκταση της εξίσωσης Kepler της Νευτώνειας δυναμικής και θα ταυτίζεται αν απαλειφθεί ο όρος $3Mu^2$. Ο ορός αυτός για κινήσεις στο ηλιακό σύστημα, όπου $M = M_{\odot} = 1.47664km \approx 2\times10^{33}g$, και για τροχιές π.χ. των πλανητών Ερμή ($r \approx 0.46 \times 10^8 km$) και Γής ($r \approx 1.5 \times 10^8 km$) λαμβάνει τις τιμές $\approx 3 \times 10^{-8}$ και $\approx 10^{-8}$ αντίστοιχα. Δηλαδή η συνεισφορά της σχετικιστικής βαρύτητας είναι φαινομενικά αμελητέα, αλλά επειδή το φαινόμενο (η περιφορά των πλανητών περί τον Ήλιο) επαναλαμβάνεται οι λεγόμενες " σχετικιστικές διορθώσεις " αθροίζονται με αποτέλεσμα να παρατηρούνται μετρήσιμες αποκλίσεις στις τροχιές των πλανητών. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναφερθούμε αναλυτικά στις τροχιές σωμάτων και φωτεινών ακτίνων στο χωρόχρονο Schwarzschild και θα περιγράψουμε πειράματα που επιβεβαιώνουν την ΓΘΣ.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να δειχθεί ότι ισχύει ο 3ος νόμος του Kepler για κυκλικές τροχιές γύρω από μια μελανή οπή Schwarzschild.*
   Απόδειξη

Από τα ολοκληρώματα κίνησης $r^2\dot{\phi} = L$ *και* $e^{\nu}\dot{t} = E$ *και την εξίσωση των γεωδαισιακών για ακτινική κίνηση (4.36) θέτουτας*

$$\frac{dr}{dt} = 0 \qquad \text{και} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

λαμβάνουμε ότι

$$-re^{\nu}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}e^{2\nu}\nu'\dot{t}^2 = 0$$

άρα

$$\Omega^2 = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\dot{\phi}}{\dot{t}}\right)^2 = \frac{e^{\nu}}{2}\frac{\nu'}{r} = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}e^{\nu} = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{M}{r^3}$$

επομένως

$$\Omega^2 = \frac{M}{r^3}\,. \tag{4.44}$$

2. *Δύο ρολόγια κινούνται σε απόσταση* $r_1 = 6M$ *και* $r_2 = 10M$ *απο μία μελανή οπή Schwarschild.*
α) *Ποιά είναι η περίοδος περιφοράς που μετράει το κάθε ρολόι ως προς την περίοδο που μετράει ένας παρατηρητής στο άπειρο.*
β) *Αν το πείραμα το επαναλαμβάναμε στη Γη με δύο ρολόγια σε τροχιές* $h_1 = 10$*km και* $h_2 = 20$*km από την επιφάνεια της. Αν η ακρίβεια των ρολογιών είναι της τάξης των* 10^{-13}*sec θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε διαφορές μετά απο μία πλήρη περιφορά του κάθε ρολογιού;*[1]
Απόδειξη
α) *Ο ίδιος χρόνος των περιστρεφόμενων ρολογιών δίνεται απο τη σχέση:*

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

που γράφεται:

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

Για απλότητα θα θεωρήσουμε ότι τα ρολόγια κινούνται στο ισημερινό επίπεδο $\theta = 0$*. Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τον* **τρίτο νόμο το Kepler***:*

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{M}{R^3} \equiv \Omega^2 = \frac{2\pi}{P}$$

καταλήγουμε στη σχέση:

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{3M}{R}.$$

[1] Μάζα Γης : $M_{\oplus} = 5.98 \times 10^{24}$kg=$4.35 \times 10^{-6}$km, ακτίνα Γης : $R_{\oplus} = 6370$km.

Στις συγκεκριμένες τροχιές θα έχουμε:

$$\left(\frac{d\tau_1}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{3M}{r_1} = \frac{1}{2}.$$

και

$$\left(\frac{d\tau_2}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{3M}{r_2} = \frac{5}{7}.$$

Δηλαδή στην πρώτη περίπτωση θα είναι: $P_\infty^{(1)} = 2\pi \times 6\sqrt{6}M$ *και* $P_1 = 1/\sqrt{2}P_\infty^{(1)} = 12\pi\sqrt{3}M$*, ενώ στη δέυτερη* $P_\infty^{(2)} = 2\pi \times 10\sqrt{10}M$ *και* $P_2 = \sqrt{5/7}P_\infty^{(2)} = 20\pi\sqrt{50/7}M$.

β) *Για δύο ρολόγια σε τροχίες* $h_1 = 10km$ *και* $h_2 = 20km$ *θα πάρουμε*

$$\left(\frac{d\tau_1}{d\tau_2}\right)^2 = \frac{1 - \frac{3M\oplus}{R_\oplus + h_1}}{1 - \frac{3M\oplus}{R_\oplus + h_2}} \approx 1 - \frac{3M\oplus}{R_\oplus + h_1} + \frac{3M\oplus}{R_\oplus + h_2}$$

και τελικά

$$d\tau_1 = \left(1 - 1.6 \times 10^{-12}\right) d\tau_2$$

που με τη δοθείσα ακρίβεια μέτρησης των ρολογιών είναι δυνατόν να μετρηθεί.

4.1.2 Μελανή Οπή Schwarzschild

Η μετρική Schwarzschild, στο σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων που επιλέξαμε, παρουσιάζει ' ανωμαλίες ' για $r = 2M$ διότι $g_{00} = 0$ και $g_{11} \to \infty$! Εν τούτοις, η ορίζουσα του μετρικού τανυστή $g = \det|g_{\mu\nu}| = r^4 \sin^2(\theta)$ είναι διάφορη του μηδενός για $r = 2M$ οπότε η ' ανωμαλία ' αυτή θα λέμε ότι είναι μια *φαινομενική ανωμαλία* ή *ανωμαλία του συστήματος συντεταγμένων* και όχι μια ουσιαστική ανωμαλία. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η *πραγματική ανωμαλία* βρίσκεται στο $r = 0$.

Παρότι η επιφάνεια $r = 2M$ δεν αποτελεί ουσιαστικό μαθηματικό πρόβλημα για τη μετρική Schwarzschild, έχει σημαντικές φυσικές ιδιότητες που θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε μέσω της μελέτης του κώνου φωτός στο χωρόχρονο Schwarzschild. Οι γενέτειρες του κώνου φωτός (για σταθερά θ και ϕ) θα δημιουργούνται από τη περιορισμένη μορφή της μετρικής

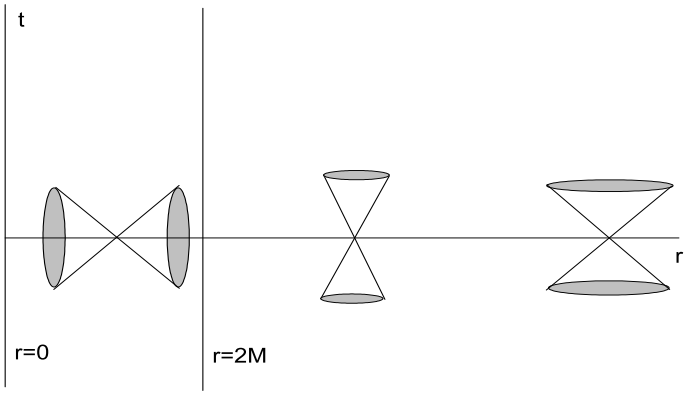
$$ds^2 \equiv 0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \tag{4.45}$$

άρα

$$\frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \tag{4.46}$$

Ασυμπτωτικά, $r \to \infty$, οι γενέτειρες του κώνου φωτός θα τέμνονται σε ορθή γωνία, αλλά για μικρότερα r η γωνία ελλατώνεται, ενώ στην κρίσιμη απόσταση

$r = 2M$ οι γενέτειρες του κώνου φωτός ταυτίζονται και επομένως τα φωτεινά σήματα δεν μπορούν να διαφύγουν προς μεγαλύτερα r αλλά αντίθετα φαίνεται να παραμένουν στάσιμα στην επιφάνεια $r = 2M$. Αρα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η ευθεία $r = 2M$ στο διάγραμμα $t-r$ είναι μία φωτοειδής καμπύλη και αντίστοιχα η σφαιρική επιφάνεια $r = 2M$ είναι μια φωτοειδής επιφάνεια. Για $r < 2M$ τα πρόσημα στην εξίσωση (4.45) αλλάζουν και μαζί τους και η



Σχήμα 4.1. Ο κώνος φωτός στο χωρόχρονο Schwarzschild.

σημασία των συντεταγμένων, δηλαδή η χρονική συντεταγμένη t γίνεται χωρική και αντίστροφα η χωρική συντεταγμένη r γίνεται χρονική. Οπότε ο κώνος φωτός αλλάζει διεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1. Συνέπεια τούτου είναι ότι κανένα σωματίδιο, ούτε τα φωτόνια μπορούν να κινηθούν προς μεγαλύτερα r αλλά αντίθετα κινούνται προς το $r = 0$ που αποτελεί την ουσιαστική ανωμαλία του χωρόχρονου.

Στην αδυναμία διαφυγής σωμάτων αλλά και φωτονίων από την περιοχή $r \leq 2M$ οφείλουμε τον όρο **μελανή οπή** δηλαδή μια περιοχή του χωρόχρονου από την οποία τίποτα δεν μπορεί να διαφύγει ούτε και το φώς.

Η επιφάνεια $r = 2M$ ονομάζεται **ορίζοντας γεγονότων** ή απλά **ορίζοντας** και με βάση τα προηγούμενα **επιφάνεια απείρου μετάθεσης προς το ερυθρό** [2].

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να δείξετε ότι κάθε διάνυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια του ορίζοντα είναι φωτοειδές.

Απόδειξη

[2] Περισσότερες λεπτομέριες στο Κεφάλαιο 5.3

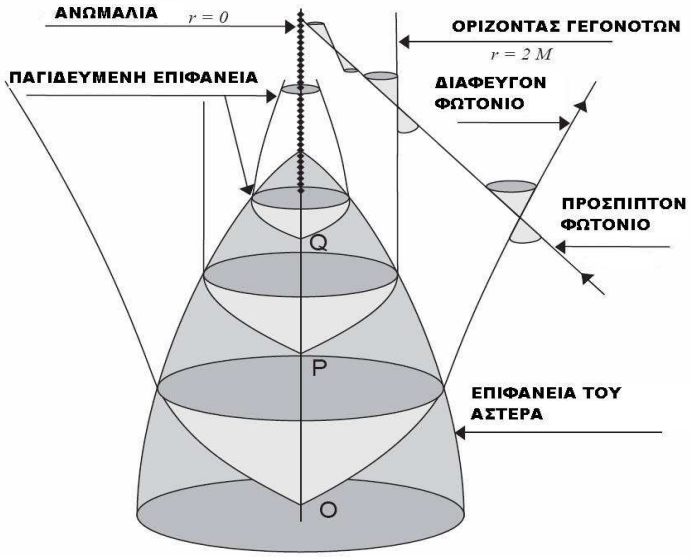
Η επιφάνεια του ορίζοντα δίνεται από τη σχέση $f(x^\mu) = r - 2M = 0$ *το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια αυτή εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι:*

$$n_\mu = f_{,\mu} = (0, 1, 0, 0)$$

επομένως

$$|\mathbf{n}|^2 = g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = g^{11} n_1 n_1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot 1 \cdot 1 \to_{r=2M} 0\,.$$

Επιφάνειες με την παραπάνω ιδιότητα ονομάζονται **χαρακτηριστικές επιφάνειες** , και έχουν ιδιαίτερη σημασία όταν μελετάμε προβλήματα που αφορούν διάδοση ακτινοβολίας.



Σχήμα 4.2. Διάγραμμα του χωρόχρονου που περιγράφει τη βαρυτική κατάρρευση ενός σφαιρικού αστέρα (το εσωτερικό του αστέρα είναι σκιασμένο). Προφανώς σ' αυτό το διάγραμμα ο χωρόχρονος έχει δύο χωρικές και μία χρονική διάσταση. Στα σημεία (συμβάντα) O, P και Q έχουμε την εκπομπή φωτεινών σημάτων και φαίνονται οι τροχιές των φωτεινών ακτίνω αλλά και το περίγραμμα των κώνων φωτός. Τα φωτόνια που εκπέμπονται κατά το συμβάν O (δηλαδή όταν η επιφάνεια του αστέρα είναι μεγαλύτερη από τον ορίζοντα) διφεύγουν στο άπειρο. Τα φωτόνια που εκπέμπονται κατά το συμβάν P (τη στιγμή που η επιφάνεια του αστέρα ταυτίζεται με τον ορίζοντα) δεν μπορούν να διαφύγουν αλλά μπορούν να κινούνται στην επιφάνεια $r = 2M$ (δηλαδή πάνω στον ορίζοντα), τέλος τα φωτόνια που εκπέμπονται κατά το συμβάν Q δεν μπορούν να ξεφύγουν αλλά καταληγούν τελικά στο κέντρο της μελανής οπής, στην *ανωμαλία*.

4.1.3 Οι συντεταγμένες Eddington-Finkelstein

Η φαινομενική ανωμαλία $r = 2M$, του συστήματος σφαιρικών συντεταγμένων, που προαναφέραμε μπορεί να αποφευχθεί με τη χρήση ενός εναλλακτικού συστήματος συντεταγμένων που προτάθηκε απο τους Eddington και Finkelstein.

Οι συντεταγμένες Eddington-Finkelstein (t', r', θ', ϕ') συνδέονται με τις σφαιρικές συντεταγμένες μέσω των σχέσεων:

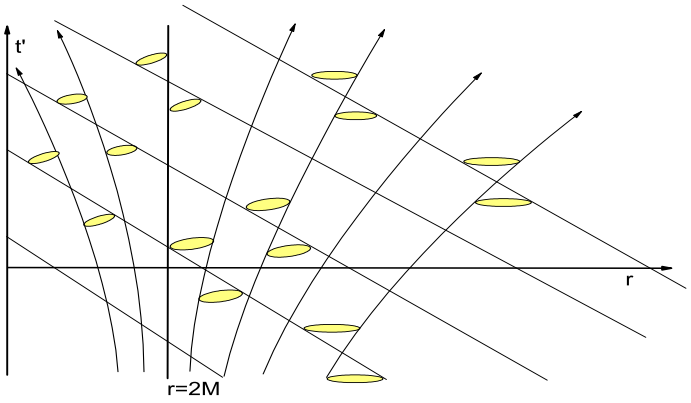
$$t = t' \pm \ln(r'/2M - 1), \quad r > 2M \tag{4.47}$$

$$t = t' \pm \ln(1 - r'/2M), \quad r < 2M \tag{4.48}$$

$$r = r', \quad \theta = \theta', \quad \phi = \phi' \tag{4.49}$$

Η μετρική Schwarzschild στο νέο σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt'^2 - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 \pm \frac{4M}{r} dr dt' - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{4.50}$$



Σχήμα 4.3. Οι κώνοι φωτός στο χωρόχρονο Schwarzschild στις συντεταγμένες Eddington-Finkelstein.

Η νέα μετρική δεν παρουσιάζει ανωμαλία για $r = 2M$, οπότε αναμένουμε και ομαλή μεταβολή των κώνων φωτός καθώς πλησιάζουμε τον ορίζοντα γεγονότων. Για την εύρεση των γεννέτηρων του κώνου φωτός θεωρούμε ότι $ds = 0$ και για σταθερά θ και ϕ λαμβάνουμε

$$ds^2 \equiv 0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt'^2 - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 \pm \frac{4M}{r} dr dt' \tag{4.51}$$

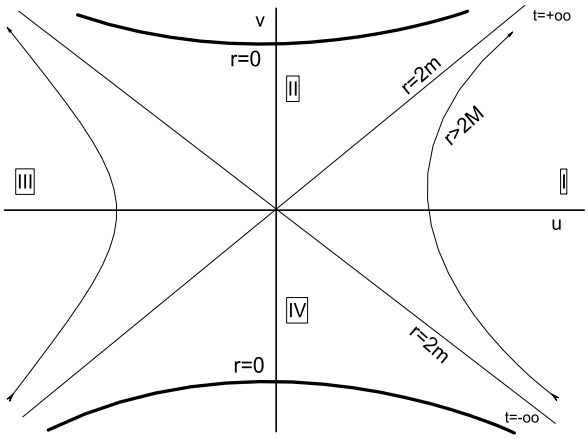
οπότε

$$(dt' + dr)\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt' - \left(1 + \frac{2M}{r}\right)dr\right] = 0 \tag{4.52}$$

άρα οι γενέτειρες του κώνου φωτός θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{dr}{dt'} = -1 \quad \text{και} \quad \frac{dr}{dt'} = \frac{r - 2M}{r + 2M} \tag{4.53}$$

η πρώτη εκ των οποίων δίνει ευθείες και η δεύτερη δίνει καμπύλες, που για $r \to \infty$ γίνονται $dr/dt' \to 1$, για $r \to 2M$ γίνονται $dr/dt' \to 0$ και για $r \to 0$ γίνονται $dr/dt' \to -1$, Σχήμα 4.3. Επομένως, για $r \to \infty$ οι γενέτειρες του κώνου φωτός θα τέμνονται σε ορθή γωνία, ενώ για μικρότερα r οι γενέτειρες των κώνων φωτός συγκλίνουν και ταυτίζονται για r. Παρατηρούμε, ότι η ευθεία $r = 2M$ είναι γενέτειρα κώνου φωτός και τα φωτόνια που θα εκπεμφούν από τον ορίζοντα θα έχουν τη δυνατότητα να κινηθούν είτε επί αυτού ή προς μικρότερα r.



Σχήμα 4.4. Διάγραμμα του χωρόχρονου Schwarzschild στις συντεταγμένες Kruskal-Szekeris.

4.1.4 Οι συντεταγμένες Kruskal-Szekeres

Οι μετασχηματισμός των Kruskal-Szekeres

$$v = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{4.54}$$

$$u = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{4.55}$$

περιγράφει ένα *γεωδαισιακά πλήρη* χωρόχρονο. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι

$$\left(\frac{r}{2M}-1\right)e^{r/2M} = u^2 - v^2 \tag{4.56}$$

$$\frac{t}{4M} = \text{arctanh}\left(\frac{v}{u}\right) \tag{4.57}$$

και η μετρική Schwarzschild γράφεται ως

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}\left(dv^2 - du^2\right) - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{4.58}$$

Οπότε οι γενέτειρες του κώνου φωτός εύκολα εξάγονται από τη σχέση

$$du^2 - dv^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dv} = \pm 1\,. \tag{4.59}$$

Δηλαδή, στο νέο σύστημα συντεταγμένων οι γενέτειρες του κώνου φωτός τέμνονται σε ορθή γωνία η οποία δεν μεταβάλεται ως συνάρτηση της απόστασης από την αρχή των αξόνων.

Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 4.4, ο χωρόχρονος στο νέο σύστημα συντεταγμένων χωρίζεται σε τέσερεις περιοχές. Η περιοχή I είναι στο εξωτερικό της μελανής οπής, η περιοχή II περιλαμβανει το εσωτερικό της, ενώ οι περιοχές III και IV ουσιαστικά αποτελούν ' επεκτάσεις ' του χωρόχρονου, με αμφισβητούμενη φυσική σημασία. Εν τούτοις, αποτελούν αγαπητό αντικείμενο μελέτης της επιστημονικής φαντασίας.

