Κεφάλαιο 7 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Σ'αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε μεθόδους για την ανάλυση μεγάλου πλήθους δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα, θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τη συνολική συμπεριφορά μιας n-αδας σημείων (x_i, y_i). Οι τεχνικές που θα εξετάσουμε είναι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων και η προσέγγιση ελαχίστου-μεγίστου. Στο τέλος θα εξετάσουμε και μια μέθοδο για τον υπολογισμό "συμπτωτικών" ρητών συναρτήσεων.

7.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Όταν θέλουμε να μελετήσουμε μεγάλο αριθμό σημείων, τότε η προσέγγιση τους με συμπτωτικό πολυώνυμο είναι και δύσκολη αλλά και άνευ νοήματος τις περισσότερες φορές. Σ' αυτή την περίπτωση προσπαθούμε να βρούμε ένα πολυώνυμο ή γενικότερα μια συνάρτηση με συμπεριφορά παρόμοια με αυτή της ομάδας των σημείων που διαθέτουμε και για την οποία η διαφορά $y_i - f(x_i)$ να είναι ελάχιστη.

Στην πράξη, ζητάμε την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος

$$S = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - p(x_i) \right]^2 \qquad \text{Εξ. 7.1}$$

όπου $p(x)$ το ζητούμενο πολυώνυμο συγκεκριμένου βαθμού (συνήθως όχι μεγαλύτερου του τέταρτου ή πέμπτου).

7.1.1 ΕΥΘΕΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Το ζητούμενο πολυώνυμο θα είναι πρωτοβάθμιο, δηλαδή: $p(x) = a \cdot x + \beta$. Άρα, θα προσπαθήσουμε να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα:

$$S = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - a x_i - \beta \right]^2 \qquad \text{Εξ. 7.2}$$

Το ζητούμενο είναι να προσδιορίσουμε τα a και β ώστε το S να γίνει <u>ΕΛΑΧΙΣΤΟ</u>.

Εφαρμόζοντας τη θεωρία εύρεσης μεγίστου ή ελαχίστου συναρτήσεων πολλών μεταβλητών απαιτούμε να είναι:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \qquad \text{Εξ. 7.3}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= -2 \sum_{i=0}^{n} x_i \left(y_i - a x_i - \beta \right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} &= -2 \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - a x_i - \beta \right) = 0 \end{aligned} \qquad \text{Εξ. 7.4}$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να γραφούν ως:

$$\begin{aligned} (n+1)\beta + \left(\sum x_i \right) a &= \sum y_i \\ \left(\sum x_i \right)\beta + \left(\sum x_i^2 \right) a &= \sum x_i y_i \end{aligned} \qquad \text{Εξ. 7.5}$$

και, αν θέσω

$$s_o = n+1 \qquad s_1 = \sum x_i \qquad s_2 = \sum x_i^2$$
$$\upsilon_o = \sum yi \qquad \upsilon_1 = \sum x_i y_i \qquad \text{Εξ. 7.6}$$

τότε το σύστημα *7.5* απλοποιείται και βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} s_0\beta + s_1 a &= \upsilon_0 \\ s_1\beta + s_2 a &= \upsilon_1 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} a &= \frac{s_0\upsilon_1 - s_1\upsilon_0}{s_0 s_2 - s_1^2} \\ \beta &= \frac{s_2\upsilon_0 - s_1\upsilon_1}{s_0 s_2 - s_1^2} \end{aligned} \qquad \text{Εξ. 7.7}$$

Επιπλέον, αποδεικνύεται εύκολα ότι:

$$s_0 s_2 - s_1^2 = (n+1)\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2 = \sum_{i<j}\left(x_i - x_j\right)^2 > 0$$

Για να είναι το S ελάχιστο για τις τιμές των a και β, θα πρέπει:

$$\Delta = \frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial \beta}\right)^2 > 0 \qquad \text{Εξ. 7.8}$$

και, επιπλέον, μια από τις $\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}, \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2}$ να είναι μεγαλύτερη του μηδενός για τις τιμές των a και β, που δίνονται από την *εξ. 7.7.*