4.1.5 Η λύση των Tolman-Oppenheimer-Volkov

Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια λύση που να ισχύει στο εσωτερικό ενός αστέρα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα θεωρήσουμε ένα τέλειο ρευστό αγνοώντας την θερμική αγωγιμότητα και ιξώδες. Ο τανυστής ενέργειας ορμής, εξίσωση (2.7) είναι:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}p \quad \text{όπου} \quad u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \tag{4.60}$$

γνωρίζουμε δε ότι ισχύει

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1 \tag{4.61}$$

Ο νόμος διατήρησης της ενέργειας-ορμής (2.8) λαμβάνει τη μορφή

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{\partial p}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[(p+\rho)u^\mu u^\nu\right] + (\rho + p)\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}u^\mu u^\lambda = 0 \tag{4.62}$$

Αν θεωρήσουμε μια στατική, σφαιρικά συμμετρική λύση (αγνοώντας εσωτερικές κινήσεις στο αστέρι) δηλαδή υποθέτοντας ότι οι χωρικές συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού μηδενίζονται (δηλαδή $u^k = 0$) τότε και με βάση τη σχέση (4.61) λαμβάνουμε $u^0 = (-g_{00})^{1/2}$ και η 4-ταχύτητα του ρευστού θα είναι:

$$u^\mu = (e^{-\nu/2}, 0, 0, 0) \tag{4.63}$$

άν υποθέσουμε ότι η μετρική θα είναι της μορφής (4.1), δηλαδή:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right). \tag{4.64}$$

Προφανώς οι χρονικές παράγωγοι του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}$, της πίεσης p και της πυκνότητας ενέργειας ρ μηδενίζονται οπότε ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[(p+\rho)u^\mu u^\nu\right] = 0 \quad \text{(γιατί;)} \tag{4.65}$$

άρα από την εξίσωση (4.62) λαμβάνουμε

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{\partial p}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu} + (\rho+p)\Gamma^\mu{}_{00}u^0u^0 = 0 \tag{4.66}$$

όπου $\Gamma^\mu{}_{00} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{00,\nu} = -\frac{1}{2}e^\nu\nu'$. Οπότε πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με $g_{\mu\lambda}$ λαμβάνουμε

$$\frac{\partial p}{\partial x^\lambda} = -\frac{1}{2}(\rho+p)\frac{\partial \nu}{\partial x^\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{1}{2}(\rho+p)\frac{d\nu}{dr} \tag{4.67}$$

που είναι η σχετικιστική μορφή της εξίσωσης υδροστατικής ισοροπίας. Αν το βαρυτικό πεδίο είναι ασθενές τότε γνωρίζουμε ότι :

$$g_{00} = e^\nu \approx 1 + 2U \quad \text{και} \quad \rho >> p \tag{4.68}$$

που οδηγεί στη Νευτώνεια μορφή της εξίσωσης της υδροστατικής ισοροπίας :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho\frac{\partial U}{\partial r} \tag{4.69}$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Einstein στη μορφή

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda_\lambda\right) \tag{4.70}$$

για να βρούμε δύο ακόμη εξισώσεις που θα απαιτούνται για τον υπολογισμό της κατανομής της ύλης.

Οι όροι του δεξιού μέρους της παραπάνω εξίσωσης θα είναι:

$$T_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}T = \frac{e^\nu}{2}(3p+\rho) \tag{4.71}$$

$$T_{rr} - \frac{1}{2}g_{rr}T = \frac{e^\lambda}{2}(\rho-p) \tag{4.72}$$

$$T_{\theta\theta} - \frac{1}{2}g_{\theta\theta}T = \frac{r^2}{2}(\rho-p) \tag{4.73}$$

$$T_{\phi\phi} - \frac{1}{2}g_{\phi\phi}T = \frac{r^2\sin^2\theta}{2}(\rho-p) \tag{4.74}$$

όπου

$$T \equiv T^{\lambda}_{\lambda} = g_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu} = 3p + \rho \tag{4.75}$$

και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.7)-(4.11) που δίνουν τις συνιστώσες του τανυστή Riemann λαμβάνουμε:

$$\{\theta\theta\} \quad : \quad 1 - e^{-\lambda}\left[1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right] = -4\pi G r^2(\rho - p) \tag{4.76}$$

$$\{rr\} \quad : \quad \frac{\nu''}{2} + \frac{(\nu')^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} = 4\pi G e^{\lambda}(\rho - p) \tag{4.77}$$

$$\{tt\} \quad : \quad \frac{\nu''}{2} + \frac{(\nu')^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} = -4\pi G e^{\lambda}\,(3\rho + p) \tag{4.78}$$

Αν συνδυάσουμε κατάλληλα τις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε σε μια απλή διαφορική εξίσωση, δηλαδή

$$\frac{r^2}{2}\left[\{tt\} - \{rr\}\right] + e^{\lambda}\{\theta\theta\} \quad :\Rightarrow \quad r\lambda' + e^{\lambda} - 1 = 8\pi G e^{\lambda} r^2 \rho\,, \tag{4.79}$$

που μπορεί να γραφεί ως

$$\left(re^{-\lambda}\right)' = 1 - 8\pi G\rho r^2 \tag{4.80}$$

και οδηγεί στη λύση

$$e^{\lambda(r)} = \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1} \quad \text{όπου} \quad M(r) = 4\pi\int_0^r \rho(r')r'^2 dr'\,. \tag{4.81}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση και την εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας (4.67) καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p)\frac{GM + 4\pi r^3 p}{r(r - 2GM)}\,. \tag{4.82}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τις τρείς εξισώσεις (4.67), (4.81) και (4.82) σε συνδυασμό με μια καταστατική εξίσωση για το ρευστό της μορφής :

$$f(p, \rho) = 0 \tag{4.83}$$

υπολογίζουμε τις τιμές των δύο αγνώστων συνιστωσών του μετρικού τανυστή, δηλαδή των $\nu(r)$ και $\lambda(r)$, αλλά και της κατανομής της πυκνότητας $\rho(r)$ και της πίεσης $p(r)$. Για παράδειγμα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μια πολυτροπική καταστατική εξίσωση της μορφής $P = K\rho^{\gamma}$.

Στην ειδική περίπτωση που θεωρήσουμε μια σταθερή τιμή της πυκνότητας στο διάστημα $(0, R)$ τότε υπάρχει αναλυτική λύση των παραπάνω εξισώσεων. Για

παράδειγμα, εύκολα διαπιστώνουμε απο την εξίσωση (4.81) ότι η κατανομή της μάζας θα είναι:

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \text{για} \quad r \leq R \tag{4.84}$$

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \text{για} \quad r \geq R\,. \tag{4.85}$$

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να βρεθεί (πώς·) ότι η πίεση θα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{(1-2Mr^2/R^2)^{1/2} - (1-2M/R)^{1/2}}{3(1-2M/R)^{1/2} - (1-2Mr^2/R^3)^{1/2}}\,. \tag{4.86}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας (4.67) καταλήγουμε εύκολα σε μια αναλυτική σχέση για την συνιστώσα g_{00} του μετρικού τανυστή, δηλαδή:

$$e^{\nu/2} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}\,. \tag{4.87}$$

4.1.6 Η λύση των Reissner-Nordstrøm

Η λύση των Reissner-Nordstrøm[3] είναι μια σφαιρικά συμμετρική και στατική λύση κενού των εξισώσεων πεδίου Einstein-Maxwell που εμπεριέχει ένα ακτινικό στατικό ηλεκτρικό πεδίο, με δυναμικό

$$A_\mu = \left(\frac{Q}{r},\, 0,\, 0,\, 0\right) \tag{4.88}$$

όπου Q είναι το συνολικό φορτίο όπως μετρείται από ένα μακρινό παρατηρητή. Η μετρική δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{4.89}$$

Ο ορίζοντας γεγονότων βρίσκεται αν θέσουμε $g_{00}=0$ και δίνεται από τη σχέση

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2-Q^2}\,. \tag{4.90}$$

Παρατηρούμε κατ' αρχάς την ύπαρξη δύο οριζόντων ενός εσωτερικού r_- και του εξωτερικού r_+, εξ' αυτών ο εσωτερικός δεν έχει καμμία φυσική σημασία διότι ήδη ο εξωτερικός ορίζοντας ' απαγορεύει ' κάθε επικοινωνία με το εσωτερικό.

Θα πρέπει επίσης να επισημανθεί ότι η ύπαρξη φορτισμένων μελανών οπών στο σύμπαν είναι πρακτικά αδύνατη. Διότι κατ' αρχάς τα αστρικά σώματα από των οποίων την κατάρρευση είναι πιθανόν να προέλθουν είναι ηλεκτρικά ουδέτερα σώματα και οποιαδήποτε ' φόρτιση ' τους κατά τη διάρκεια της αστρικής κατάρρευσης σύντομα θα εξουδετερωνόταν μέσω αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον πλάσμα.

[3] Η λύση προτάθηκε ανεξάρτητα από τους Reissner (1916) [4] και Nordstrøm (1918) [3].

4.2 Η ΛΥΣΗ KERR

Η λύση του Kerr περιγραφεί ένα χωρόχρονο με αξονική συμμετρία και χρονικά στάσιμο (stationary). Η μετρική έχει τη μορφή

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}\left[dt - a\sin^2\theta d\phi^2\right]^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)d\phi - adt\right]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \tag{4.91}$$

όπου[4]

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad \text{και} \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \tag{4.92}$$

και $a = J/M = GJ/Mc^3$ είναι η στροφορμή ανά μονάδα μάζας. Για τον Ήλιο είναι $J = 1.6 \times 10^{48} g\,cm^2/s$ που αντιστοιχεί σε $a = 0.185$. Προφανώς για $a = 0$ η μετρική Kerr ανάγεται στη μετρική του Schwarszchild.

Επιπλέον, οι συντεταγμένες (t, r, θ, ϕ) που χρησιμοποιούμε δεν είναι σφαιρικές αλλά *ημι-σφαιροειδείς* συντεταγμένες που προτάθηκαν από τους Boyer και Lindquist το 1967. Οι συντεταγμένες αυτές ως συνάρτηση των καρτεσιανών δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= (r^2+a^2)^{1/2}\sin\theta\cos[\phi - f(r)] \\ y &= (r^2+a^2)^{1/2}\sin\theta\sin[\phi - f(r)] \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{4.93}$$

όπου

$$f(r) = a\int_{\infty}^{r} \Delta \arctan(a/r)dr \tag{4.94}$$

και προφανώς για $a = 0$ θα είναι $f = 0$ και οι *ημι-σφαιροειδείς* συντεταγμένες θα ανάγονται στις σφαιρικές συντεταγμένες.

Ο χωρόχρονος Kerr είναι αρκετά πιο περίπλοκος σε σχέση με αυτόν του Schwarschild. Σαν πρώτο παράδειγμα αναφέρουμε ότι την επιφάνεια απείρου μετάθεσης προς το ερυθρό η οποία ορίζεται από τη σχέση $g_{00} = 0$, δηλαδή

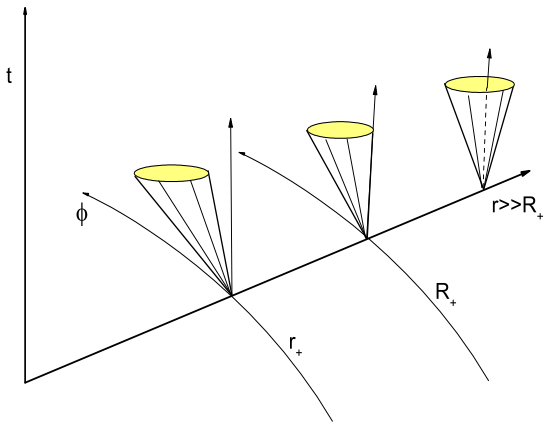
$$g_{00} = 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + a^2\cos^2\theta - 2Mr = 0 \tag{4.95}$$

Επομένως οι επιφάνειες απείρου μετάθεσης προς το ερυθρό είναι δύο και ορίζονται από τις σχέσεις

$$R_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta} \tag{4.96}$$

στο διάστημα μεταξύ του R_+ και R_- η συνιστώσα g_{00} του μετρικού τανυστή αλλάζει πρόσημο και τούτο όπως θα δούμε στη συνέχεια έχει ως αποτέλεσμα τη δυνατότητα εξαγωγής ενέργειας απο τη μελανή οπή Kerr. Η επιφάνεια απείρου

[4] Αν $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$ τότε λαμβάνουμε τη λύση Kerr-Newman που περιγράφει ένα χωρόχρονο με αξονική συμμετρία, χρονικά στάσιμο αλλά και ηλεκτρικά φορτισμένο.



Σχήμα 4.5. Η μορφή του κώνου φωτός στον ορίζοντα, r_+, την επιφάνεια απείρου μετάθεσης προς το ερυθρό, R_+ και μακρυά από τη μελανή οπή Kerr.

μετάθεσης προς το ερυθρό δεν σημαίνει αδυναμία διαφυγής σε μεγαλύτερα r, δηλαδή δεν είναι ορίζοντας γεγονότων, αλλά ότι κανένα σώμα δεν μπορεί να μείνει σε ηρεμία, εκτός από τα φωτόνια τα οποία μπορούν να διαφύγουν αλλά μόνο αν ακολουθήσουν μη-ακτινική τροχιά, Σχήμα 4.5.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε τη γεωμετρία του χωρόχρονου Kerr μέσω της μελέτης του κώνου φωτός. Η μετρική Kerr για φωτοειδείς τροχιές στο ισημερινό επίπεδο ($\theta = \pi/2$) είναι

$$ds^2 \equiv 0 = g_{00}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 + 2g_{0\phi}d\phi dt \tag{4.97}$$

Οι γενέτειρες του κώνου φωτός για σταθερό r μπορούν να υπολογισθούν από την προηγούμενη σχέση θέτωντας $dr = 0$

$$0 = g_{00} + g_{\phi\phi}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + 2g_{0\phi}\left(\frac{d\phi}{dt}\right) \tag{4.98}$$

Οπότε στην επιφάνεια απείρου μετάθεσης προς το ερυθρό, $g_{00} = 0$, θα ισχύει

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{\phi\phi}}{2g_{0\phi}} \tag{4.99}$$

άρα μόνο η μία πλευρά του κώνου θα βρίσκεται σε σταθερό ϕ ενώ η αλλή θα κλίνει προς την διεύθυνση περιφοράς (σταθερό ϕ).

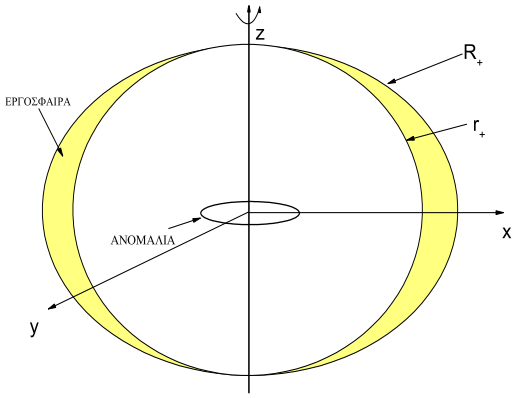
Στην ακτινική διεύθυνση, σταθερό ϕ, οι γενέτειρες του κώνου φωτός δίνονται από την εξίσωση

$$0 = g_{00}dt^2 + g_{rr}dr^2 \quad \Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{g_{00}}{g_{rr}} = \frac{\Delta(\rho^2 - 2Mr)}{\rho^4} \tag{4.100}$$

οπότε για

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \tag{4.101}$$

οι φωτεινές ακτίνες δεν μπορούν να διαφύγουν στο άπειρο. Η επιφάνεια r_+ ορίζει τον **ορίζοντα γεγονότων** της μελανής οπής Kerr.



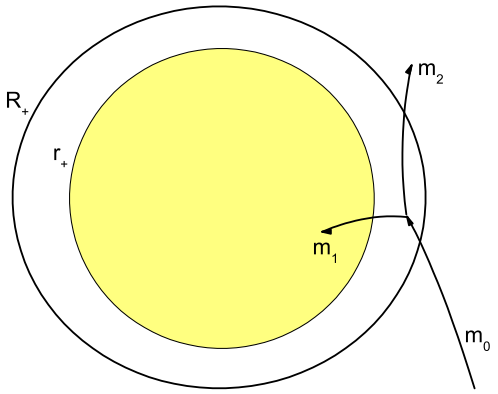
Σχήμα 4.6. Διάγραμμα του ορίζοντα, r_+, και της επιφάνειας απείρου μετάθεσης προς το ερυθρό, R_+, για τη μελανή οπή Kerr.

Την περιοχή $r_+ \leq r \leq R_+$ ονομάζουμε **εργόσφαιρα** λόγω της δυνατότητας που παρέχει για την εξαγωγή ενέργειας απο την μελανή οπή Kerr. Η διαδικασία που θα παρουσιάσουμε προτάθηκε το 1969 από τον Penrose και στη βιβλιογραφία φέρει το όνομα του. Βασίζεται στην παρατήρηση ότι σωματίδια που βρίσκονται στην περιοχή αυτή είναι δυνατόν να έχουν αρνητική ενέργεια. Για να το κατανοήσουμε ας εξετάσουμε τη σχέση που δίνει την ενέργεια ενός σωματιδίου

$$E = p_0 = m g_{0\mu} u^\mu = m \left(g_{00} u^0 + g_{0\phi} u^\phi \right) \tag{4.102}$$

Εντός της εργόσφαιρας $g_{00} < 0$ αλλά $g_{0\phi} > 0$ οπότε με κατάλληλη εκλογή των u^0 και u^ϕ είναι δυνατόν το σωματίδιο να έχει αρνητική ενέργεια.

Αν επομένως ένα σωματίδιο μάζας m_0 εισέλθει στην εργόσφαιρα και χωρισθεί σε δύο τμήματα m_1 και m_2 και φροντίσουμε το ένα να ακολουθήσει τροχιά αρνητικής ενέργειας και να πέσει στη μελανή οπή, τότε το άλλο που φροντίζουμε να διαφύγει από το νόμο διατήρησης της ενέργειας θα έχει περισσότερη ενέργεια από το αρχικό που εισήλθε στην εργόσφαιρα. Η ενέργεια αυτή στην ουσία προήλθε από τη μελανή οπή και είχε ως απότελεσμα την μείωση της στροφορμής της. Η απόδοση του φαινομένου είναι ως και $\sim 21\%$ της ενέργειας του αρχικού σωματιδίου.



Σχήμα 4.7. Σχηματική περιγραφή της διαδικασίας Penrose. Ενα σωματίδιο μάζας m_0 εισέρχεται στην εργόσφαιρα και χωριζεται σε δύο τμήματα m_1 και m_2. Αν φροντίσουμε αυτό με μάζα m_1 να ακολουθήσει μια τροχιά αρνητικής ενέργειας και να πέσει στη μελανή οπή, τότε το m_2 που θα διαφύγει θα μεταφέρει ενέργεια μεγαλύτερη του αρχικού σωματιδίου.

Η διαδικασία Penrose αφαιρεί ενέργεια από τη μελανή οπή Kerr αλλά προφανώς υπάρχει κάποιο όριο πέραν του οποίου η παραπέρα αφαίρεση ενέργειας είναι αδύνατη. Αυτό το όριο προσεγγίζεται όταν αφαιρεθεί όλη η περιστροφική ενέργεια της μελανής οπής Kerr και καταλήξη στη μελανή οπή Schwarszchild η οποία δεν έχει εργόσφαιρα. Ο Christodoulou το 1970 υπολόγισε αυτό το όριο και το ονόμασε *μη-ελαττούμενη μάζα* (irreducible mass) της μελανής οπής, συμβολίζεται ως M_{ir}. Η M_{ir} συνδέεται με τις παραμέτρους M και a της μελανής οπής Kerr μέσω της σχέσης

$$4M_{ir}^2 = r_+^2 + a^2 \equiv \left(M + \sqrt{M^2 - a^2}\right) + a^2 = 2Mr_+ \,. \tag{4.103}$$

Αν αφαιρέσουμε, από μία τάχιστα περιστρεφόμενη μελανή οπή Kerr ($M = a$) όλη τη στροφορμής της με τη διαδικασία Penrose τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι η μάζα-ενέργεια της μελανής οπής είναι δυνατόν να ελαττωθεί μέχρι και 29% .

Την ίδια χρονική περίοδο ο Hawking έδειξε ότι η αφαίρεση ενέργειας με τη μέθοδο Penrose δεν μπορεί να ελλατώσει την επιφάνεια του οριζοντα μιας μελανής οπής, σχέση (4.106). Που στην ουσία αποτελεί μια διαφορέτικη έκφραση της πρότασης του Χριστοδόυλου που είναι εξάλλου προφανές απο τη σχέση μεταξύ του εμβαδού του ορίζοντα και της M_{ir}

$$A = 16\pi M_{ir}^2 \,. \tag{4.104}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογισθεί το εμβαδό της επιφάνειας του ορίζοντα μιας μελανής οπής Kerr.

Απόδειξη

Ο ορίζοντας είναι μια διδιάστατη επιφάνεια σταθερής ακτίνας r_+ (στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων) που δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου. Επομένως η μετρική που του περιγράφει θα είναι της μορφής

$$ds^2 = g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 = \left(r_+^2 + a^2\cos^2\theta\right)d\theta^2 + \frac{(r_+^2+a^2)^2\sin^2\theta}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta} \quad (4.105)$$

οπότε το εμβαδό της επιφάνειας είναι:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{g}d\theta d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{g_{\phi\phi}}\sqrt{g_{\theta\theta}}d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(r_+^2+a^2)\sin\theta d\theta d\phi = 4\pi(r_+^2+a^2) = 8\pi M r_+ . \end{aligned} \quad (4.106)$$

5

ΤΑ ΚΛΑΣΙΚΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τέσσερα θεμελιώδη πειράματα που επιβεβαίωσαν την ορθότητα της ΓΘΣ. Παρότι, παρουσιάζουμε μια σχετικά απλοϊκή μορφή τους ο αναγνώστης θα πρέπει να γνωρίζει ότι τις τελευταίες δεκαετίες τα πειράματα αυτά έχουν επαναληφθεί δεκάδες φορές από διαφορετικές ερευνητικές ομάδες και σε σημαντικά διαφορετικές παραλλαγές τους. Όσο δε πιο ακριβή γίνονται τόσο μικρότερες είναι οι παρατηρούμενες αποκλίσεις της θεωρίας από το πείραμα.

5.1 Η ΜΕΤΑΘΕΣΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΗΛΙΟΥ ΤΩΝ ΠΛΑΝΗΤΩΝ

Μια από τις πρώτες επιτυχίες της ΓΘΣ είναι η εξήγηση της μετάθεσης του περιηλίου των πλανητών. Οπως θα δείξουμε ένα "μικρό" σώμα που περιφέρεται περί ένα μεγαλύτερο, το οποίο δημιουργεί το πεδίο βαρύτητας και στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι σφαιρικά συμμετρικό και δεν περιστρέφεται, δεν θα ακολουθεί μια ελλειπτική τροχιά όπως προβλέπει η Νευτώνεια θεωρία. Αντ' αυτού η τροχία του θα είναι ανοικτή και θα περιφέρεται όπως στο Σχήμα 5.1 μεταθέτοντας το περιήλιο της σε κάθε περιφορά κατά μια ποσότητα που είναι ανάλογη της έντασης του βαρυτικού πεδίου.

Είχαμε δείξει στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η σχετικιστική εξίσωση Kepler που περιγράφει την κίνηση ενός μικρού σώματος στο βαρυτικό πεδίο που δημιουργεί μια μάζα M δίνεται από τη σχέση

$$\frac{d^2}{d\phi^2}u + u = \frac{M}{L^2} + 3Mu^2\,. \tag{5.1}$$

Αν δοθεί η θέση και η γωνιακή ταχύτητα του σωματιδίου σε μια χρονική στιγμή, έστω $t = 0$, η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης θα καθορίσει την τροχία για $t > 0$. Χωρίς τον σχετικιστικό όρο $3Mu^2$ η λύση της εξίσωσης είναι γνωστή και παίρνει τη μορφή

$$u = \frac{M}{L^2}\left[1 + e\cos(\phi + \phi_0)\right] \tag{5.2}$$

όπου e και ϕ_0 είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Η σταθερά ϕ_0 απαλείφεται με μια στροφή του συστήματος συντεταγμένων κατα ϕ_0 ενώ η σταθερά e είναι η *εκκεντρότητα* της τροχιάς. Προφανώς η παραπάνω εξίσωση για $e < 1$ παριστάνει ελλείψεις (ελλειπτικές τροχιές).

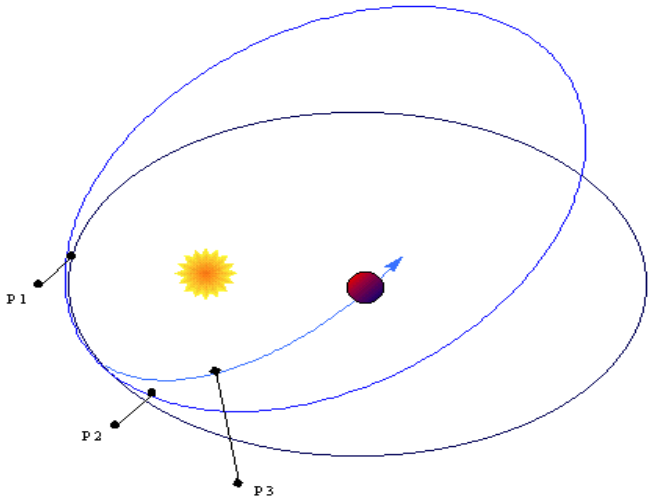
Προσσεγιστικά θα μπορούσαμε, επειδή ο όρος $3Mu^2$ είναι μικρός, να λύσουμε αντί της εξίσωσης (5.1) την εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\phi^2}u + u &\approx \frac{M}{L^2} + \frac{3M^3}{L^4}\left[1 + e\cos(\phi)\right]^2 \\ &\approx \frac{M}{L^2} + \frac{3M^3}{L^4} + \frac{6eM^3}{L^4}\cos(\phi) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Ο όρος $3M^3/L^4$ είναι σημαντικά μικρότερος από τον M/L^2 και οι διορθώσεις που θα επιφέρει σχετίζονται με μικρές περιοδικές επιμηκύνσεις της απόστασης του περήλιου της τροχιάς από το βαρυτικό κέντρο. Ο όρος $6eM^3/L^4\cos(\phi)$ είναι επίσης μικρός αλλά η επίδραση του είναι αθροιστική και δημιουργεί μετρήσιμες αποκλίσεις στην τροχιά των πλανητών περί τον Ήλιο. Αν επομένως διατηρήσουμε μόνο αυτό τον όρο καταλήγουμε σε μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (5.3) της μορφής

$$u = \frac{M}{L^2}\left[1 + e\cos\phi + \frac{3eM^2}{L^2}\phi\sin\phi\right] \approx \frac{M}{L^2}\left\{1 + e\cos[\phi(1-k)]\right\} \tag{5.4}$$

όπου $k = 3M^2/L^2$.



Σχήμα 5.1. Η μετάθεση του περιηλίου του Ερμή. Το περιήλιο στην πρώτη περιφορά βρίσκεται στη θέση P_1, στη δεύτερη στη θέση P_2, ενώ στην τρίτη στη θέση P_3.

Το περιήλιο της τροχιάς βρίσκεται αν ελαχιστοποιήσουμε την απόσταση, δηλαδή όταν το u γίνει μέγιστο, τούτο επιτυγχάνεται όταν

$$\cos[\phi(1-k)] = 1 \tag{5.5}$$

δηλαδή όταν

$$\phi(1-k) = 2n\pi \quad \text{για} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.6}$$

Επομένως, η γωνία του περιηλίου θα αυξάνεται σε κάθε περιφορά σύμφωνα με τη σχέση

$$\phi_n = \frac{2n\pi}{1-k} \quad \text{για} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.7}$$

ή καλύτερα

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \frac{2\pi}{1-k} \approx 2\pi(1+k) = 2\pi + \frac{6\pi M^2}{L^2} \tag{5.8}$$

άρα σε κάθε περιφορά θα παρατηρείται μια μετάθεση της γωνίας του περιηλίου ίση με την ποσότητα

$$\delta\phi \approx \frac{6\pi M^2}{L^2} \tag{5.9}$$

αν δε χρησιμοποιήσουμε τη σχέση της ουράνιας μηχανικής (Νευτώνεια), $L^2 = Mr_0(1-e^2)$ που συνδέει την απόσταση του περιήλιου r_0 με το ολοκληρωμα της στροφορμής L καταλήγουμε ότι η μετάθεση του περηλίου της τροχιάς ενός πλανήτη είναι συνάρτηση της μάζας του Ήλιου και της απόστασης του πλανήτη από αυτόν, δηλαδή

$$\delta\phi \approx \frac{6\pi M}{r_0(1-e^2)} \tag{5.10}$$

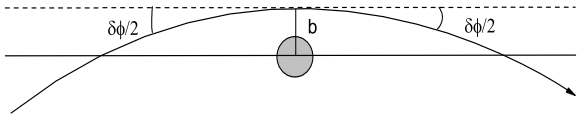
ΕΡΜΗΣ	$(43.11 \pm 0.45)''$	$43.03''$
ΑΦΡΟΔΙΤΗ	$(8.4 \pm 4.8)''$	$8.6''$
ΓΗ	$(5.0 \pm 1.2)''$	$3.8''$

Πίνακας 5.1. Οι παρατηρούμενες μεταθέσεις του περιηλίου των πλανητών ανά αιώνα (δεύτερη στήλη) συγκρινόμενες με τις θεωρητικές προβλέψεις (τρίτη στήλη).

Σε διπλά συστήματα αστέρων νετρονίων που βρίσκονται σε αποστάσεις της τάξης των 10^6km η μετάθεση του περιηλίου είναι εξαιρετικά σημαντική και μπορεί να είνα περί τις $\sim 2^o$ στη διάρκεια ενός έτους (1000 περιφορές).

5.2 Η ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ ΦΩΤΟΣ

Η απόκλιση των φωτεινών ακτίνων λόγω της παρουσίας βαρυτικών πεδίων υπήρξε πρόβλεψη του Einstein πολύ πριν την παρουσίαση της ΓΘΣ. Αποτέλεσε όμως την απόδειξη της ορθότητας της θεωρίας του όταν παρατηρήθηκε το 1919 κατά τη διάρκεια ολικής εκλείψης του Ήλιου.



Σχήμα 5.2. Σχηματική παράσταση της απόκλισης των φωτεινών ακτίνων από μια ισχυρή βαρυτική πηγή.

Ο υπολογισμός των τροχιών των φωτονίων είναι αντίστοιχος με αυτό των σωματιδίων που μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Προφανώς επειδή το ίδιο μήκος για τροχιές φωτονίων είναι μηδέν, τα ολοκληρώματα της ενέργειας και της στροφορμής αποκλίνουν και η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση φωτονίων στο ισημερινό επίπεδο δίνεται από τη σχέση

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3Mu^2\,. \tag{5.11}$$

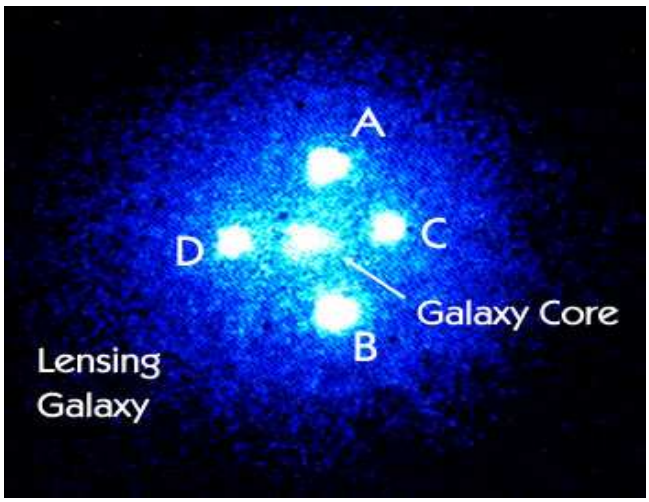
Ο όρος δεξιά της ισότητας είναι μικρός και ως εκ τούτου σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να τον παραλλείψουμε, οπότε η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης που απομένει είναι:

$$u = \frac{1}{b}\cos(\phi + \alpha) \tag{5.12}$$

όπου οι b και α είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Η εξίσωση που βρήκαμε περιγράφει μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από απόσταση b από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και στην δυναμική συνήθως αναφέρεται ως παράμετρος κρούσσης. Η παράμετρος α μπορεί να απορροφηθεί με μια στροφή του συστήματος συντεταγμένων και ως εκ τούτου δεν θα αναφερθεί ξανά, οπότε η λύση θα έχει τη μορφή

$$u = \frac{1}{b}\cos(\phi)\,. \tag{5.13}$$

Οπώς και στην προηγούμενη ενότητα, θα αντικαταστήσουμε την λύση αυτή στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης (5.11), οπότε η νέα (προσεγγιστική) διαφορική εξίσωση που περιγράφει την τροχιά των φωτονίων έχει τη μορφή



Σχήμα 5.3. Ο *Σταυρός του Eisntein* (G2237+030) είναι η ποιό χαρακτηριστική περίπτωση βαρυτικού φακού στην οποία ένας γαλαξίας (περίπου 500 εκατομύρια έτη φωτός μακρυά από τη Γη) εστιάζει το φως από ένα quasar που βρίσκεται πίσω του σε απόσταση περί τα 8 δισεκατομύρια έτη φωτός. Η εστίαση δημιουργεί 4 συμμετρικά είδωλα του ίδιου quasar. Το σύστημα ανακαλύφθηκε από τον John Huchra.

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3M}{b^2}\cos^2\phi\,. \tag{5.14}$$

Η διαφορική εξίσωση αυτή επιδέχεται μια μερική λύση της μορφής

$$u = \frac{M}{b^2}\left(1+\sin^2\phi\right) \tag{5.15}$$

οπότε η γενική λύση θα είναι

$$u = \frac{\cos\phi}{b} + \frac{M}{b^2}\left(1+\sin^2\phi\right) \tag{5.16}$$

Άρα για μακρυνούς παρατηρητές ($r\to\infty$) δηλαδή $u\to 0$, καταλήγουμε σε μια σχέση που συνδέει γωνίες με τη μάζα M και την παράμετρο b, δηλαδή

$$\frac{\cos\phi}{b} + \frac{M}{b^2}\left(1+\sin^2\phi\right) = 0 \tag{5.17}$$

Επιπλέον αφού $r\to\infty$, θα ισχύει ότι $\phi\to\pi/2$, οπότε $\cos\phi\to 0$ και $\sin\phi\to 1$. Εδώ σε πρώτη προσέγγιση αντικαθιστούμε $\sin^2\phi\approx 1$ και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\cos\phi = \sin(\pi/2-\phi) = -\frac{2M}{b} \tag{5.18}$$

Άρα το ϕ τείνει ασυμπτωτικά στο $\pi/2+2M/b$ προς τη μία διεύθυνση και στο $3\pi/2-2M/b$ προς την άλλη, οπότε η συνολική απόκλιση θα είναι το άθροισμα των δύο αποκλίσεων, δηλαδή

$$\delta\phi = \frac{4M}{b}\,. \tag{5.19}$$

Η παραπάνω σχέση για μια φωτεινή ακτίνα που εφάπτεται της επιφάνειας του Ήλιου ($b = R_\odot = 696.000km$) είναι $\sim 1.75''$.

Η απόκλιση των φωτεινών ακτίνων λόγω ισχυρών βαρυτικών πεδίων είναι αρκετά διαδεδομένο φαινόμενο στο σύμπαν και υπάρχει ειδικός κλάδος της αστροφυσικής που ασχολείται με αυτά τα φαινόμενα της εστίασης των φωτεινών ακτίνων. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εστίασης είναι ο λεγόμενος **Σταυρός του Eisntein**, 5.3. 'Σταυροί' δημιουργούνται όταν η κατανομή της μάζας που δημιουργεί την εστίαση δεν είναι συμμετρική. Στην περίπτωση συμμετρικής βαρυτικής πηγής δημιουργούνται οι λεγόμενοι **Δακτύλιοι του Einstein**, Σχήμα 5.4.

Σχήμα 5.4. Οι *Δακτύλιοι του Eisntein* δημιουργούνται όταν υπάρχει τέλεια ευθυγράμμιση της Γης, του ενδιάμεσου αντικειμένου (συνήθως Γαλαξίας) που δημιουργεί την εστίαση και του μακρυνού αντικειμένου (συνήθως quasar). Το σύστημα ανακαλύφθηκε με τη βοήθεια του διαστημικού τηλσκοπίου Hubble.

5.3 Η ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΜΕΤΑΘΕΣΗ ΠΡΟΣ ΤΟ ΕΡΥΘΡΟ

Αν θεωρήσουμε τρεις ακίνητους παρατηρητές οι οποίοι βρίσκονται στο βαρυτικό πεδίο μιας σφαιρικά συμμετρικής πηγής, δηλαδή σε χωρόχρονο Schwarszchild και έστω ότι ο πρώτος βρίσκεται σχετικά κοντά στην πηγή, σε απόσταση r_1, ο δεύτερος μακρύτερα, έστω σε απόσταση r_2, και ο τρίτος εκεί όπου ο χωρόχρονος είναι πρακτικά επίπεδος, έστω σε απόσταση r_∞.

Ο χρόνος για τους τρεις παρατηρητές θα κυλάει με διαφορετικό ρυθμό: ο χρόνος για τον παρατηρητή στο άπειρο πρακτικά θα είναι ο συντεταγμένος χρόνος t και η μονάδα χρόνου θα είναι dt, ενώ για τους άλλους δύο παρατηρητές ο ρυθμός με τον οποίο θα κυλάει ο χρόνος θα εξαρτάται από την απόστασή τους απο την πηγή, δηλαδή

$$d\tau_1 = \left(1 - \frac{2M}{r_1}\right)^{1/2} dt \quad \text{και} \quad d\tau_2 = \left(1 - \frac{2M}{r_2}\right)^{1/2} dt \tag{5.20}$$

επομένως θα ισχύει ότι

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r_2}\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2M}{r_1}\right)^{1/2}} \approx 1 + \frac{M}{r_1} - \frac{M}{r_2}\,. \tag{5.21}$$

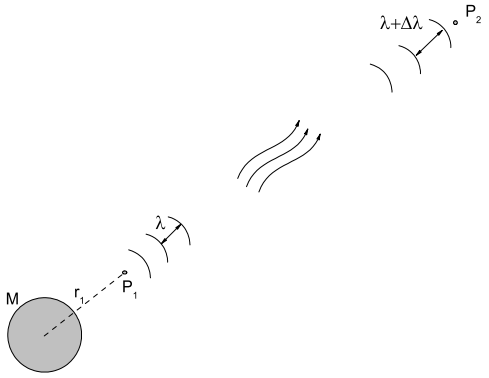
Αν ο πρώτος παρατηρητής στέλνει φωτεινά σήματα σε μια συγκεκριμένη συχνότητα λ_1 από τη σχέση $c = \lambda/\tau$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση τα διαστήματα χρόνου με συχνότητες εκπομπής και λήψης ενός φωτεινού σήματος, δηλαδή

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \approx 1 + \frac{M}{r_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{M}{r_1}\,. \tag{5.22}$$

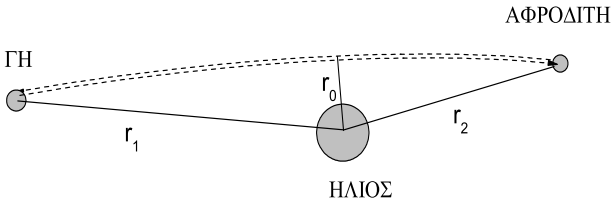
Επομένως, τα φωτεινά σήματα θα υποστούν μια μετάθεση προς το ερυθρό η οποία είναι ανάλογη της ισχύος του βαρυτικού πεδίου στο σημείο εκπομπής τους. Για παράδειγμα τα φωτόνια που εκπέμπονται από την επιφάνεια του Ήλιου θα υφίστανται μια μετάθεση προς το ερυθρό της τάξης του $\Delta\lambda/\lambda \approx 2 \times 10^{-6}$, ενώ τα φωτόνια που εκπέμπονται από την επιφάνεια ενός αστέρα νετρονίων θα υφίστανται μια μετάθεση της τάξης του $\Delta\lambda/\lambda \approx 0.2$. Από την εξίσωση (5.21) εύκολα διαπιστώνουμε ότι αν η εκπομπή γίνει από τον ορίζοντα μιας μελανής οπής Schwarszchild, $r = 2M$, τότε η μετάθεση προς το ερυθρό θα είναι άπειρη, δηλαδή τα φωτόνια δεν θα έχουν ποτέ αρκετή ενέργεια ώστε να διαφύγουν από το βαρυτικό πεδίο της μελανής οπής.

5.4 Η ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΤΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ RADAR

Πρόκειται για ένα σχετικά πρόσφατο πείραμα που επιβεβαιώνει την ορθότητα της ΓΘΣ. Συγκεκριμένα ένα σήμα radar εκπέμπεται από τη Γη ανακλάται σε κάποιο εσωτερικό πλανήτη (Ερμή, Αφροδίτη) που βρίσκεται σε αντίθεση και συλλαμβάνεται ξανά από το radar. Αν το σήμα διέλθει αρκετά κοντά από τον Ήλιο τότε λογω της καμπύλωσης του χωρόχρονου θα διανύσει μεγαλύτερη απόσταση και επομένως θα υπάρξει καθυστέρηση στην επιστροφή, η οποία είναι δυνατόν να μετρηθεί. Το πείραμα προτάθηκε και εκτελέσθηκε απο τον I.I. Shapiro και συνεργάτες στα τέλη της δεκαετίας του '60.



Σχήμα 5.5. Σχηματική παράσταση της βαρυτικής μετάθεσης προς το ερυθρό.



Σχήμα 5.6. Σχηματική παράσταση του πειράματος Shapiro, το σήμα εκπέμπεται από τη Γη προς την Αφροδίτη και επιστρέφει.