Επομένως, βρίσκουμε εύκολα ότι:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2s_2 > 0, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} = 2s_0 > 0, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial \beta} = 2s_1 \qquad \text{Εξ. 7.9}$$

$$\text{άρα} \quad \Delta = 2s_2 \cdot 2s_0 - (2s_1)^2 = 4\left(s_0 s_2 - s_1^2\right) > 0 \qquad \text{Εξ. 7.10}$$

Άρα, οι τιμές που υπολογίζονται στην *εξ. 7.7* είναι τα ζητούμενα ελάχιστα.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.1</u>

Βρείτε ένα τύπο της μορφής $P(x) = Ae^{Mx}$ *(όπου A και m είναι άγνωστες σταθερές που πρέπει να υπολογισθούν) για τα δεδομένα:*

x	1	2	3	4
$P(x)$	7	11	17	27

Θέτω $z = \log(P)$ *και* $B = \log(A)$ *οπότε η ζητούμενη σχέση είναι η* $z = B + Mx$, *επομένως δημιουργώ ένα νέο πίνακα στοιχείων για τα νέα ζεύγη* (x_i, z_i) *δηλαδή*

x	1	2	3	4
z	1.9459	2.3979	2.8332	3.2958

Οπότε βρίσκουμε:

$s_0 = 4, s_1 = 10, s_2 = 30, v_0 = 10.48$ *και* $v_1 = 28.44$

άρα

$M \approx 0.45$, $B = 1.5$ *και επομένως* $A = 4.48$. *Τελικά η ζητούμενη σχέση είναι:* $P(x) = 4.48e^{0.45x}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2

Δίνονται τα παρακάτω ζεύγη σημείων:

x	0.05	0.11	0.15	0.31	0.46	0.52	0.70	0.74	0.82
y	0.956	0.890	0.832	0.717	0.571	0.539	0.378	0.370	0.306

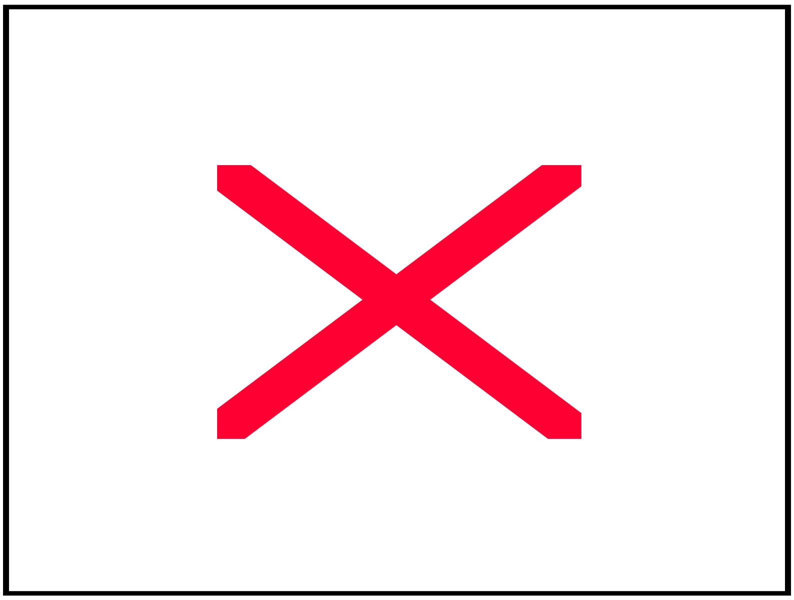
Να υπολογισθεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων.

Είναι $n = 9$, $s_0 = 10$, $s_1 = \sum x_i = 3.86$, $s_2 = \sum x_i^2 = 2.3252$

$\upsilon_0 = \sum y_i = 5.559$, $\upsilon_1 = \sum x_i y_i = 1.82506$

$a = -0.83496$ $\beta = 0.97577$

Επομένως, $p(x) = 0.97577 - 0.83496x$



7.1.2 ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Η διαδικασία εύρεσης της παραβολής ελαχίστων τετραγώνων είναι παρόμοια με αυτή της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων.