Από την εξίσωση της μετρικής $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ για φωτεινές ακτίνες $ds = 0$ που κινούνται στο ισημερινό επίπεδο λαμβάνουμε

$$0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \tag{5.23}$$

Για τη μελέτη της ακτινικής κίνησης θα πρέπει να εξαλειφθεί από την παραπάνω εξίσωση ο όρος $d\phi/dt$. Από τα ολοκληρώματα κίνησης (4.40) και (4.41) δημιουργούμε την ποσότητα

$$D = \frac{L}{E} = r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{d\phi}{dt} \tag{5.24}$$

όποτε η εξίσωση (5.23) γίνεται

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{D^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 = 0\,. \tag{5.25}$$

Το σημείο της πλησιέστερης απόστασης, r_0, της δέσμης από τον Ηλιο είναι ένα σημείο καμπής, δηλαδή $dr/dt = 0$ και επομένως από την παραπάνω σχέση υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς D

$$D^2 = \frac{r_0^2}{1 - 2M/r_0}\,. \tag{5.26}$$

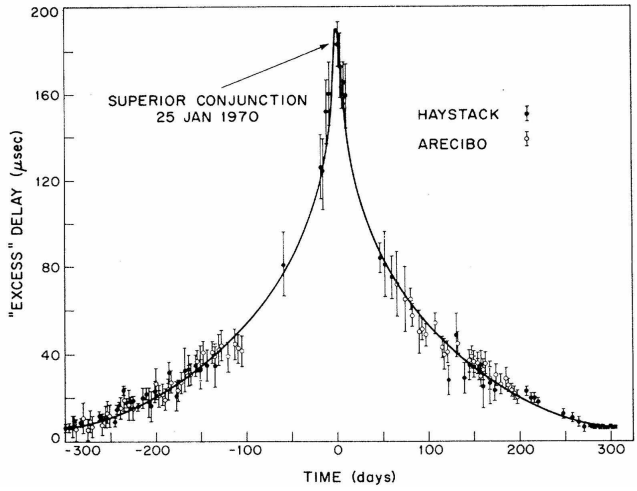
Αντικαθιστώντας την παραπάνω τιμή του D στη εξίσωση (5.25) βρίσκουμε τη ζητούμενη σχέση

$$\frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{1 - 2M/r}{1 - 2M/r_0}\right]^{1/2} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{1-2M/r}{1-2M/r_0}}} \\ &= \sqrt{r_1^2 - r_0^2} + 2M \ln\left[\frac{r_1\sqrt{r_1^2 - r_0^2}}{r_0}\right] + M\sqrt{\frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}} \\ &\approx r_1 + 2M \ln\left(\frac{2r_1}{r_0}\right) + M \end{aligned} \tag{5.28}$$

Αν ο χώρος ήταν επίπεδος τότε θα ίσχυε $t_1 = r_1$ επομένως ο όρος $\tilde{t}_1 = 2M \ln(2r_1/r_0) + M$ είναι η διόρθωση λόγω της ΓΘΣ για το τμήμα της τροχιάς από τη Γη ως το σημείο T. Αντίστοιχα, οι σχετικιστικές διορθώσεις για το άλλο τμήμα της τροχιάς (Αφροδίτη-T) θα είναι $\tilde{t}_2 = 2M \ln(2r_2/r_0) + M$, οπότε συνολικά η χρονική καθυστέρηση στην άφιξη του σήματος είναι το διπλάσιο του αθροίσματος $\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2$, δηλαδή

$$\Delta T = 2\left(\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2\right) = 4M\left[1 + \ln\left(\frac{4r_1 r_2}{r_0^2}\right)\right]\,. \tag{5.29}$$



Σχήμα 5.7. Σύγκριση των πειραματικών αποτελεσμάτων με τη θεωρητική πρόβλεψη του πειράματος Shapiro το 1970, για σήματα που εκπέμφηκαν από τη Γη προς την Αφροδίτη.

6

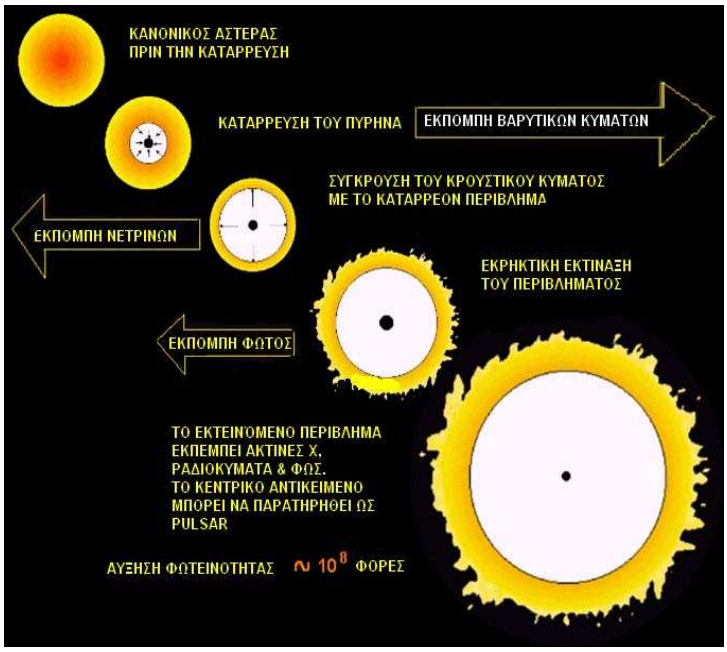
ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗ

6.1 ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗ

Οι αστέρες εξελίσσονται με ρυθμούς ανάλογους με τη μάζα τους, τα μεγαλύτερης μάζας αστέρια εξελίσονται γρηγορότερα και μετά από μια σύντομη επεισοδιακή φάση που οφείλεται στην εξάντληση των πυρηνικών τους καυσίμων καταρρέουν και σχηματίζουν λευκούς νάνους, αστέρες νετρονίων ή/και μελανές οπές ενώ ένα μεγάλο μέρος της μάζας τους εκτινάσσεται δημιουργώντας νεφελώματα που αποτελούν τα μαιευτήρια της δεύτερης γενιάς αστέρων.

Στα πρώτα εξελικτικά στάδια έχουμε μετατροπή του υδρογόνου σε ήλιο $H \rightarrow He$, σ' αυτή τη φάση ο αστέρας παραμένει στο μεγαλύτερο διάστημα της ζωής του. Στη συνέχεια ακολουθούν διαδοχικές αντιδράσεις μετατροπής του ηλίου σε βαρύτερα στοιχεία ($He \rightarrow C$, $O \rightarrow Ne,\ Mg$, $O \rightarrow Si$, $S \rightarrow Fe$) κατά τις οποίες η κεντρική πυκνότητα του αστέρα αυξάνεται έως ότου σχηματισθεί ένας πυρήνας σιδήρου. Ο σχηματισμός του πυρήνα σιδήρου σηματοδοτεί το τέλος των θερμοπυρηνικών αντιδράσεων και το κέντρο του αστέρα καταρρέει τάχιστα (σε λιγώτερο από μερικές ώρες). Τα εξώτερα στρώματα επίσης καταρρέουν, για να καλύψουν το κενό που άφησε η κατάρρευση του πυρήνα σιδήρου. Σε αυτή ακριβώς τη φάση έχουμε υπερθέρμανση του πυρήνα λόγω της αυξημένης πίεσης που οδηγεί στη ταχεία διαστολή του. Οπότε τα ταχέως καταρρέοντα εξωτερικά στρώματα συναντούν το διαστελλόμενο πυρήνα και παράγονται τρομακτικά κρουστικά κύματα που εκτινάσσουν τα εξωτερικά στρώματα (με ταχύτητες που φτάνουν τα 10.000 km/sec) και έχουμε τη δημιουργία ενός υπερκαινοφανούς αστέρα. Σε αυτή τη φάση η λαμπρότητα του αστέρα αυξάνεται εκθετικά και μπορεί να λάμπει όσο και ένας ολόκληρος γαλαξίας. Πρόκειται για το πλέον φαντασμαγορικό φαινόμενο στο Σύμπαν. Στη φάση αυτή παράγονται οι βαριοί πυρήνες των ατόμων που συναντάμε στη Γη, ενώ τα εκτινασσόμενα νέφη ύλης αποτελούν τα σημεία γέννησης άλλων μικρότερων αστέρων όπως ο Ήλιος μας. Το κεντρικό τμήμα του αστέρα καταρρέει τελικά απο το δικό του βάρος και η τελική κατάσταση εξαρτάται από τη μάζα του αρχικού αστέρα. Συνήθως, στο κέντρο έχουμε τη δημιουργία ενός υπέρπυκνου πυρήνα με μάζα 1-3 μάζες Ήλιου. Η φάση αυτή της τελικής κατάρρευσης διαρκεί μόνο μερικά δευτερόλεπτα αλλά

έχουμε σημαντική ροή ενέργειας με τη μορφή νετρίνων και βαρυτικών κυμάτων. Οι λευκοί νάνοι, οι αστέρες νετρονίων και οι μελανές οπές είναι τα αποτελέσματα αυτής της εκρηκτικής διαδικασίας.



Σχήμα 6.1. Σχηματική παρουσίαση των διαδοχικών σταδίων της βαρυτικής κατάρευσης. Τα βαρυτικά κύματα εκπέμπονται στα πρώτα στάδια της κατάρρευσης, ακολουθούν τα νετρίνα και στη συνέχεια η δραματική αύξηση της λαμπρότητας στην οπτική περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος.

6.2 ΛΕΥΚΟΙ ΝΑΝΟΙ

Οι λευκοί νάνοι δημιουργούνται από ότι απομένει στο εσωτερικό ενός ερυθρού γίγαντα μετά την εκτίναξη των εξωτερικών του στρωμάτων (που συνηθως δημιουργούν τα λεγόμενα πλανητικά νεφελώματα). Αν η κεντρική μάζα είναι μικρότερη από $1.4M_{\odot}$ (όριο Chandrasekhar) η πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων είναι σε θέση να σταματήσει την κατάρρευση και να εξισορροπίσει τις βαρυτικές δυνάμεις. Επειδή η κεντρική μάζα είναι της τάξης της μιας ηλιακής και συγκεντρώνεται σε ακτίνα περίπου όση και της Γης η πυκνότητα αυξάνει τρομακτικά και ένας κυβικό εκατοστό αυτής της ύλης θα ζυγίζει περί τον ένα τόννο. Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα του λευκού νάνου τόσο μικρότερη είναι η ακτίνα. Στο εσωτερικό του τα ηλεκτρόνια δεν έχουν τη δυνατότητα να κινη-

θούν ελεύθερα σε αντίθεση με τα πρωτόνια και τα νετρόνια που σε αυτές τις πυκνότητες δεν είναι εκφυλισμένα, δηλαδή κινούνται.

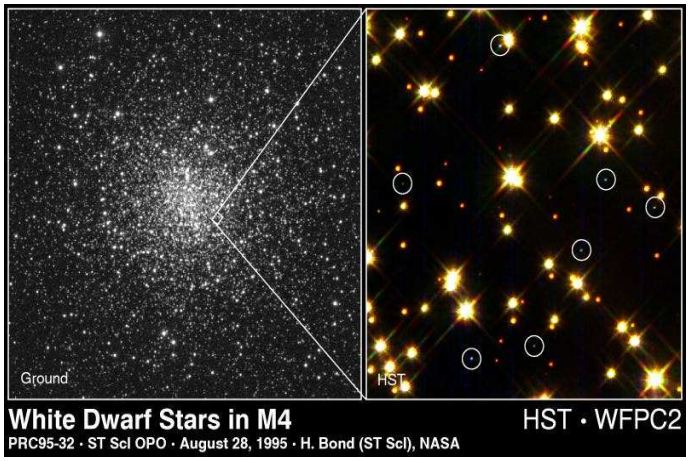
Σχήμα 6.2. Ο Subrahmanyan Chandrasekhar πρόβλεψε το 1930 ότι δέν μπορούν να υπάρξουν λευκοί νάνοι με μάζα μεγαλύτερη από 1.4-1.5$M_{\odot}$ (όριο Chandrasekhar). Οι αστρονόμοι της εποχής ήταν αντίθετοι με μια τέτοια ιδέα αλλά στο δεύτερο μισό του 20ου αιώνα η πρόβλεψη του Chandrasekhar επιβεβαιώθηκε από τις παρατηρήσεις και τιμήθηκε γι' αυτή του την εργασία με το Nobel Φυσικής το 1983.

Στο εσωτερικό των λευκών νάνων δεν γίνονται πυρηνικές αντιδράσεις και η ακτινοβολία τους είναι θερμική καθώς στη φάση της δημιουργίας τους οι θερμοκρασία τους αγγίζει τους 100.000 βαθμούς Kelvin. Η θερμοκρασία τους πέφτει με γρήγορους ρυθμούς και φτάνει στους 20.000 βαθμούς Kelvin σε διάστημα 100 εκατομμυρίων ετών. Στη συνέχεια η ταχύτητα ψύξης ελλατώνεται και πέφτει στους 10.000 βαθμούς Kelvin σε 800 εκατομμύρια χρόνια περίπου. Ενώ φθάνει στη θερμοκρασία του Ήλιου (5.800 K) μετά από 4-5 δισεκατομμύρια χρόνια.

Με βάση τα παραπάνω οι θερμοκρασίες τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μέτρο της ηλικίας τους. Αν και εν γένει λόγω της μικρής τους λαμπρότητας είναι δύσκολο να ανιχνευθούν, τα τελευταία χρόνια με διαστημικό τηλεσκόπιο Hubble έχουν παρατηρηθεί πολλοί στα σφαιρωτά σμήνη και μας δίνουν ένα ανεξάρτητο τρόπο μέτρησης της ηλικίας αυτών των σμηνών.

6.3 ΑΣΤΕΡΕΣ ΝΕΤΡΟΝΙΩΝ

Οι αστέρες νετρονίων είναι εξαιρετικά ενδιαφέροντα αστρικά αντικείμενα όχι μόνο για τη ΓΘΣ αλλά και για την την Πυρηνική Φυσική. Η μάζα τους είναι της τάξης της μάζας του Ήλιου, δηλαδή, 1-2 $M_{\odot}$ αλλά η ακτίνα τους είναι μόνο περί τα 10km που συνεπάγεται πυκνότητες μεγαλύτερες των $10^{14} g/cm^3$. Επομένως



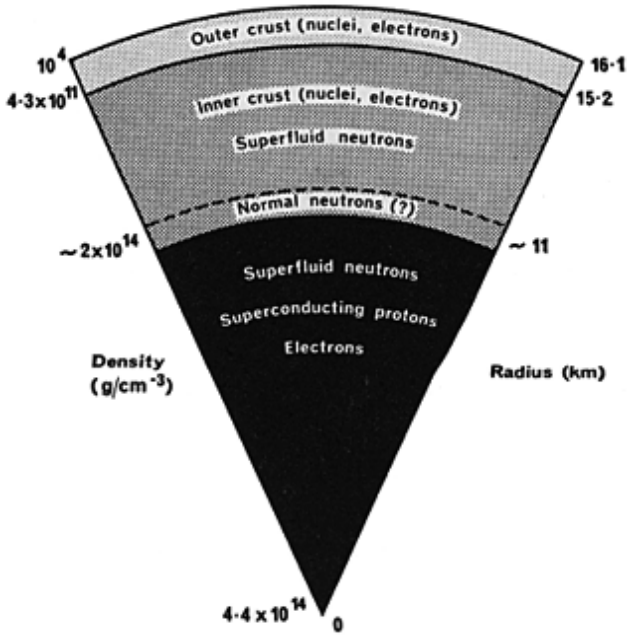
Σχήμα 6.3. Φωτογραφία του σφαιρωτού σμήνους M4 (αριστερά) και μεγένθυση μιας περιοχής του (δεξιά) όπου διακρίνονται επτά (!) λευκοί νάνοι.

οι κεντρικές πυκνότητες είναι μεγαλύτερες ακόμη και από αυτές του ατομικού πυρήνα οπότε η *ισχυρή δύναμη* παίζει σημαντικό ρόλο στο εσωτερικό του αστέρα. Η συμπεριφορά της *ισχυρής δύναμης* σ' αυτές τις πυκνότητες δεν είναι πλήρως κατανοητή και επομένως η κατανόηση του εσωτερικού των αστέρων νετρονίων μέσω αστρονομικών παρατηρήσεων (ιδιαίτερα με ανιχνευση των βαρυτικών κυμάτων που εκπέμπουν) θα αποτελέσει μοναδικής σημασίας πληροφορία για την Πυρηνική Φυσική.

Οι Baade και Zwicky το 1934 πρότειναν την ύπαρξη των αστέρων νετρονίων και μάλιστα πρότειναν ότι θα πρέπει να αποτελούν το υπόλλειμα της έκρηξης υπερκαινοφανών. Πιθανότατα, λόγω της περίπλοκης φυσικής τους για περίπου τρείς δεκαετίες δεν υπήρξε καμμία πρόοδος στην έρευνα για τέτοιου είδους αντικείμενα. Ένας άλλος σημαντικός επίσης λόγος ήταν η μικρή ακτίνα και προβλεπόμενη θερμοκρασία τους που πρακτικά τους έκανε αόρατους στα οπτικά τηλεσκόπια. Η ανακάλυψη όμως των αστρικών πηγών ακτίνων X το 1962 και η ανακάλυψη των pulsars το 1967 αύξησε κατακόρυφα το ενδιαφέρον των αστρονόμων και στις μέρες μας αποτελούν αντικείμενο έρευνας για εκατοντάδες θεωρητικούς και παρατηρησιακούς αστρονόμους.

Όσον αφορά την σύσταση των αστέρων νετρονίων υπάρχουν διάφορες εναλλακτικές προτάσεις οπότε θα παρουσίασουμε μόνο ότι θεωρείται κοινά αποδεκτό. Η επιφάνεια αναμένεται να αποτελείται από μία πολύ λεπτή ατμόσφαιρα. Κάτω από αυτή την "ατμόσφαιρα" η εξωτερική "κρούστα" αποτελείται απο ένα πλέγμα σιδήρου $^{56}_{26}Fe$ και η πίεση σ' αυτή την περιοχή προέρχεται αποκλειστικά απο το πλέγμα του σιδήρου. Καθώς "κατεβαίνουμε" βαθύτερα στο εσωτερικό η πίεση αυξάνεται και η θα προέρχεται κατά κύριο λόγο από το αέριο των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων [1]. Για την περιγραφή αυτής της κατάστασης θα ορίσουμε

[1] Εκφυλισμένα ηλεκτρόνια



Σχήμα 6.4. Σχηματική παράσταση του εσωτερικού ενός αστέρα νετρονίων.

ένα δείκτη συμπίεσης ως :

$$\gamma = \frac{\rho + p}{p} \frac{dp}{d\rho} \,. \tag{6.1}$$

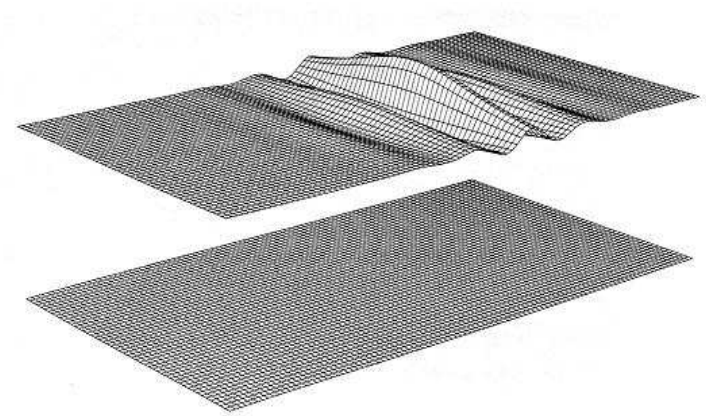
Στην περιοχή του αστέρα για την οποία ισχύει ότι $\rho \ll 10^6 g/cm^3$ τα ελεύθερα ηλεκτρόνια είναι μη-σχετικιστικά και ο δείκτης συμπίεσης προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την τιμή $\gamma = 5/3$. Καθώς όμως ¨κατερχόμαστε¨ βαθύτερα τα ηλεκτρόνια θα γίνονται σχετικιστικά και ο δείκτης συμπίεσης γ θα τείνει προς την τιμή 4/3. Σε πυκνότητες περί τα $10^6 g/cm^3$ τα ηλεκτρόνια και τα πρωτόνια των πυρήνων αρχίζουν να επανασυνδέονται μέσω της αντίστροφης β-διάσπασης δηλαδή $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$ και εμπλουτίζουν τους πυρήνες με νετρόνια. Όταν οι πυκνότητες αγγίξουν τα $10^{11} g/cm^3$ οι πυρήνες γίνονται ασταθείς και εκπέμπονται ελεύθερα νετρόνια. Η περιοχή του αστέρα στην οποία η πυκνότητα είνα της τάξης των $\rho \approx 10^{11} g/cm^3$ είναι γνωστή ως περιοχή neutron drip. Πέραν αυτής της περιοχής, η ύλη αποτελείται κυρίως από ελεύθερα νετρόνια και μικρές ποσότητες ελεύθερων ηλεκτρονίων και πρωτονίων οπότε η πίεση θα προέρχεται απο τα ελεύθερα νετρόνια. Τα ρευστό απο νετρόνια θα πρέπει υπό αυτές τις συνθήκες να συμπεριφέρεται ως υπερευστό. Όμως οι πυκνότητες μας είναι πλέον υψηλότερες των πυρηνικών και λίγα είναι γνωστά για την συμεριφορά της ύλης σ΄ αυτές τις πυκνότητες. Αν δεν υπάρχουν μεταβολές φάσης τότε η καταστατική εξίσωση για τα ρευστά αυτά θα δίνεται από μια απλή σχέση της μορφής $p \rightarrow \rho/3$. Υπάρχουν προτάσεις που προβλέπουν την ύπαρξη πλάσμα-

τος κουάρκ-γκλουονίων, συμπυκνώσεις καονίων και άλλες εξωτικές καταστάσεις της ύλης που μπορούν να μας βοηθήσουν στην κατανόηση της συμπεριφοράς και σύστασης της ύλης σ' αυτές τις πυκνότητες. Εν τούτοις, ακόμη και οι πλέον παράξενοι συνδυασμοί στοιχειωδών σωματιδίων τείνουν να προβλέπουν καταστατικές εξισώσεις που προσεγγίζονται από σχέσεις της μορφής $p \to \rho/3$.