Επομένως, ελαχιστοποιούμε το άθροισμα

$$S = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - a x_i^2 - \beta x_i - \gamma\right)^2$$

Από τις σχέσεις για την ύπαρξη ακροτάτου θα είναι

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{a}} = \frac{\partial S}{\partial \beta} = \frac{\partial S}{\partial \gamma} = 0$$

και έτσι καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \upsilon_0 \\ \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{pmatrix}$$

όπου

$$s_3 = \sum x_i^3, \qquad s_4 = \sum x_i^4, \qquad \upsilon_2 = \sum x_i^2 y_i$$

ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία s_0, s_1, s_2, v_0, v_1 δίνονται από τις σχέσεις 7.6.

Στη γενική περίπτωση πολυωνύμου ελαχίστων τετραγώνων βαθμού $n-1$ οι συντελεστές του πολυωνύμου προσδιορίζονται απο τη λύση του παρακάτω συστήματος:

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & \cdots & s_{2n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \upsilon_0 \\ \upsilon_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \upsilon_n \end{pmatrix}$$

όπου τα s_k και v_k δίνονται από τις σχέσεις:

$$s_k = \sum x_i^k \qquad \upsilon_k = \sum x_i^k y_i$$

και το πολυώνυμο είναι:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_n \,.$$

Στο παράδειγμα 7.2 της προηγούμενης παραγράφου αν ζητούσαμε πολυώνυμο δεύτερου βαθμού, τότε θα βρίσκαμε

$$p(x) = 0.996 - 0.995 \cdot x + 0.186 \cdot x^2$$

και το πολυώνυμο τρίτου βαθμού είναι:

$$p(x) = 1.0 - 1.06 \cdot x + 0.37 \cdot x^2 - 0.14 \cdot x^3$$

7.2 ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΓΙΑ ΣΥΝΕΧΗ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Εστω η $y(x)$ μια συνεχής συνάρτηση που επιθυμούμε να προσεγγίσουμε στο διάστημα $[-1,1]$ με ένα πολυώνυμο της μορφή:

$$P(x) = a_m P_m(x) + a_{m-1} P_{m-1}(x) + \ldots + a_0 P_0(x)$$

όπου $P_k(x)$ το πολυώνυμο Legendre βαθμού k και τα a_k σταθερές που πρέπει να υπολογισθούν.[1]

Το τετραγωνικό σφάλμα αυτής της προσέγγισης θα είναι:

$$S = \int_{-1}^{1} \left[y(x) - a_m P_m(x) - a_{m-1} P_{m-1}(x) - \ldots - a_0 P_0(x) \right]^2 dx$$

Οπότε αν θελήσω να ελαχιστοποιήσω το σφάλμα θα πρέπει να απαιτήσω

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0$$

επομένως θα είναι:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = \int_{-1}^{1} \left[y(x) - a_m P_m(x) - a_{m-1} P_{m-1}(x) - \ldots - a_0 P_0(x) \right] P_k(x) dx = 0$$

Επειδή όμως τα πολυώνυμα Legendre είναι ορθογώνια, ισχύει:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) \cdot P_k(x) dx = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ \dfrac{2}{k+1} & k = m \end{cases}$$

οπότε

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = \int_{-1}^{1} \left[y(x) - a_k P_k(x) \right] P_k(x) dx = 0$$

και εύκολα αποδεικνύεται ότι οι συντελεστές a_k δίνονται από τις σχέσεις:

$$\boxed{a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} y(x) P_k(x) dx}$$

Τέλος, αν το διάστημα είναι τυχαίο $[a, \beta]$, τότε χρησιμοποιώ την αντικατάσταση:

---

[1] Τα πολυώνυμα Legendre δίνονται από τον τύπο του Rodrigue

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k$$

Τα πρώτα απο αυτά είναι: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ κ.ο.κ.

$$x = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a)$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.3</u>

Με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων προσδιορίστε την παραβολή που προσεγγίζει τη συνάρτηση $y(t) = \sin(t)$ *στο διάστημα* $[0, \pi]$.