7

ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ

Σχεδόν πριν από έναν αιώνα ο Einstein ξεκίνησε την «επανάσταση»στη σύγχρονη φυσική με την παρουσίαση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΕΘΣ). Δέκα χρόνια αργότερα πρότεινε την αντικατάσταση της Νευτώνειας θεωρίας για τη βαρύτητα με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ). Παρότι και οι δύο θεωρίες του Einstein αποτελούν σήμερα αναπόσπαστο κομμάτι όλων των σύγχρονων θεωριών και έχουν επιβεβαιωθεί με πλείστα πειράματα, εν τούτοις μια από τις πλέον θεμελιώδεις προβλέψεις τους, η ύπαρξη κυμάτων βαρύτας, δεν έχει επιβεβαιωθεί ακόμη πειραματικά. Τα κύματα βαρύτητας αποτελούν ακρογωνιαίο λίθο στο οικοδόμημα της ΓΘΣ και περιμένουν την ανίχνευσή τους.



Σχήμα 7.1. Σχηματική παράσταση ενός επίπεδου και ενός διαταραγμένου χωρόχρονου.

Τα βαρυτικά κύματα, σύμφωνα με τη ΓΘΣ, παράγονται από μεταβολές των βαρυτικών πεδίων ή από επιταχύνσεις μαζών. Ο τρόπος παραγωγής τους είναι αντίστοιχος με αυτό των ηλεκτρομαγνητικών (ΗΜ) κυμάτων τα οποία παράγον-

ται από μεταβολές ΗΜ πεδίων και επιταχύνσεις φορτίων. Η ασύμμετρη μεταβολή κάθε βαρυτικού πεδίου θα παράγει βαρυτικά κύματα που συνήθως είναι πολύ ασθενή και δεν προκαλούν παρατηρήσιμα φαινόμενα. Μόνο μεταβολές εξαιρετικά ισχυρών βαρυτικών πεδίων είναι σε θέση να παράγουν ανιχνεύσιμα βαρυτικά κύματα. Τέτοια ισχυρά μεταβαλλόμενα βαρυτικά πεδία συναντώνται κατά τη διάρκεια της δημιουργίας μελανών οπών και αστέρων νετρονίων από τη βαρυτική κατάρρευση του πυρήνα υπερμεγέθων αστέρων που παρατηρούνται ως εκρήξεις υπερκαινοφανών. Συγκρούσεις αστέρων νετρονίων και μελανών οπών αλλά και το πολύ πρώιμο Σύμπαν αποτελούν ισχυρές πηγές βαρυτικών κυμάτων. Για παράδειγμα, η εκπεμπόμενη ενέργεια με τη μορφή βαρυτικών κυμάτων κατά την έκρηξη ενός υπερκαινοφανούς αστέρα είναι ίση ή περισσότερη από τη φωτεινή ενέργεια που θα εκπέμψει ο Ήλιος μας καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του. Τα εκλυόμενα τρομακτικά ποσά ενέργειας παραμένουν «αόρατα», γιατί τα βαρυτικά κύματα αλληλεπιδρούν ελάχιστα με την ύλη. Η προσπάθεια για την απευθείας ανίχνευση των βαρυτικών κυμάτων ξεκίνησε πριν από 40 χρόνια, σήμερα όμως βρισκόμαστε πολύ κοντά στο τέλος του δρόμου. Υπερευαίσθητοι ανιχνευτές βαρυτικών κυμάτων έχουν κατασκευαστεί σε Ευρώπη και Αμερική και ήδη συλλέγουν δεδομένα, εν τούτοις ανίχνευση δεν αναμένεται πριν από 2-3 χρόνια, όσο δηλαδή απαιτείται για να επιτύχουν την απαιτούμενη ευαισθησία.

Ένα νέο παράθυρο για την εξερεύνηση του Σύμπαντος ανοίγει, αυτό της Βαρυτικής Αστρονομίας. Για πρώτη φορά ο άνθρωπος θα είναι σε θέση να παρατηρήσει περιοχές του Σύμπαντος που είναι «ηλεκτρομαγνητικά νεκρές». Σκοτεινές περιοχές μεταξύ γαλαξιών, περιοχές που κρύβονται πίσω από μεγάλα μεσοαστρικά ή/και μεσογαλαξιακά νέφη αλλά ακόμη και το εσωτερικό υπέρπυκνων αστέρων νετρονίων θα αποκαλύψουν τα μυστικά τους. Η έρευνα για την κατανόηση της μεγάλης έκρηξης που δημιούργησε το Σύμπαν μας θα πάρει μια νέα ώθηση. Με τα βαρυτικά κύματα θα είμαστε σε θέση να συγκεντρώσουμε πληροφορίες για τα πολύ πρώιμα στάδια της Δημιουργίας. Οι σημερινές παρατηρήσεις μας αρχίζουν μερικές εκατοντάδες χιλιάδες χρόνια μετά τη μεγάλη έκρηξη, ενώ με τα βαρυτικά κύματα θα 'παρατηρήσουμε' το Σύμπαν όπως ήταν περίπου 10^{-32} δευτερόλεπτα μετά τη γέννηση του! Μια νέα εποχή ξεκινά λοιπόν που θα φέρει σημαντικές αλλαγές στη Θεωρητική Φυσική, την Αστρονομία και την Κοσμολογία.

7.1 ΑΣΘΕΝΗ ΒΑΡΥΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

Η ΓΘΣ είναι η επικρατούσα θεωρία για τη βαρύτητα αλλά στην πράξη η μελέτη των σχετικιστικών φαινομένων δεν απαιτεί πάντα την χρήση των μαθηματικά περίπλοκων μη-γραμμικών εξισώσεων του Einstein. Ήδη στα πειράματα που επιβεβαίωσαν την ορθότητα της ΓΘΣ πολλές φορές χρησιμοποιήσαμε προσεγγιστικές εκφράσεις των εξισώσεων όταν τα πεδία δεν ήταν ισχυρά. Για πρακτικούς λόγους επομένως συχνά χρησιμοποιούμε την απλοποιημένη γραφή των εξισώσεων Einstein στην οποία διατηρούμε μόνο τους γραμμικούς όρους της θεωρίας. Ένας τρόπος προσέγγισης στο πρόβλημα είναι να θεωρήσουμε ότι στις περιο-

χές που το βαρυτικό πεδίο είναι ασθενές πως ο χωρόχρονος είναι ‘ περίπου ’ επίπεδος. Δηλαδή η μετρική του χώρου να είναι της μορφής

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + O(h_{\mu\nu})^2 \tag{7.1}$$

Με αυτό τον τρόπο όλες οι αποκλίσεις από τον επίπεδο χωρόχρονο Minkowski περιγράφονται από τον τανυστή $h_{\mu\nu}$, ενώ όπου προκύπτουν μη-γραμμικοί όροι ως προς το $h_{\mu\nu}$ θα παραλείπονται.

Με βάση την παραδοχή ότι ο χωρόχρονος είναι προσεγγιστικά επίπεδος θα χρησιμοποιούμε τον μετρικό τανυστή του Minkowski για το ανέβασμα ή κατέβασμα των δεικτών των τανυστών οπότε για παράδειγμα θα έχουμε:

$$h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}h_{\mu\nu} \tag{7.2}$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \tag{7.3}$$

Στη *νέα* μετρική τα σύμβολα Christoffel και ο τανυστής Ricci θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left(h_{\rho\nu,\mu} + h_{\mu\rho,\nu} - h_{\mu\nu,\rho}\right) \tag{7.4}$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} = \frac{1}{2}\left(h^{\alpha}_{\nu,\mu\alpha} + h^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h^{\alpha}_{\alpha,\mu\nu}\right) \tag{7.5}$$

$$R = \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = h_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} - h^{\alpha,\beta}_{\alpha,\beta} \tag{7.6}$$

οπότε ο τανυστής Einstein θα γραφεί ως

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h^{\alpha}_{\nu,\mu\alpha} + h^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h^{\alpha}_{\alpha,\mu\nu}\right) - \eta_{\mu\nu}\left(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h^{\alpha,\beta}_{\alpha,\beta}\right) \tag{7.7}$$

Αν αντικαταστήσουμε [1]

$$h_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\phi \tag{7.8}$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$-\phi_{\mu\nu}{}^{,\alpha}_{,\alpha} - \eta_{\mu\nu}\phi_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \phi_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}_{,\nu} + \phi_{\nu\alpha}{}^{\alpha}_{,\mu} = 0 \tag{7.9}$$

οπότε χρησιμοποιώντας τη συνθήκη βαθμίδας Hilbert (ανάλογη με τη συνθήκη βαθμίδας Lorentz του ηλεκτρομαγνητισμού)

$$\phi^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = \phi_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} = 0 \tag{7.10}$$

καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\phi_{\mu\nu}{}^{,\alpha}_{,\alpha} \equiv \Box\phi_{\mu\nu} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi_{\mu\nu} = 0 \tag{7.11}$$

που ουσιαστικά είναι μια απλή κυματική εξίσωση σε ένα κενό χωρόχρονο. Αυτό σημαίνει ότι οι αποκλίσεις από την επίπεδη γεωμετρία Minkowski διαδίδονται ως κυμάνσεις. Οι διακυμάνσεις αυτές του χωρόχρονου είναι τα **βαρυτικά κύματα**.

[1] Ο τανυστής $\phi_{\mu\nu}$ είναι μηδενικού ίχνους, δηλαδή το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του είναι μηδέν.

7.2 ΒΑΡΥΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Τα βαρυτικά κύματα είναι περιοδικές μεταβολές της καμπύλοτητας του χωρόχρονου και δίνονται από την εξίσωση (7.11) η οποία είναι μια απλή κυματική εξίσωση που προφανώς επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$\phi_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \cos\left(k_\alpha x^\alpha\right) \ , \tag{7.12}$$

όπου ο $A_{\mu\nu}$ είναι ένας συμμετρικός τανυστής, ο **τανυστής πόλωσης**, που εμπεριέχει πληροφορία για το πλάτος και την πόλωση των βαρυτικών κυμάτων. Το k_α είναι το **κυματοδιάνυσμα** που καθορίζει την διεύθυνση διάδοσης και τη συχνότητα του κύματος.

Η λύση που προαναφέραμε θα ικανοποιεί τη συνθήκη βαθμίδας Hilbert, εξίσωση (7.10), που σημαίνει ότι:

$$0 = \phi_{\mu\nu}{}^{,\nu} = -A_{\mu\nu} k^\nu \sin\left(k_\alpha x^\alpha\right)$$

οπότε λαμβάνουμε τη συνθήκη ορθογωνιότητας

$$A_{\mu\nu} k^\nu = 0 \, . \tag{7.13}$$

Επιπλέον, από την κυματική εξίσωση (7.11) λαμβάνουμε

$$0 = \phi_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} = - - A_{\mu\nu} k^\alpha k_\alpha \cos\left(k_\alpha x^\alpha\right)$$

οπότε

$$k^\alpha k_\alpha = 0. \tag{7.14}$$

Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα k^α είναι φωτοειδές και επομένως τα βαρυτικά κύματα διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός.

Με βάση τις σχέσεις (7.13), (7.14) και τη συμμετρικότητα του τανυστή πόλωσης καταλήγουμε ότι για ένα βαρυτικό κύμα που διαδίδεται στη διεύθυνση z, δηλαδή το κυματοδιάνυσμα είναι $k_\mu = (\omega, 0, 0, -\omega)$ με $k_0 = \omega$ τη συχνότητα του κύματος, ότι θα ισχύει

$$A^{\mu\nu} = h_+ \epsilon_+^{\mu\nu} + h_\times \epsilon_\times^{\mu\nu} \tag{7.15}$$

όπου $\epsilon_+^{\mu\nu}$ και $\epsilon_\times^{\mu\nu}$ είναι οι μοναδιαίοι τανυστές πόλωσης και δίνονται από τις σχέσεις

$$\epsilon_+^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_\times^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.16}$$

Τέλος, τα h_+ και $h_\times$, είναι τα πλάτη του βαρυτικού κύματος στις δύο πολώσεις.

Τα βαρυτικά κύματα όπως περιγράφονται στη συνθήκη βαθμίδας που χρησιμοποιήσαμε είναι εγκάρσια (**T**ransverse) και μηδενικού ίχνους (**T**raceless), και συνιθίζεται να τα αναφέρουμε ως T-T.

7.2.1 Η επίδραση των βαρυτικών κυμάτων

Για να μελετήσουμε την επίδραση των βαρυτικών κυμάτων στην ύλη θα προσπαθήσουμε κατ΄ αρχάς να μελετήσουμε την επίδραση τους σε ένα ελεύθερο σωματίδιο και στη συνέχεια σε ζεύγος σωματιδίων.

Η εξίσωση των γεωδαισιακών για ένα ελεύθερο σωματίδιο, ακίνητο ή κινούμενο με μικρή ταχύτητα, δηλαδή $u^\mu \approx (1,0,0,0)$ και $\tau \approx t$, στη γραμμική θεωρία είναι

$$\frac{du^\mu}{dt} = -\frac{1}{2}\left(h_{\mu\alpha,\beta} + h_{\beta\mu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\mu}\right) u^\alpha u^\beta \tag{7.17}$$

οπότε για $u^\mu \approx (1,0,0,0)$ γίνεται

$$\frac{du^\mu}{dt} = -\left(h_{\mu 0,0} - \frac{1}{2}h_{00,\mu}\right) . \tag{7.18}$$

Αν τώρα εξειδικεύσουμε την μελέτη μας στην συνθήκη βαθμίδας T-T στην οποία $h_{00} = h_{\mu 0} = 0$ καταλήγουμε στο συμέρασμα ότι: *τα βαρυτικά κύματα δεν έχουν καμμία επίδραση σε ελεύθερα σωματίδια.*

Αντίθετα, αν θεωρήσουμε ένα ζεύγος σωματιδίων τα οποία βρίσκονται σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων επί του άξονα Ox στις θέσεις x_0 και $-x_0$ και ένα βαρυτικό κύμα να διαδίδεται κατά τη διεύθυνση z, τότε η απόσταση τους θα υπολογίζεται με βάση τη γνωστή σχέση

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \dots \\ &= -g_{11}(dx)^2 = (1-h_{11})(2x_0)^2 = (1 - h_+\cos\omega t)\,(2x_0)^2 \end{aligned} \tag{7.19}$$

οπότε προσεγγιστικά θα είναι:

$$\Delta\ell \approx \left(1 - \frac{1}{2}h_+\cos\omega t\right)(2x_0) . \tag{7.20}$$

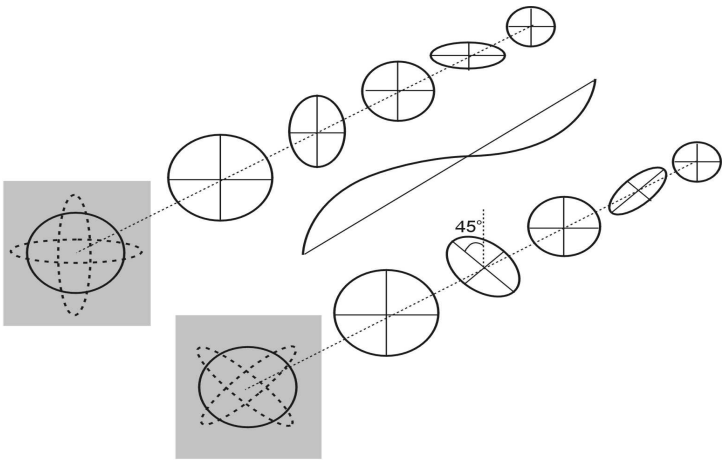
Με ανάλογο τρόπο μπορούμε νε δείξουμε ότι για δύο σωματίδια επί του άξονα Oy θα ισχύει:

$$\Delta\ell \approx \left(1 + \frac{1}{2}h_+\cos\omega t\right)(2y_0) . \tag{7.21}$$

Επομένως, η συντεταγμένη απόσταση των δύο σωματιδίων μεταβάλεται περιοδικά (με συχνότητα αυτήν του κύματος) κατά τη διεύλευση ενός βαρυτικού κύματος, Σχήμα 7.2.

Παλιρροιογόνες δυνάμεις

Όπως προαναφέραμε, ο τανυστής Riemann αποτελεί μέτρο της καμπυλότητας του χωρόχρονου. Τα βαρυτικά κύματα κατά τη διάδοση τους δημιουργούν περιοδικές παραμορφώσεις του χωρόχρονου που περιγράφονται από τον τανυστή Riemann, που στη γραμμική θεωρία λαμβάνει τη μορφή



Σχήμα 7.2. Η επίδραση ενός βαρυτικού κύματος που ταξιδεύει κάθετα στη διεύθυνση του επιπέδου στο οποίο έχει τοποθετηθεί ένας δακτύλιος σωματιδίων. Ο διαφορετικός τρόπος με τον οποίο επιδρούν οι δύο πολώσεις γίνεται εύκολα αντιληπτός.

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\nu\kappa}h_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda\mu}h_{\kappa\nu} - \partial_{\kappa\mu}h_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda\nu}h_{\kappa\mu}\right), \tag{7.22}$$

η οποία είναι γενική και ανεξάρτητη από τη συνθήκη βαθμίδας. Αν όμως χρησιμοποιήσουμε την συνθήκη βαθμίδας T-T τότε ο τανυστής Riemann απλοποιείται σημαντικά,

$$R^{TT}_{j0k0} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}h^{TT}_{jk}, \quad j,k = 1,2,3. \tag{7.23}$$

Στο Νευτώνειο όριο ανάγεται στην μορφή

$$R^{TT}_{j0k0} \approx \frac{\partial^2 U}{\partial x^j \partial x^k}, \tag{7.24}$$

όπου U είναι το Νευτώνειο δυναμικό. Εως τώρα παρουσιάζαμε τον τανυστή Riemann ως ένα γεωμετρικό αντικείμενο, έχει όμως και φυσική σημασία : σχετίζεται με το πεδίο των παλιρροιογόνων δυνάμεων που ασκούνται σε δύο ελεύθερα κινούμενα σωματίδια, στην ουσία αποτελεί το μέτρο της σχετικής επιτάχυνσης του ενός προς το άλλο σωματίδιο. Αν θεωρήσουμε δύο γειτονικά σωματίδια που βρίσκονται σε ελεύθερη πτώση ακολουθώντας τις γεωδαισιακές τους με συντεταγμένες $x^\mu(\tau)$ και $x^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau)$, τότε σε μια δοθείσα τιμή του ίδιου χρόνου τ το διάνυσμα $\xi^\mu(\tau)$ μετρά τη χωροχρονική τους απόσταση, η οποία εξελίσσεται με βάση τη σχέση

$$\frac{d^2\xi^k}{dt^2} \approx -R^k_{0j0}{}^{TT}\xi^j. \tag{7.25}$$

Αυτή είναι μια απλοποιημένη έκφραση για τη γεωδαισιακή απόκλιση .

Ενας άλλος τρόπος κατανόησης της επίδρασης των βαρυτικών κυμάτων είναι δυνατός μέσω της μελέτης της μεταβολής των δυναμικών γραμμών του παλιρροιογόνου πεδίου δυνάμεων, όπως φαίνεται στη Σχήμα 7.3. Η παλιρροιογόνος

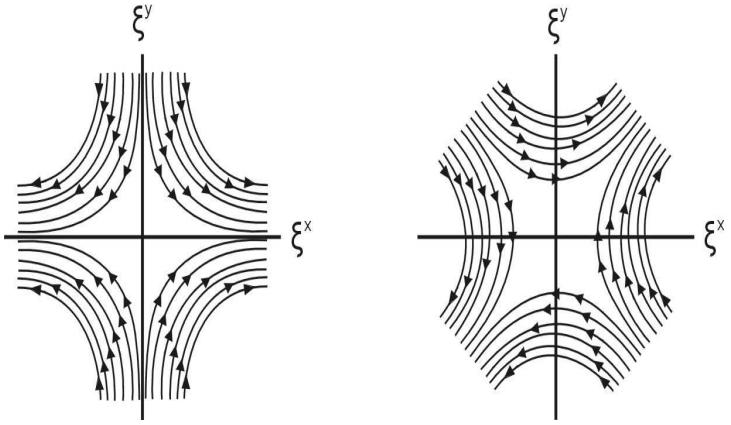
δύναμη που δρά επί των σωματιδίων θα είναι

$$f^k \approx -mR^k_{0j0}\xi^j \approx \frac{m}{2}\frac{d^2h^{TT}_{jk}}{dt^2}\xi^j \tag{7.26}$$

όπου m είναι η μάζα του κάθε σωματίδιου. Οπότε, θα είναι

$$f^x \approx \frac{m}{2}h_+\omega^2\cos[\omega(t-z)]\xi^x_0, \quad \text{and} \quad f^y \approx -\frac{m}{2}h_+\omega^2\cos[\omega(t-z)]\xi^y_0. \tag{7.27}$$

και εύκολα συνάγεται ότι



Σχήμα 7.3. Οι δυναμικές γραμμές του παλιρροιογόνου πεδίου δυνάμεων με πόλωση (+) (αριστερά) και (×) (δεξιά). Ο προσανατολισμός των γραμμών του πεδίου αλλάζει κάθε μισή περίοδο και τα σωματίδια επιταχύνονται προς τη διεύθυνση που δείχνουν τα βέλη.

$$\nabla\mathbf{f} = \frac{\partial f^x}{\partial\xi^x_0} + \frac{\partial f^y}{\partial\xi^y_0} = 0\,. \tag{7.28}$$

7.2.2 Ενέργεια των βαρυτικών κυμάτων

Τα βαρυτικά κύματα μεταφέρουν ενέργεια, ορμή και στροφορμή. Στην συνθήκη βαθμίδας T-T ο τανυστής ενέργειας - ορμής των βαρυτικών κυμάτων δίνεται από τη σχέση

$$t^{GW}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi}\left\langle\left(\partial_\mu h^{TT}_{ij}\right)\left(\partial_\nu h^{TT}_{ij}\right)\right\rangle. \tag{7.29}$$

όπου θεωρούμε ένα μέσο όρο της ενέργειας αθροιζόμενης για αρκετές περιόδους. Στην ειδική περίπτωση βαρυτικών κυμάτων που διαδίδονται κατά τη διεύθυνση z ο τανυστής ενέργειας ορμής έχει μόνο τρείς μη-μηδενικές συνιστώσες

$$t^{GW}_{00} = \frac{t^{GW}_{zz}}{c^2} = -\frac{t^{GW}_{0z}}{c} = \frac{1}{32\pi}\frac{c^2}{G}\omega^2\left(h^2_+ + h^2_\times\right), \tag{7.30}$$

όπου t_{00}^{GW} είναι η πυκνότητα ενέργειας, t_{zz}^{GW} είναι η ροή της ορμής, και t_{0z}^{GW} η ροή της ενέργειας κατά μήκος της z διεύθυνσης ανά μονάδα επιφάνειας και χρόνου (όπου για πρακτικούς έχουμε επαναφέρει τις φυσικές μονάδες).

7.2.3 Εκπομπή της βαρυτικής ακτινοβολίας

Τα βαρυτικά κύματα παράγονται από τις μεταβολές που υφίστανται οι κατανομές ύλης που δημιουργούν τα βαρυτικά πεδία, επομένως για τον υπολογισμό των εκπεμπόμενων κυμάτων σαν συνάρτηση των παραμέτρων της πηγής θα λύσουμε τις γραμμικές εξισώσεις Einstein παρουσία ύλης

$$\Box\phi^{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = -\kappa T^{\mu\nu}(t,\mathbf{x})\,. \tag{7.31}$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης θα έχει τη μορφή

$$\phi^{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = -\frac{\kappa}{4\pi}\int_V \frac{T^{\mu\nu}\left(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|,\mathbf{x}'\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'\,, \tag{7.32}$$

οπότε θεωρώντας ότι η ταχύτητα των μεταβολών στην πηγή είναι σημαντικά μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός και ότι ο $\phi^{\mu\nu}(t,\mathbf{x})$ υπολογίζεται σε μεγάλη απόσταση από την πηγή καταλήγουμε ότι:

$$\phi^{ij}(t,\mathbf{x}) = -\frac{\kappa}{24\pi r}\frac{d^2}{dt^2}Q^{ij}\,, \tag{7.33}$$

ενώ η εκπεμπόμενη ισχύς δίνεται από τη σχέση

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5}\frac{d^3}{dt^3}Q^{ij}\frac{d^3}{dt^3}Q^{ij}\,, \tag{7.34}$$

όπου Q^{ij} είναι ο τανυστής τετραπολικής ροπής της πηγής.

7.3 Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΩΝ ΒΑΡΥΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Τα βαρυτικά κύματα δημιουργούνται όταν τα βαρυτικά πεδία μεταβάλλονται με μη-συμμετρικό τρόπο. Για παράδειγμα, αν η ακτίνα της Γης παρουσίαζε αυξομειώσεις χωρίς να καταστρέφεται το σφαιρικό της σχήμα, τότε δεν θα παράγονταν βαρυτικά κύματα και προφανώς οι δορυφόροι που κινούνται περί την Γη δεν θα υφίστανται μεταβολές στην τροχιά τους. Όταν όμως κινούμε τα χέρια μας παράγουμε βαρυτικά κύματα, διότι μεταβάλλεται το βαρυτικό πεδίο του σώματός μας. Ποιό είναι το πλάτος αυτών των κυμάτων και ποιά η συχνότητάς τους· Ας αρχίσουμε από το δεύτερο ερώτημα, τη συχνότητα. Όσο και αν προσπαθήσουμε, με δυσκολία θα καταφέρουμε να κινήσουμε τα χέρια μας με συχνότητα μεγαλύτερη των 1-2Hz, άρα και η συχνότητα των εκπεμπόμενων βαρυτικών κυμάτων θα είναι 1-2Hz. Γενικά, μπορούμε να δείξουμε σχετικά εύκολα πως η τυπική συχνότητα των περιοδικών μεταβολών μιας πηγής είναι:

$$f \approx \sqrt{GM/R^3} \tag{7.35}$$

που πρακτικά σημαίνει πως η συχνότητα των μεταβολών που υφίσταται ένα σύστημα, που συγκρατείται από τη βαρύτητά του, είναι ίση με τη μέση πυκνότητά του. Αυτή η σχέση είναι αρκετά γενική. Για ένα σύστημα διακριτών σωμάτων, πχ ένα διπλό σύστημα σωμάτων (Ήλιος - Γη) δεν είναι άλλη παρά ο 3ος νόμος του Kepler. Για ένα ρευστό, είναι ο χρόνος που απαιτείται για να ταξιδεύσει ένα ηχητικό κύμα (δηλαδή μια διαταραχή στην πυκνότητα) κατά μήκος του σώματος. Άρα, δοθείσης της μάζας M και των διαστάσεων R ενός σώματος ή συστήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε και τη χαρακτηριστική συχνότητά του, και κατά συνέπεια τη συχνότητα των εκπεμπόμενων βαρυτικών κυμάτων.

Το πλάτος των εκπεμπόμενων βαρυτικών κυμάτων είναι δυσκολότερο να υπολογισθεί με ακρίβεια, αλλά μπορούμε με απλά βήματα να έχουμε μια αρκετά ικανοποιητική εκτίμηση. Για παράδειγμα, το πλάτος των εκπεμπόμενων βαρυτικών κυμάτων που φθάνουν στη Γη είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης r από την πηγή, δηλαδή $\sim GM/r$. Επίσης, εξαρτάται από το πόσο 'σχετικιστική' είναι η πηγή, δηλαδή πόσο καμπυλωμένος είναι ο χωρόχρονος. Όσο μεγαλύτερη είναι η καμπύλωση του χωρόχρονου τόσο πιο έντονες είναι οι 'πτυχώσεις ' που θα δημιουργήσει μια πιθανή μεταβολή του. Άρα, το πλάτος των βαρυτικών κυμάτων θα πρέπει να είναι ανάλογο του σχετικιστικού παράγοντα GM/Rc^2. Τέλος, ο βαθμός της παραμόρφωσης που υφίσταται το σώμα/σύστημα καθορίζει και την παραμόρφωση του χωρόχρονου, επομένως, το πλάτος των κυμάτων θα εξαρτάται και από το βαθμό ασυμμετρίας της πηγής. Στη φυσική, η απόκλιση ενός σώματος από τη σφαιρική συμμετρία μετράται με μια ποσότητα, τον λεγόμενο **τανυστή της τετραπολικής ροπής**. Άρα με βάση τα παραπάνω, το πλάτος των βαρυτικών κυμάτων που εκπέμπει μια πηγή είναι:

$$h \sim \epsilon \left(\frac{GM}{rc^2}\right)\left(\frac{GM}{Rc^2}\right) \tag{7.36}$$

όπου ϵ είναι ο βαθμός απόκλισης από τη σφαιρική συμμετρία που παίρνει τιμές 0-1. Επομένως, με βάση την παραπάνω σχέση, μεταβολές ενός σφαιρικού σώματος που διατηρούν τη σφαιρική συμμετρία δεν εκπέμπουν βαρυτικά κύματα, διότι $\epsilon = 0$. Αυτό είναι προφανές και από όσα γνωρίζουμε από τη Νευτώνεια φυσική, η ένταση του βαρυτικού πεδίου στο εξωτερικό ενός σφαιρικά συμμετρικού σώματος είναι ανάλογη της μάζας του σώματος και όχι των διαστάσεών του. Με βάση τα παραπάνω, το (αδιάστατο) πλάτος των βαρυτικών κυμάτων που εκπέμπει ένας άνθρωπος σε απόσταση $100m$, όταν κινεί περιοδικά τα χέρια του, είναι της τάξης του $h \sim 10^{-53}$! Αντίθετα, μια μη-σφαιρικά συμμετρική μεταβολή των διαστάσεων ενός αστέρα νετρονίων κατά 1 χιλιοστό της ακτίνας του (που είναι περί τα $10km$) θα δώσει βαρυτικά κύματα πλάτους $h \sim 10^{-21}$ σε απόσταση μερικών δεκάδων χιλιάδων ετών φωτός. Η ροή ενέργειας από ένα βαρυτικό κύμα αυτού του πλάτους δεν είναι ευκαταφρόνητη

$$F = \frac{1}{32\pi}\frac{c^5}{G}\dot{h}^2 = \frac{1}{32\pi}\frac{c^3}{G}\omega^2 h^2 \approx 10^{-5}\left(\frac{\omega}{100Hz}\right)^2\left(\frac{h}{10^{-22}}\right) Watt/m^2 \tag{7.37}$$

απλώς, λόγω της εξαιρετικά ασθενούς αλληλεπίδρασης με τα υλικά σώματα, είναι ακόμη δύσκολο να ανιχνευθεί. Τέλος, η ενέργεια που μεταφέρει ένα βαρυτικό κύμα με βάση την παραπάνω σχέση είναι:

$$E = \frac{1}{32\pi}\frac{c^4}{G}\dot{h}^2 = \frac{1}{32\pi}\frac{c^2}{G}\omega^2 h^2 \tag{7.38}$$

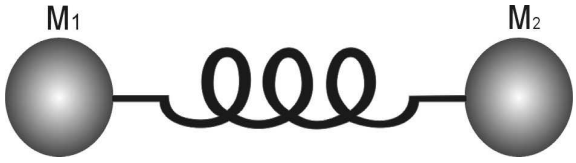
όπου είναι η συχνότητα των βαρυτικών κυμάτων, ενώ έχουμε χρησιμοποιήσει την απλούστευση $\dot{h} \sim h/ct \sim \omega h/c$.

Συνοψίζοντας αυτό το κεφάλαιο θα πρέπει να θυμόμαστε ότι *καλές* πηγές βαρυτικών κυμάτων είναι αυτές που είναι συμπαγείς, δηλαδή $GM/Rc^2 \sim 1$ και παρουσιάζουν μεγάλες χρονικά μεταβαλλόμενες αποκλίσεις από τη σφαιρική συμμετρία.

7.4 Η ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΤΩΝ ΒΑΡΥΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Όπως προαναφέραμε τα βαρυτικά κύματα προκαλούν περιοδικές μεταβολές στην απόσταση δύο σημείων ανάλογες με το αδιάστατο πλάτος τους h και ασκούν παλιρροιογόνες δυνάμεις σε συμπαγή σώματα, δηλαδή μεταβάλλουν περιοδικά τις διαστάσεις τους. Σε αυτές ακριβώς τις ιδιότητές τους βασίζεται και η τεχνική της ανίχνευσης τους. Θα ξεκινήσουμε με την περιγραφή της πρώτης γενιάς ανιχνευτών που άρχισαν να κατασκευάζονται στα μέσα της δεκαετίας του 1960 και έχουν επιτύχει υψηλά επίπεδα ευαισθησίας στις μέρες μας. Εν τούτοις, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι έχουν σχεδόν εξαντλήσει τα τεχνολογικά τους όρια και οι περαιτέρω βελτιώσεις τους πιθανότατα θα είναι πολύ μικρές.

Οι ανιχνευτές συντονισμού στηρίζουν την αρχή λειτουργίας τους στις μεταβολές διαστάσεων που προκαλεί η παλιρροιογόνος επίδραση των βαρυτικών κυμάτων. Για να γίνει ευκολότερα κατανοητή η λειτουργία τους, θα χρησιμοποιήσουμε ένα απλό σύστημα από δύο σφαίρες μάζας Μ που συνδέονται με ένα ελατήριο όπως στο Σχήμα 7.4.



Σχήμα 7.4. Ένα σύστημα δύο μαζών που συνδέονται με ένα ελατήριο αποτελεί μια απλή διάταξη ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων.

Όταν το βαρυτικό κύμα 'χτυπήσει' τον ανιχνευτή αυτός θα εκτελέσει μια εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η παλιρροιογόνος δύναμη που θα ασκεί το βαρυτικό κύμα θα είναι ανάλογη του πλάτους του κύματος h, των διαστάσεων του ταλαντωτή, έστω L του τετραγώνου της συχνότητας του κύματος, έστω ω και προφανώς θα μεταβάλλεται περιοδικά. Η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή θα είναι:

$$\ddot{\xi} + \dot{\xi}/\tau + \omega_0^2 \xi = -\frac{1}{2}\omega^2 Lhe^{i\omega t} \tag{7.39}$$

όπου ξ είναι το πλάτος των ταλαντώσεων που εκτελεί ο ανιχνευτής, τ είναι ο χρόνος απόσβεσης της ταλάντωσης λόγω τριβών και ω_0 η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή. Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι απλή και ειδικά στην περίπτωση που η συχνότητα του βαρυτικού κύματος ω και η ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή ταυτίζονται (συντονισμός) θα επιτύχουμε το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης που είναι:

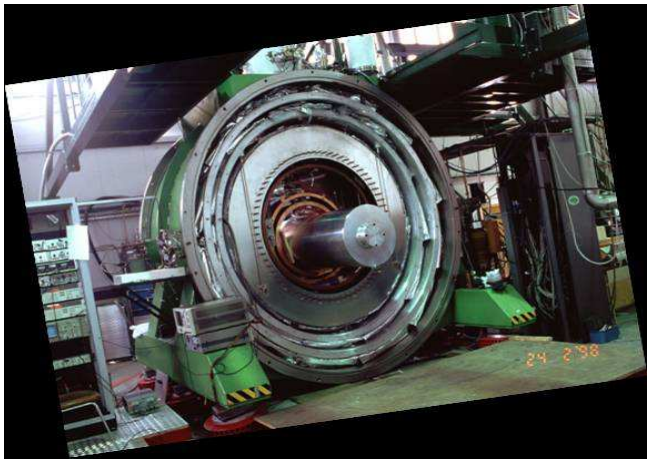
$$\xi_{max} = \frac{1}{2}\omega_0 \tau Lh \tag{7.40}$$

Για δοθέν πλάτος των βαρυτικών κυμάτων, έστω h, και με δοθείσες τις διαστάσεις του ταλαντωτή ο μόνος τρόπος βελτίωσης της ευαισθησίας του ανιχνευτή (μεγιστοποίηση του ξ_{max}) είναι μέσω αύξησης του *συντελεστού ποιότητας* $Q = \pi\omega_0\tau$. Οι πρώτοι ανιχνευτές αυτού του είδους ήταν κύλινδροι αλουμινίου μάζας περίπου $M = 1500kg$, μήκους $L = 1.5m$ και με συντελεστή ποιότητας $Q \sim 10^5$. Επομένως, με αυτόν τον ανιχνευτή θα μπορούσαμε να μετρήσουμε βαρυτικά κύματα πλάτους $h \sim 10^{-7}\xi_{max} cm^{-1}$. Άρα για ένα βαρυτικό κύμα πλάτους $h \sim 10^{-22}$ απαιτείται δυνατότητα μέτρησης μεταβολών μήκους ξ_{max}, της τάξης των $10^{-15}cm$! Οι δυσκολίες όμως στην ανίχνευση δεν σταματούν στην μέτρηση μικρών αποστάσεων, απαιτείται ο ταλαντωτής μας να είναι απομονωμένος από άλλες πηγές θορύβου. Όπως για παράδειγμα σεισμικό θόρυβο και κοντινά ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Αυτές οι πηγές θορύβου είναι δυνατόν να απομονωθούν αλλά υπάρχει και ο θερμικός θόρυβος που απαιτεί την ψύξη του ανιχνευτή σε θερμοκρασίες μικρότερες του 1 Kelvin. Συγκεκριμένα, οι θερμικές κινήσεις στον ανιχνευτή μας θα πρέπει να είναι μικρότερες από τις κινήσεις που εισάγουν τα βαρυτικά κύματα, δηλαδή η ενέργεια που εναποθέτουν τα βαρυτικά κύματα θα πρεπει να είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια $E_T = kT$ των θερμικών κινήσεων. Αυτό μας οδηγεί σε μια σχέση μεταξύ της ευαισθησίας του ανιχνευτή μας και της θερμοκρασίας του που καθορίζει το ελάχιστο πλάτος βαρυτικών κυμάτων που μπορεί να ανιχνεύσει μια δεδομένη συσκευή μάζας M, διαστάσεων L, θερμοκρασίας T και συχνότητας συντονισμού ω_0

$$h_{min} \sim \frac{1}{\omega_0 LQ}\sqrt{\frac{15kT}{M}} \tag{7.41}$$

Προφανώς η ευαισθησία βελτιώνεται αυξάνοντας τις διαστάσεις και τη μάζα του ανιχνευτή και μειώνοντας τη θερμοκρασία του. Ο πλέον ευαίσθητος ανιχνευτής συντονισμού (Nautilus) βρίσκεται στο Frascatti κοντά στη Ρώμη και έχει τα εξής τεχνικά χαρακτηριστικά: $M = 2260Kg$ (Aluminium 5056), $L = 3m$, $T = 0.1K$ και συχνότητα συντονισμού $\omega_0 \sim 906Hz$. Με βάση αυτά τα χαρακτηριστικά ο Nautilus μπορεί να ανιχνεύσει βαρυτικά κύματα πλάτους $h \geq 5 \times 10^{-21}$ εφόσον τα κύματα εκπέμπονται σε συχνότητες που θα προκαλέσουν τον συντονισμό του ανιχνευτή, δηλαδή περί τα 900Hz. Οι πιθανές μελλοντικές βελτιώσεις για αυτού του είδους τους ανιχνευτές περιορίζονται από τις διαστάσεις του συστήματος, οι οποίες δεν μπορούν να γίνουν πολύ μεγαλύτερες από μερικά μέτρα με αντίστοιχη αύξηση της μάζας, και κατά συνέπεια της ευαισθησίας, κατά μία τάξη

μεγέθους. Στις μέρες μας βρίσκονται σε συνεχή λειτουργία πέντε ανιχνευτές με ευαισθησίες που αγγίζουν αυτή του Nautilus (ο Allegro στη Lousiana, ο Auriga στο Legrano, ο Explorer στο CERN και ο NIOBE στο Perth της Αυστραλίας).