Κατ'αρχάς αλλάζω το διάστημα με την εξής αλλαγή μεταβλητής:

$$t = \frac{\pi}{2}(x+1) \text{ οπότε } [0,\pi] \to [-1,1]$$

άρα η νέα συνάρτηση είναι:

$$y = \sin[\frac{\pi}{2}(x+1)].$$

Οι ζητούμενοι συντελεστές θα είναι:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin[\frac{\pi}{2}(x+1)]dx = \frac{2}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \sin[\frac{\pi}{2}(x+1)] \cdot x \cdot dx = 0$$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} \sin[\frac{\pi}{2}(x+1)] \cdot \frac{1}{2}(3x^2-1) \cdot dx = \frac{10}{\pi}(1-\frac{12}{\pi^2})$$

και τελικά η ζητούμενη παραβολή είναι:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}(1-\frac{12}{\pi^2})\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

και αλλάζοντας μεταβλητή καταλήγω στην εξης συνάρτηση:

$$y = \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}(1-\frac{12}{\pi^2})[\frac{6}{\pi^2}(t-\frac{\pi}{2})^2 - \frac{1}{2})$$

7.3 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ – ΜΕΓΙΣΤΟΥ

Έστω ότι δίνεται μια συνάρτηση $y(x)$ή ένα σύνολο σημείων (x_i, y_i) και ζητώ να βρω μια νέα προσεγγιστική συνάρτηση $\overline{y}(x)$. Απαιτώ για αυτή τη συνάρτηση **να ελαχιστοποιήσω το μέγιστο σφάλμα.**

Το σφάλμα σέ ένα σημείο x είναι:

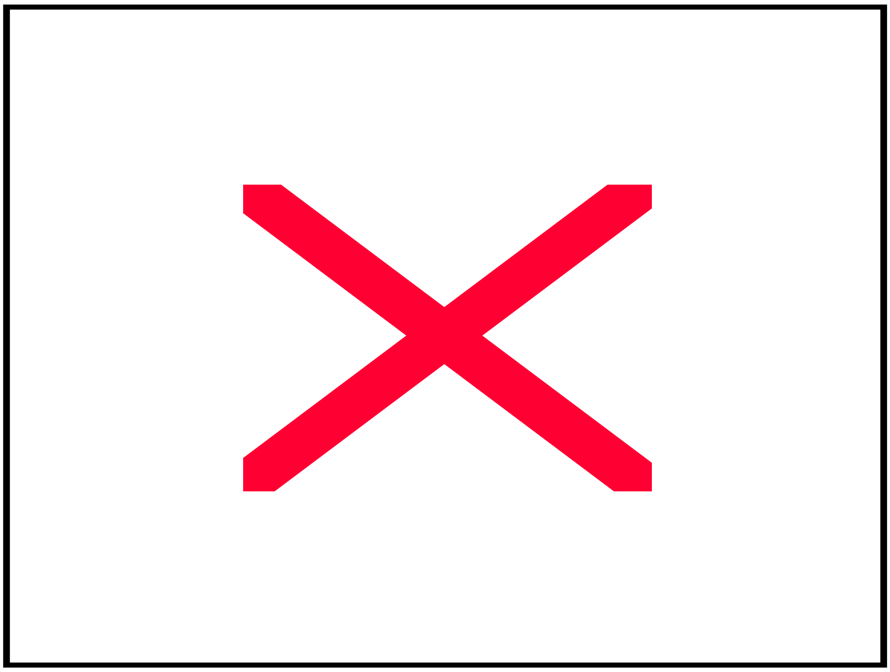
$$\varepsilon = \left| y(x) - \overline{y}(x) \right|$$

Για απλότητα θα δείξουμε τη διαδικασία για την ευθεία $\overline{y}(x) = ax + \beta$ και μόνο για τρία σημεία (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2). Επομένως το σφάλμα στο τυχαίο σημείο x_i θα είναι:

$$|\varepsilon_i| = \left| y_i - (ax_i + \beta) \right|$$

Έστω ότι μια ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (x_0, y_0), (x_2, y_2), η εξίσωση της είναι:

$$\overline{y} = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} x + \frac{y_0 x_2 - y_2 x_0}{x_2 - x_0}$$