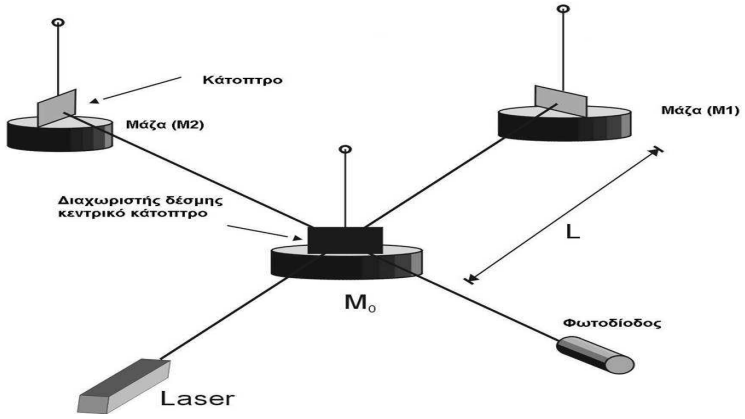


Σχήμα 7.5. Ο ανιχνευτής συντονισμού Nautilus στο Frascatti κοντά στη Ρώμη. Διακρίνεται ο κύλινδρος αλουμινίου στο κέντρο της συσκευής. Το ογκώδες περίβλημα χρησιμεύει για την θερμική μόνωση του.

Τα **συμβολόμετρα laser** αποτελούν την πλέον σύγχρονη μορφή ανιχνευτών, είναι πολύ πιο ευαίσθητα από τους ανιχνευτές συντονισμού και επί πλέον είναι ευαίσθητα σε ένα ευρύ φάσμα συχνοτήτων και όχι μόνο στην περιοχή της συχνότητας συντονισμού. Στα συμβολόμετρα η αρχή λειτουργίας βασίζεται στη μεταβολή της απόστασης δύο μακρυνών σημείων σε διαφορετικές κατευθύνσεις, Σχήμα 7.6. Οι μεταβολές στην απόσταση δύο σημείων είναι ανάλογες του πλάτους του βαρυτικού κύματος αλλά και της απόστασης των σημείων, $\Delta L/L = h$. Επομένως, όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος των βραχιόνων, τόσο πιο ευαίσθητος είναι ο ανιχνευτής μας. Προφανώς θα πρέπει οι βραχίονες του ανιχνευτή να είναι μικρότερου μήκους από το μήκος κύματος του βαρυτικού κύματος. Στην πράξη κατασκευάζουμε ανιχνευτές με βραχίονες 3-4Km, και στη συνέχεια φροντίζουμε η δέσμη laser να ανακλασθεί εντός του βραχίονα μερικές φορές (περί τις 100), οπότε επιτυγχάνουμε ένα *δρόν* μήκος 300Km και βελτιώνουμε την ευαισθησία κατά δύο τάξεις μεγέθους. Τα συμβολόμετρα μπορούν να επιτύχουν πολύ υψηλή ευαισθησία και ο μόνος περιορισμός που θεωρητικά υπάρχει είναι η ακρίβεια με την οποία μπορούμε να μετρήσουμε μικρές αποστάσεις. Για παράδειγμα, για ένα βαρυτικό κύμα πλάτους $h \sim 10^{-22}$ και με *δρόν* μήκος βραχιόνων της τάξης των $L = 300km$, απαιτείται μέτρηση μεταβολών μήκους $\Delta L = hL \approx 3 \times 10^{-15} cm$.

Τα συμβολόμετρα, όπως και οι ανιχνευτές συντονισμού, έχουν πάρα πολλές πηγές θορύβου που πρέπει να απομονωθούν για να γίνει δυνατή η ανίχνευση

των βαρυτικών κυμάτων. Για παράδειγμα, τα κάτοπτρα πρέπει να είναι *σεισμικά απομονωμένα* από το περιβάλλον, διότι οι μεταβολές στη θέση τους λόγω σεισμικών διαταραχών είναι μεγαλύτερες από τις μεταβολές θέσης λόγω των βαρυτικών κυμάτων. Ιδιαίτερη προσπάθεια έχει καταβληθεί, ώστε να απομονωθούν οι εξωτερικοί θόρυβοι στα συμβολόμετρα, πρακτικά όμως είναι αδύνατο να απομονωθούν από σεισμικούς θορύβους με συχνότητες μικρότερες των 1-2Hz. Άρα τα επίγεια συμβολόμετρα είναι κατ' αρχάς ευαίσθητα σε συχνότητες μεγαλύτερες των 5 Hz. Οι *μεταβολές θερμοκρασίας* στα κάτοπτρα (λόγω της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος ή και λόγω θέρμανσης από τη δέσμη laser) μεταβάλουν τις διαστάσεις τους και ως εκ τούτου γίνεται ιδιαίτερη προσπάθεια για τη θερμική μόνωση των κατόπτρων.



Σχήμα 7.6. Σχηματικό διάγραμμα ενός συμβολομέτρου laser. Μία δέσμη laser κατευθύνεται σε ένα ημιδιαφανές κάτοπτρο, οπου διαχωρίζεται σε δύο δέσμες που κατευθύνονται σε ορθή γωνία προς δύο κάτοπτρα που βρίσκονται σε απόσταση L από το κεντρικό κάτοπτρο. Οι δέσμες ανακλώνται και όταν επιστρέψουν συμβάλλουν. Αν οι αποστάσεις των δύο κατόπτρων είναι αρχικά ίσες τότε η δύο δέσμες θα συμβάλλουν σε φάση. Αν όμως διέλθει ένα βαρυτικό κύμα οι αποστάσεις των δύο κατόπτρων από το κεντρικό κάτοπτρο θα μεταβάλονται περιοδικά κατά ένα μήκος $\Delta L = hL$. Άρα, θα παρατηρούμε ότι οι δύο δέσμες θα συμβάλουν περιοδικά εκτός φάσης δημιουργώντας κροσσούς συμβολής.

Σημαντικές πηγές θορύβου οφείλονται στην κβαντική φύση του φωτός, έτσι για παράδειγμα υπάρχει μια *αβεβαιότητα στη μέτρηση των φωτονίων* στη φωτοδίοδο (η παρατηρούμενη διαφορά φάσης στη φωτοδίοδο εξαρτάται από τον λόγο του αριθμού των εκπεμπόμενων φωτονίων από το laser προς τον αριθμό των ανιχνευθέντων). Συνέπεια αυτού του θορύβου είναι να μειώνεται σημαντικά η ευαισθησία του ανιχνευτή για συχνότητες βαρυτικών κυμάτων μεγαλύτερες από 1kHz. *Άρα οι επίγειοι ανιχνευτές είναι ευαίσθητοι στην περιοχή συχνοτήτων 1-1000Hz.* Επιπλέον, το φως του laser εναποθέτει ορμή πάνω στα κάτοπτρα και τα μετακινεί από τις θέσεις ισορροπίας (*πίεση ακτινοβολίας*). Σε κβαντικό επίπεδο υπάρχει μια αβεβαιότητα στο ποσό της εναποτεθείσας ορμής που επηρεάζει

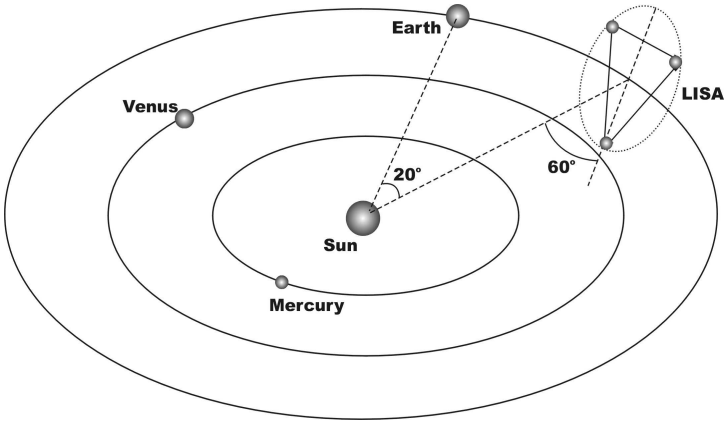
τις μετρήσεις μας. Συνδυάζοντας τις παραπάνω πηγές θορύβου μπορεί να υπολογισθεί το ελάχιστο μετρούμενο πλάτος βαρυτικών κυμάτων που επιτρέπει η κβαντική θεωρία

$$h_{min} = \frac{\Delta L}{L} \sim \frac{1}{L}\left(\frac{\tau\hbar}{M}\right)^{1/2} . \tag{7.42}$$

Επομένως, το κβαντικό όριο καθορίζεται από το μήκος των βραχιόνων L, τη μάζα M των κατόπτρων και τη διάρκεια τ της παρατήρησης. Για ένα τυπικό συμβολόμετρο είναι $h_{min} \approx 10^{-23}$. Τέλος, μια όχι ευκαταφρόνητη πηγή θορύβου προέρχεται από τη διάχυση που υφίσταται το φως των laser λόγω *σκέδασης με τα μόρια του ατμοσφαιρικού αέρα*. Για την ελαχιστοποίηση αυτής της πηγής θορύβου οι βραχίονες βρίσκονται σε σωλήνες κενού (μήκους 3-4km) με μέση πυκνότητα περί τα $10^{-9} torr$.

Τα τελευταία δύο χρόνια έχουν τεθεί σε λειτουργία συμβολόμετρα laser σε διάφορες χώρες ανά τον κόσμο. Στις ΗΠΑ υπάρχουν δύο συμβολόμετρα (στις πολιτείες Louisiana και Washington) με βραχίονες 4km με το ονόμα LIGO, στην Ευρώπη υπάρχει ο Ιταλο-Γαλλικός ανιχνευτής EGO (κοντά στην Πίζα της Ιταλίας) με βραχίονες μήκους 3km και ο Γερμανο-Αγγλικός GEO600 (κοντά στο Αννόβερο της Γερμανίας) με βραχίονες 600m, τέλος στην Ιαπωνία (Τόκυο) ο ανιχνευτής TAMA με βραχίονες 300m. Όλοι αυτοί οι ανιχνευτές πρόσφατα έχουν πρόσφατα (2005-6) επιτύχει την αναμενόμενη ευαισθησία. Σε αυτή τη φάση υπάρχει πιθανότητα ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων με συχνότητα ενός συμβάντος ανά έτος. Ήδη όμως έχει αρχίσει η πειραματική διαδικασία για την βελτίωση της ευαισθησίας των συμβολομέτρων κατά περίπου μια τάξη μεγέθους. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει ψύξη των κατόπτρων, αύξηση της ισχύος των laser και καλύτερη σεισμική μόνωση. Αυτή η δεύτερη φάση αναμένεται να αρχίσει περί τα τέλη του 2006. Με τις ευαισθησίες που θα επιτευχθούν σε αυτή τη δεύτερη φάση αναμένεται η ανίχνευση συμβάντων με συχνότητα τουλάχιστον ένα ανά ημέρα.

Όπως προαναφέραμε, οι συμβολομετρικοί ανιχνευτές είναι ευαίσθητοι στην περιοχή του βαρυτικού φάσματος 1-1000Hz. Υπάρχουν όμως σημαντικές πηγές στην περιοχή των μερικών kHz όπως και στην περιοχή των 0.00001-1Hz. Για την περιοχή των υψηλών συχνοτήτων υπάρχουν μελέτες που συνιστούν τρόπους με τους οποίους οι υπάρχοντες ανιχνευτές θα μπορούσαν να βελτιώσουν την ευαισθησία τους. Αυτό επιτυγχάνεται με κατάλληλη ρύθμιση, ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο θορύβος λόγω της αβεβαιότητας στη μέτρηση των φωτονίων. Αντίθετα, για τις χαμηλές συχνότητες ο σεισμικός θόρυβος είναι αξεπέραστο εμπόδιο και ο μόνος τρόπος υπέρβασής του είναι να θέσουμε σε λειτουργία συμβολόμετρα στο διάστημα. Η ιδέα τέθηκε προς συζήτηση στις αρχές της δεκαετίας του 1990 και σήμερα αποτελεί ένα ώριμο διαστημικό πρόγραμμα για την επιτυχία του οποίου συνεργάζονται η ESA και η NASA. Ο διαστημικός ανιχνευτής ονομάζεται LISA και προγραμματίζεται η λειτουργία του για το έτος 2015. Πρόκειται για ένα σύστημα τριών διαστημοπλοίων που θα σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο και θα ακολουθούν τη Γη στην περιφορά της περί τον Ήλιο.



Σχήμα 7.7. Το διαστημικό συμβολόμετρο LISA αποτελείται από τρία διαστημόπλοια που σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο που ακολουθεί την τροχιά της Γής περί τον Ήλιο. Οι βραχίονές του έχουν μήκος 5.000.000km και πρακτικά οι τρείς βραχίονες σχηματίζουν δύο συμβολόμετρα.

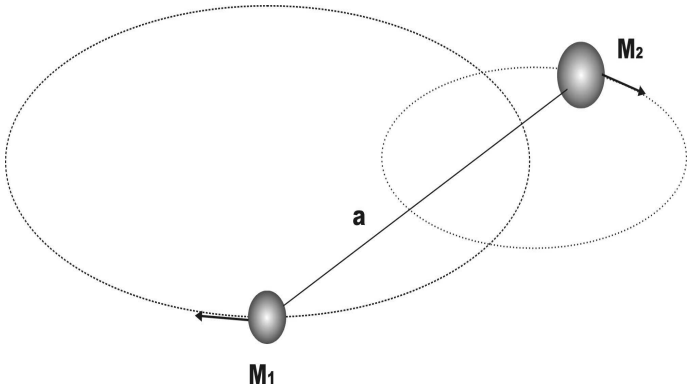
7.5 ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ ΒΑΡΥΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Όλα τα ουράνια σώματα στο Σύμπαν που ζούμε και παρατηρούμε βρίσκονται σε μια αέναη κίνηση που μεταβάλει το βαρυτικό πεδίο που μας περιβάλλει. Φυσικά οι περισσότερες από αυτές τις μεταβολές είναι πολύ αργές και τα εκπεμπόμενα βαρυτικά κύματα είναι μικρού πλάτους, πολλές τάξεις μεγέθους μικρότερο από ό,τι ποτέ θα μπορέσουμε να παρατηρήσουμε. Οι απειροστά μικρές συχνότητες τους είναι μακράν των παραθύρων ευαισθησίας των συμβολομέτρων. Παρά ταύτα εκατομμύρια πηγές εκπέμπουν ανιχνεύσιμα βαρυτικά κύματα στις συχνότητες που οι ανιχνευτές μας είναι ευαίσθητοι. Η ανίχνευση των βαρυτικών κυμάτων από αυτές τις πηγές θα δώσει μοναδικές πληροφορίες για τη φύση των σωμάτων, τη διαδικασία εξέλιξής τους αλλά ίσως και αυτής της ύπαρξής τους. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε μερικές από τις πιο σημαντικές πηγές και στην αστροφυσική σημασία της ανίχνευσης των σημάτων τους.

7.5.1 Συγκλίνοντα Ζεύγη Αστέρων Νετρονίων ή/και Μελανών Οπών

Προαναφέραμε ότι ένα ζεύγος σωμάτων που περιφέρεται περί το κοινό κέντρο μάζας του μεταβάλει περιοδικά το βαρυτικό του πεδίο με αποτέλεσμα να εκπέμπει βαρυτικά κύματα. Η εκπεμπόμενη ενέργεια αφαιρείται από τη συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος με αποτέλεσμα τα δύο σώματα να συγκλίνουν. Η απόσταση των δύο σωμάτων μειώνεται με επιταχυνόμενο ρυθμό με αποτέλεσμα μετά από σχετικά μακρό χρονικό διάστημα τα δύο σώματα να συγκρουσθούν. Υπάρχουν δεκάδες εκατομμύρια διπλά αστρικά συστήματα στο Γαλαξία μας αλλά και σε κάθε γαλαξία. Τα μέλη αυτών των αστρικών ζευγών εξελλίσονται δαπανώντας το μεγαλύτερο διάστημα της ζωής τους ως αστέρες της

κυρίας ακολουθίας (αστέρια όπως ο Ήλιος μας) στη συνέχεια διανύουν τη σχετικά σύντομη (με βάση τους αστρικούς χρόνους) φάση των ερυθρών γιγάντων και υπεργιγάντων και τέλος μετά από μια εκρηκτική φάση (καινοφανείς ή υπερκαινοφανείς) καταλήγουν σε μια από τις γνωστές μορφές 'αστρικών πτωμάτων'. Δηλαδή, τους διακρίνουμε ανάλογα με τη μάζα τους σε λευκούς νάνους, αστέρες νετρονίων ή μελανές οπές. Η φάση της εξέλιξης ενός αστέρα διαρκεί τουλάχιστον 100-1000 φορές λιγότερο από όσο διαρκεί η φάση της σύγκλισης των δύο αστέρων. Υπενθυμίζουμε ότι η ταχύτητα της αστρικής εξέλιξης είναι ανάλογη της μάζας του αστέρα. Εν γένει τα μέλη των ζευγών που μας ενδιαφέρουν, ως πηγές βαρυτικών κυμάτων, έχουν συνήθως εξελιχθεί και ήδη ανήκουν σε μια από τις τρείς κατηγορίες αστρικών πτωμάτων.



Σχήμα 7.8. Ένα διπλό σύστημα με μάζες M_1 και M_2 των μελών του και απόσταση a.

Ένα αστρικό ζεύγος, αλλά και γενικά ένα σύστημα δύο σωμάτων που περιφέρονται περί το κοινό κέντρο μάζας τους, εκπέμπει βαρυτικά κύματα με ισχύ που είναι ανάλογη της μάζας, της απόστασης και της συχνότητας της περιφοράς τους

$$\mathcal{L} = \frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\mu^2 a^4 \Omega^6 = \frac{32}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{M^3\mu^2}{a^5} \tag{7.43}$$

όπου Ω είναι η *γωνιακή ταχύτητα* του συστήματος, $\mu = M_1 M_2/M$ είναι η *ανηγμένη μάζα* του συστήματος και $M = M_1 + M_2$ είναι η *ολική μάζα*. Στη σχέση αυτή χρησιμοποιήσαμε τον 3ο νόμο του Kepler, $\Omega^2 = GM/a^3$. Η εκπεμπόμενη ακτινοβολία οδηγεί σε ελάττωση της μεταξύ τους απόστασης με ρυθμό

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64G^3}{5c^5}\frac{\mu M^2}{a^3} \tag{7.44}$$

και η περίοδος μεταβάλλεται με ρυθμό $\dot{T}/T = 1.5\dot{a}/a$. Αν η σημερινή απόσταση δύο σωμάτων είναι a_0 τότε θα συγκρουσθούν μετά από χρονικό διάστημα που δίνεται από τη σχέση:

$$\tau = \frac{5}{256}\frac{c^5}{G^3}\frac{a_0^4}{\mu M^2}\,. \tag{7.45}$$

Τέλος, το πλάτος των εκπεμπόμενων βαρυτικών κυμάτων θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$h \sim 5\times 10^{-22}\left(\frac{M}{2.8M_\odot}\right)^{2/3}\left(\frac{\mu}{0.7M_\odot}\right)\left(\frac{f}{100Hz}\right)^{2/3}\left(\frac{15Mpc}{r}\right) \tag{7.46}$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε θέσει τις μάζες των αστέρων ίσες με $1.4M_\odot$ (τυπική μάζα ενός αστέρα νετρονίων), τη συχνότητα των εκπεμπόμενων βαρυτικών κυμάτων στα $100Hz$ και απόσταση $15Mpc$ από τη Γη, έτσι ώστε το πλάτος του βαρυτικού κύματος να είναι οριακά ανιχνεύσιμο από τα Γήινα συμβολόμετρα. Θα πρέπει επίσης να επισημάνουμε ότι η συχνότητα της εκπεμπόμενης βαρυτικής ακτινοβολίας είναι διπλάσια της συχνότητας περιστροφής. Με βάση όλες τις παραπάνω σχέσεις αν μας δοθεί η παρούσα απόσταση και οι μάζες ενός ζεύγους σωμάτων μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε την ισχύ της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας, το ρυθμό ελάττωσης της απόστασης των δύο σωμάτων, το πλάτος των εκπεμπόμενων βαρυτικών κυμάτων και τέλος το χρόνο τελικής σύγκρουσης των δύο σωμάτων. Για παράδειγμα το σύστημα Γης -Ήλιου εκπέμπει βαρυτικά κύματα ισχύος $L = 300Watt$ και τα δύο σώματα θα συγκρουσθούν μετά από $\tau \sim 10^{23}$ έτη. Αντίθετα, για δύο αστέρες νετρονίων μάζας $1.4M_\odot$ σε απόσταση 1000km, η εκπεμπόμενη ισχύς σε βαρυτικά κύματα θα είναι $L = 4\times 10^{40}Watt$ και το σύστημα θα συγκλίνει μετά από περίπου $\tau \sim 2200sec$ με ρυθμό ελάττωσης της απόστασής του περί τα $114m/sec$.

Πριν περίπου 30 χρόνια, δύο ραδιοαστρονόμοι, οι Hulse και Taylor, παρακολουθούσαν συστηματικά ένα διπλό σύστημα αστέρων νετρονίων (pulsars) με την αστρονομική ονομασία PSR1913+16. Μετά από συστηματική ανάλυση των δεδομένων διαπίστωσαν ένα ρυθμό ελάττωσης της απόστασης των δύο σωμάτων που συμφωνούσε απόλυτα με την προβλεπόμενη ελλάτωση από τη σχέση (7.44). Τα μέλη του διπλού συστήματος έχουν μάζες $\sim 1.4M_\odot$ και περιφέρονται περί το κοινό κέντρο μάζας με περίοδο $7h$ και $45m$. Ο παρατηρούμενος ρυθμός μεταβολής της περιόδου περιφοράς είναι $\dot{T} = -(2.30 \pm 0.22)\times 10^{-12}sec/sec$ ενώ η προβλεπόμενη από τη ΓΘΣ είναι $\dot{T} = -2.4\times 10^{-12}sec/sec$. Το σύστημα θα συγκλίνει μετά από $\sim 3.5\times 10^8$ έτη. Παρατηρήσεις τριών δεκαετιών επιβεβαίωσαν με εξαιρετική ακρίβεια το αρχικό αποτέλεσμα, ενώ βρέθηκαν και άλλα διπλά συστήματα τα οποία συγκλίνουν με τον προβλεπόμενο ρυθμό. Το 1993 οι Hulse και Taylor τιμήθηκαν με το βραβείο Nobel φυσικής γι' αυτή τους την ανακάλυψη που αποτελεί *έμμεση* επιβεβαίωση της ύπαρξης των βαρυτικών κυμάτων.

Σχεδόν ένα στα τέσσερα ουράνια σώματα αποτελεί μέλος ενός διπλού συστήματος, έτσι δεν είναι καθόλου σπάνια ζεύγη που να αποτελούνται από λευκούς νάνους, αστέρες νετρονίων και μελανές οπές. Τέτοια ζεύγη αποτελούν εν δυνάμει πηγές ανιχνεύσιμης βαρυτικής ακτινοβολίας είτε για ανιχνευτές επί της Γης αλλά και στο διάστημα. Με βάση τον τρίτο νόμο του Kepler όταν η συχνότητα των βαρυτικών κυμάτων από το διπλό σύστημα αστέρων νετρονίων PSR1913+16 είναι περί τα $\sim 7\times 10^{-5}Hz$ δηλαδή οριακά εντός του 'παράθυρου' ευαισθησίας

του ανιχνευτή LISA, το πλάτος των εκπεμπόμενων βαρυτικών κυμάτων θα είναι $h \sim 10^{-23}$. Μετά από 3.5×10^8 έτη, όταν η απόσταση του ζεύγους θα είναι μερικές εκατοντάδες χιλιόμετρα και το ζεύγος θα περιστρέφεται με συχνότητα μερικών Hz, τα εκπεμπόμενα βαρυτικά κύματα θα είναι ανιχνεύσιμα από Γήινους ανιχνευτές. Η απώλεια ενέργειας με τη μορφή βαρυτικών κυμάτων είναι ταχύτατη και η σύγκλιση του ζεύγους τάχιστη, μετά από περίπου 15.000 περιφορές η συχνότητα των βαρυτικών κυμάτων αυξάνεται από μερικά Hz στο 1 kHz σε χρονικό διάστημα 15 min οπότε τα δύο σώματα θα συγκρουσθούν και θα δημιουργήσουν μια μελανή οπή η οποία θα στείλει ένα χαρακτηριστικό σήμα με μορφή βαρυτικών κυμάτων, πριν καταλήξει τελικά σε μια ευσταθή, αμετάβλητη κατάσταση.

Η εξέλιξη που περιγράψαμε είναι τυπική για ζεύγη αστέρων νετρονίων, ενώ ζεύγη από μελανές οπές θα συγκλίνουν ταχύτερα. Ο ρυθμός σύγκλισης είναι ανάλογος του κύβου της μάζας, σχέση (7.44), και ως γνωστόν οι τυπικές μάζες των αστέρων νετρονίων είναι το πολύ δύο έως τρεις μάζες Ήλιου ενώ των μελανών οπών από μερικές μάζες Ήλιου μέχρι και μερικές εκατοντάδες εκατομμύρια μάζες Ήλιου. Το συμβολόμετρο LISA θα είναι σε θέση να ανιχνεύσει σήματα από συγκλίνοντα ζεύγη μελανών οπών που βρίσκονται στα όρια του ορατού Σύμπαντος.

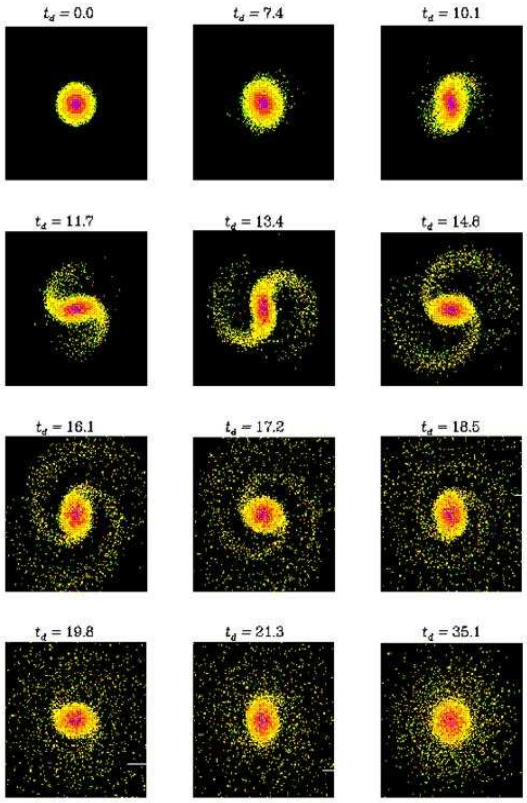
7.5.2 Βαρυτική Κατάρρευση

Η εκπεμπόμενη ισχύς σε βαρυτικά κύματα είναι ανάλογη της ασυμμετρίας της κατάρρευσης. Μια κατάρρευση που διατηρεί τη σφαιρική συμμετρία του σώματος δε θα εκπέμψει βαρυτικά κύματα. Οι αναμενόμενες ασυμμετρίες είναι εν γένει αρκετά μικρές και ως εκ τούτου η εκπεμπόμενη ενέργεια είναι της τάξης των $10^{-5} - 10^{-8} M_\odot c^2$ που είναι ένα εξαιρετικά μεγάλο ποσό ενέργειας. Η εκπεμπόμενη ενέργεια με τη μορφή βαρυτικών κυμάτων σε μερικά μόνο δέκατα του δευτερολέπτου είναι της αυτής τάξης μεγέθους με τη συνολική ενέργεια που θα εκπέμψει ο Ήλιος μας στα δισεκατομμύρια έτη της ζωής του. Η συχνότητα των εκπεμπόμενων βαρυτικών κυμάτων είναι ανάλογη της μάζας του τελικού σώματος. Αν το τελικό σώμα είναι ένας αστέρας νετρονίων, τότε τα εκπεμπόμενα βαρυτικά κύματα θα είναι περί τα 1-3kHz. Αν το τελικό σώμα είναι μια μελανή οπή, τότε η συχνότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας της οπής. Για παράδειγμα, όταν δημιουργείται μια μελανή οπή μάζας $10M_\odot$, η συχνότητα των εκπεμόμενων βαρυτικών κυμάτων είναι περί το 1kHz, ενώ αν η μελανή οπή είναι μάζας $100M_\odot$, τότε η συχνότητα των βαρυτικών κυμάτων είναι περί τα 100Hz. Υπενθυμίζουμε πως το σήμα από τις μελανές οπές είναι ιδιαίτερα χαρακτηριστικό και θα αποτελέσει μοναδικό τρόπο άμεσης απόδειξης της ύπαρξης τους.

7.5.3 Ταλαντώσεις και Αστάθειες Αστέρων Νετρονίων

Επισημάνθηκε ότι η απόδοση της βαρυτικής κατάρρευσης σε βαρυτικά κύματα είναι ανάλογη του βαθμού ασυμμετρίας του τελικού σώματος. Η πλέον

σημαντική πηγή ασυμμετριών σε ένα σώμα είναι η στροφορμή του. Αυτή έχει ως συνέπεια την πλάτυνση του σώματος και σε περίπτωση που υπερβαίνει συγκεκριμένες τιμές, την αστάθειά του.



Σχήμα 7.9. Διαδοχικές φάσης της *δυναμικής αστάθειας* ενός περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων. Στη διάρκεια ενός msec ο αστέρας παραμορφώνεται σπειροειδώς λόγω της περίσσειας στροφορμής, διαχέει ένα ποσοστό από τα εξωτερικά του στρώματα τα οποία απάγουν και σημαντικό ποσοστό της στροφορμής του. Σε αυτή τη φάση, που μπορεί να διαρκέσει από 1-10 περιστροφές, ο αστέρας είναι μια εξαιρετική πηγή βαρυτικών κυμάτων.

Τα σώματα που μας ενδιαφέρουν, οι αστέρες νετρονίων, έχουν υψηλή στροφορμή. Για παράδειγμα, ο Ήλιος, ένας τυπικός αστέρας, με περίοδο περιστροφής ~ 27 ημερών περί τον άξονά του, θα έχει περίοδο μικρότερη από 1 msec αν εξελιχθεί σε αστέρα νετρονίων, διότι η ακτίνα του θα συρρικνωθεί κατά 70.000 φορές. Επομένως, όλοι οι αστέρες νετρονίων στα αρχικά στάδια της ζωής τους θα έχουν στροφορμή ικανή να τους παραμορφώσει ή/και να τους κάνει ασταθείς. Αυτές οι αστάθειες παραμορφώνουν τον αστέρα ο οποίος εκπέμπει σημαντικά

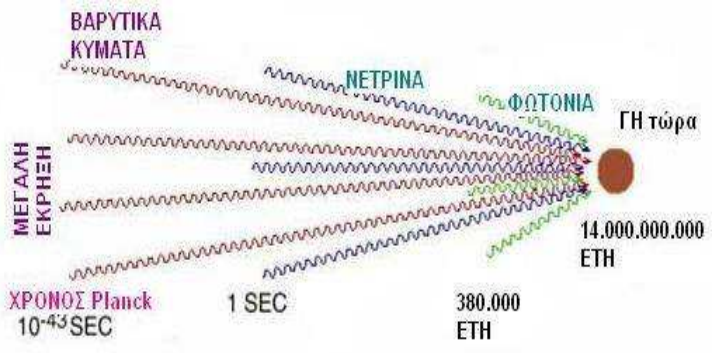
ποσά από την περιστροφική του ενέργεια σε βαρυτικά κύματα οπότε θα καταλήξει τελικά να είναι ένα τάχιστα περιστρεφόμενο αλλά ευσταθές σώμα. Οι θεωρητικές μελέτες για την απώλεια στροφορμής των αστέρων νετρονίων με τη μορφή βαρυτικών κυμάτων επιβεβαιώνονται από τις παρατηρήσεις. Συγκεκριμένα, οι παρατηρήσεις δείχνουν ότι ο ταχύτερα περιστρεφόμενος αστέρας νετρονίων έχει περίοδο 1.56 msec, ενώ η παραπάνω θεωρία προβλέπει ότι δεν μπορούν να υπάρξουν περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων με περίοδο μικρότερη του 1 msec. Αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια επιπλέον έμμεση απόδειξη της ύπαρξης των βαρυτικών κυμάτων.

Προαναφέραμε ότι οι τελευταίες ταλαντώσεις των μελανών οπών, πρίν καταλήξουν στην τελική τους κατάσταση ισορροπίας, χαρακτηρίζονται από ένα ιδιαίτερο σήμα. Η ανίχνευση ενός τέτοιου σήματος θα βοηθούσε στον υπολογισμό της μάζας και της στροφορμής τους. Αντίστοιχα, τα βαρυτικά κύματα που εκπέμπονται από τις τελευταίες ταλαντώσεις των αστέρων νετρονίων μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες για τη μάζα, την ακτίνα, τη στροφορμή αλλά και λεπτομέρειες της καταστατικής τους εξίσωσης. Αυτή η ανάλυση, γνωστή ως *Αστεροσεισμολογία Βαρυτικών Κυμάτων* μπορεί με μοναδικό τρόπο να μας δώσει πληροφορίες άγνωστες ως σήμερα από τις παρατηρήσεις στο ηλεκτρομαγνητικό φάσμα.

7.5.4 Βαρυτικά Κύματα απο τη Μεγάλη Ἐκρηξη

Η μεγάλη έκρηξη που αποτέλεσε την απαρχή του κόσμου αποτελεί το σημείο συνάντησης της αστροφυσικής με τη φυσική των υψηλών ενεργειών. Συνεχείς παρατηρήσεις υψηλότερης ακρίβειας από τους αστροφυσικούς και διαδοχικά θεωρητικά μοντέλα από τους θεωρητικούς φυσικούς συνετέλεσαν στην σχετικά πλήρη εικόνα που έχουμε σήμερα για τον τρόπο που εξελίχθηκε το Σύμπαν αμέσως μετά τη μεγάλη έκρηξη. Ειδικά τα πρόσφατα αποτελέσματα από τον WMAP (δορυφόρο ανίχνευσης μικροκυματικής ακτινοβολίας) έχουν συνεισφέρει με μοναδικό τρόπο στην κατανόηση αρκετών λεπτομερειών της μεγάλης έκρηξης αλλά κυρίως της γεωμετρίας του Σύμπαντος. Ο WMAP, αλλά και μερικά χρόνια νωρίτερα ο COBE, έδωσαν μια μοναδική εικόνα της μορφής του Σύμπαντος περί τα 380.000 έτη μετά τη μεγάλη έκρηξη. Αυτό το υπόβαθρο θερμικής ακτινοβολίας από το πρώιμο σύμπαν έπεται κατα πολύ του υποβάθρου νετρίνων (που δεν έχει ανιχνευθεί ακόμη) το οποίο θα μεταφέρει πληροφορίες περί το 1 sec μετά τη μεγάλη έκρηξη. Αλλά ήδη πολύ πριν και από το 1 sec βαρυτικά κύματα εκπέμποντων από τις διάφορες ανωμαλίες που υπήρξαν στη δομή του πρώιμου Σύμπαντος. Ήδη στο ξεκίνημα της πληθωριστικής φάσης του Σύμπαντος, περίπου στο 10^{-32} sec, έχουμε την εκπομπή βαρυονίων (βαρυτικών κυμάτων) τα οποία θα πρέπει να επιζούν μέχρι τις μέρες μας λόγω της ασθενούς τους αλληλεπίδρασης με την ύλη. Επιπλέον, τοπολογικές ανωμαλίες, όπως κοσμικές χορδές, θα παράγουν βαρυτικά κύματα με χαρακτηριστικό φάσμα.

Τα βαρυτικά κύματα από τη μεγάλη έκρηξη είναι πολύ ασθενικά σήμερα, όπως συμβαίνει και με τη θερμική ακτινοβολία, αλλά θα είναι ανιχνεύσιμα από την νέα γενιά επίγειων συμβολομέτρων αλλά και τη LISA. Η ανίχνευσή τους



Σχήμα 7.10. Τα βαρυτικά κύματα από τη μεγάλη έκρηξη παρέχονται από τα πρωταρχικά στάδια της γέννησης του Σύμπαντος. Τα πρώτα νετρίνα απελευθερώνονται μετά το πρώτο δευτερόλεπτο ενώ τα φωτόνια περι τα 380.000 έτη μετά τη μεγάλη έκρηξη.

θα δώσει μοναδική πληροφορία για τα πολύ πρώιμα στάδια του Σύμπαντος, πληροφορία που είναι αδύνατον να εξαχθεί με άλλο τρόπο.

Α΄

ΠΙΝΑΚΑΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Ταχύτητα του φωτός	c =299792,458 km/s **= 1**
Σταθερά του Planck	$\hbar = 1.05 \times 10^{-27}$ erg $\cdot$ s
Σταθερά της βαρύτητας	$G = 6.67 \times 10^{-8}$dyn $\cdot$ cm^2/g^2 **=1**
Ενέργεια	1 eV=1.602$\times 10^{-12}$erg=1.16 $\times 10^4$K =1.7823$\times 10^{-33}$g =**1.324**$\times 10^{-56}$ **km**
Parsec	1 pc=3.09$\times 10^{13}$km=3.26ly
Χρόνος	1 yr = 3.156$\times 10^7$ sec
Έτος φωτός	1 ly = 9.46$\times 10^{12}$km
Αστρονομική μονάδα	$1AU = 1.5 \times 10^8$km
Μάζα Γής	$M_\oplus = 5.97 \times 10^{27}$g
Ακτίνα Γής (ισημερινό)	$R_\oplus = 6378$km
Μάζα Ήλιου	$M_\odot = 1.99 \times 10^{33}$g **=1.47664 km**
Ακτίνα Ήλιου	$R_\odot = 6.96 \times 10^5$km
Μάζα Γαλαξία (ορατή)	$\approx 10^{11} M_\odot$
Ακτίνα Γαλαξία (ορατού)	$\approx 20 - 25$ kpc
Σταθερά του Hubble	$H_0 \approx (72 \pm 7)$km s^{-1} Mpc^{-1} $h = H_0/100$(km s^{-1} Mpc^{-1})$\approx 0.7 \pm 0.1$
Κρίσιμη πυκνότητα (Σύμπαντος)	$3H_0^2/8\pi G = 1.88 \times 10^{-29} h^2$ g cm^{-3}

Αναφορές

1. Kerr, R., *Phys. Rev. Lett.* **11** 237-238 (1963)
2. Newman, E.T.
3. Nordstrøm, G., *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* **20**, 1238-1245 (1918)
4. Reissner, H., *Ann. Phys.* **50** 106-120 (1916)
5. Schwarzschild, K., *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.*, 189-196 (1916a)
6. Schwarzschild, K., *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.*, 426-434 (1916b)

Ευρετήριο

Birkoff θεώρημα, 51
Christofell σύμβολα, 18
Dicke πείραμα, 41
Eddington-Finkelstein συντεταγμένες, 59
Einstein εξισώσεις, 44
Einstein τανυστής, 29
Kerr-Newman, 65
Kerr, 65
Kruskal-Szekeres συντεταγμένες, 60
Maxwell εξισώσεις, 37
Maxwell τανυστής, 37
Nordstrøm, 64
Poisson εξίσωσης, 35
Reissner-Nordstrøm, 64
Reissner, 64
Ricci τανυστής, 28
Ricci, λήμμα, 19
Riemann τανυστής, 27
Schwarzschild, 49
Schwarzschild μελανή οπή, 56
Tolman-Oppenheimer-Volkov λύση, 61
Weyl τανυστής, 30

Αφινική παράμετρος, 26
Αντισυμμετρικός, τανυστής, 6
Απόκλιση των φωτεινών ακτίνων, 73
Ασθενή βαρυτικά πεδία, 88
Αστέρες Νετρονίων, 83

Βαρυτικά Κύματα, 90
Βαρυτικά Κύματα: Ανίχνευση, 96
Βαρυτικά Κύματα: Δημιουργία, 94
Βαρυτικά Κύματα: Διπλά Συστήματα, 101
Βαρυτικά κύματα: Ενέργεια, 93
Βαρυτικά Κύματα: Κατάρρευση, 104
Βαρυτικά Κύματα: Πηγές, 101
Βαρυτικά Κύματα: Ταλαντώσεις και Αστάθειες, 104
Βαρυτική Ακτινοβολία, 87
Βαρυτική Μετάθεση Φάσματος, 76

δέλτα του Kronecker, 4

Ενέργειας - Ορμής τανυστής, 35
Ευλερ-Λαγρανγε εξισώσεις, 21

Φωτοειδείς, γεωδαισιακές, 25

Γεωδαισιακές καμπύλες, 20

Ισοδυναμίας Αρχή, 40

Μετάθεση του περιηλίου, 71
Μετρικός τανυστής, 14

Παλιρροιογόνες δυνάμεις, 91
Παράλληλη μεταφορά, 10
Πειραμα Shapiro, 77
πολλαπλότητα, 1
πολλαπλότητα, διαφορισιμη, 2

Χρονοειδείς, γεωδαισιακές, 25
Χωροειδείς, γεωδαισιακές, 25

Συμμετρικός, τανυστής, 6
Συναλλοίωτη παράγωγος, 7
Συναλλοίωτη παράγωγοσ: κανόνες, 9

Τανυστές, 2
Τανυστικές Πυκνότητες, 6