Τα σφάλματα για τα τρία σημεία θα είναι:

$$\varepsilon_0 = 0$$

$$\varepsilon_1 = \left| y_1 - \overline{y}(x_1) \right| = | y_1 - ax_1 - b |$$

$$\varepsilon_2 = 0$$

Αν μετατοπίσω την ευθεία παράλληλα έτσι, ώστε το σφάλματα να είναι $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ θα σχηματίσω μια νέα ευθεία, την

$$\overline{\overline{y}} = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} x + C$$

Το C είναι μια άγνωστη σταθερά που υπολογίζεται από τη σχέση $AA' = BB'$, δηλαδή

$$y_0 - \left(\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} x_0 + C \right) = \left(\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} x_1 + C \right) - y_1$$

οπότε τελικά βρίσκουμε τη νέα **ευθεία ίσων σφαλμάτων**:

$$\boxed{\overline{\overline{y}} = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} x + \frac{y_0(x_1 + x_2) + y_1(x_2 - x_0) - y_2(x_0 + x_1)}{2(x_2 - x_0)}}$$

Προφανώς τα σφάλματα είναι:

$$\varepsilon_0 = y_0 - \overline{\overline{y}}_0, \quad \varepsilon_1 = y_1 - \overline{\overline{y}}_1, \quad \varepsilon_2 = y_2 - \overline{\overline{y}}_2$$

και

$$|\varepsilon_0| = |\varepsilon_1| = |\varepsilon_2|$$

Το σφάλμα σε κάθε ένα από τα τρία σημεία θα είναι:

$$\boxed{\varepsilon = y_0 - \overline{\overline{y}}_0 = \frac{y_0(x_2 - x_1) - y_1(x_2 - x_0) + y_2(x_1 - x_0)}{2(x_2 - x_0)}}$$

Αν έχω πολλά σημεία παίρνω τρία τυχαία υπολογίζω την ευθεία ίσων σφαλμάτων και υπολογίζω στη συνέχεια τα σφάλματα των υπολοίπων σημειών. Απο αυτά βρίσκω το σημείο με το μεγαλύτερο σφάλμα, οπότε επαναλαμβάνω την ίδια διαδικασία κρατώντας τα δύο αρχικά σημεία και το νέο κ.ο.κ.

7.4 <u>ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</u>

Επιθυμούμε να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση $f(x)$ με μια **ρητή συνάρτηση**, που θα είναι ο λόγος δυο πολυωνύμων n και m βαθμού. Εστω:

$$f(x) \approx R_N(x) \approx \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m} \qquad N = n + m$$

όπου $R_N(x)$ είναι το ανάπτυγμα Maclaurin της $f(x)$ (δηλαδή οι $R_N(x)$ και $f(x)$ ταυτίζονται και για τις N πρώτες παραγώγους τους). Οπότε

$$\mathrm{f(x) - R_N}(x) \approx \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_N x^N\right) - \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}$$
$$= \frac{\left(c_0 + c_1 x + \ldots + c_N x^N\right)\left(1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m\right) - \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n\right)}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}$$

για να είναι οι πρώτες N παράγωγοι των $f(x)$ και $R_N(x)$ ίσες για $x = 0$, θα πρέπει οι συντελεστές του πολυωνύμου στον αριθμητή ως και τάξης N να είναι μηδέν. Αυτό έχει ως συνέπεια να υπάρχουν N εξισώσεις για τους άγνωστους συντελεστές

$$\begin{aligned}
&b_1 c_0 + c_1 - a_1 = 0\\
&b_2 c_0 + b_1 c_1 + c_2 - a_2 = 0\\
&b_3 c_0 + b_2 c_1 + b_1 c_2 + c_3 - a_3 = 0\\
&\vdots\\
&b_m c_{n-m} + b_{m-1} c_{n-m+1} + \ldots + c_n - a_n = 0\\
&b_m c_{n-m+1} + b_{m-1} c_{n-m+2} + \ldots + c_{n+1} = 0\\
&b_m c_{n-m+2} + b_{m-1} c_{n-m+3} + \ldots + c_{n+2} = 0\\
&\vdots\\
&b_m c_{N-m} + b_{m-1} c_{N-m+1} + \ldots + c_N = 0
\end{aligned}$$

Απο τις σχέσεις αυτές λύνοντας το σύστημα των N εξισώσεων για τους N αγνώστους συντελεστές υπολογίζω τη ρητή συνάρτηση. Προσέξτε ότι σε κάθε γραμμή οι δείκτες κάθε όρου έχουν άθροισμα N. Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή ως **προσέγγιση Pade**.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4</u>

Να βρεθεί το $\tan^{-1}(x) \approx R_9(x)$. *Για πολυώνυμο πέμπτου βαθμού στον αριθμητή και τετάρτου στον παρονομαστή (θα μπορούσε να γραφεί και ως* $R_{5,4}(x)$ *)* [2].

Το ανάπτυγμα Maclaurin είναι:

$$\tan^{-1}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

[2] Η επιλογή μας είναι αυθαίρετη, θα μπορούσαμε για παράδειγμανα θεωρήσουμε πολυώνυμο 3ου βαθμού στον αριθμητή και 6ου στον παρανομαστή.

οπότε

$$f(x)-R_9(x)=$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9\right)\left(1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4\right)-\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_5x^5\right)}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4}$$

Αρα καταλήγω στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$a_0=0 \quad a_1=1 \qquad a_2=b_1 \qquad a_3=-\frac{1}{3}+b_2$$

$$a_4=-\frac{1}{3}b_1+b_3 \qquad a_5=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}b_2+b_4$$

$$\frac{1}{5}b_1-\frac{1}{2}b_3=0 \qquad -\frac{1}{7}+\frac{1}{5}b_2-\frac{1}{3}b_4=0$$

$$-\frac{1}{7}b_1+\frac{1}{5}b_3=0 \qquad \frac{1}{9}-\frac{1}{7}b_2+\frac{1}{5}b_4=0$$

που έχει ως αποτέλεσμα:

$$a_0=0 \quad a_1=1 \quad a_2=0$$

$$a_3=\frac{7}{9} \quad a_4=0 \quad a_5=\frac{64}{945}$$

$$b_1=0 \quad b_2=\frac{10}{9} \qquad b_3=0 \quad b_4=\frac{5}{21}$$

δηλαδή η ρητή συνάρτηση που ζητάμε είναι:

$$\boxed{\tan^{-1}x=\frac{x+\frac{7}{9}x^3+\frac{64}{945}x^5}{1+\frac{10}{9}x^2+\frac{5}{21}x^4}}$$

Αν τώρα θελήσουμε να εξετάσουμε την ακρίβεια της ρητής συνάρτησης μπορούμε να θέσουμε μια τυχαία τιμή, έστω $x=1$ στην παραπάνω σχέση τότε το αποτέλεσμα είναι 0.7856, η ακριβής τιμή είναι 0.7854 ενώ το ανάπτυγμα Maclaurin δίνει 0.8349. *Παρατηρούμε δηλαδή ότι ενώ χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα Maclaurin για τον υπολογισμό της ρητής συνάρτησης το τελικό αποτέλεσμα είναι πολύ ακριβέστερο.*

7.4.1 ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟ ΔΟΘΕΝΤΑ ΣΗΜΕΙΑ

Αν η $f(x)$ δίνεται σε ένα **συγκεκριμένο αριθμό σημείων** k, τότε θα πρέπει:

$$\frac{a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+\ldots+a_nx_i^n}{1+b_1x_i+b_2x_i^2+\ldots+b_mx_i^m}=f(x_i) \qquad k\geq m+n+1$$

οπότε αναγόμαστε στη λύση ενός συστήματος της μορφής:

$$
\begin{array}{ll}
a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n - (f_1 x_1) b_1 - \ldots - (f_1 x_1^m) b_m = f_1 & \\
\vdots & \vdots \\
a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i^n - (f_i x_i) b_1 - \ldots - (f_i x_i^m) b_m = f_i & \\
\vdots & \vdots \\
a_0 + a_1 x_\kappa + \ldots + a_n x_\kappa^n - (f_\kappa x_\kappa) b_1 - \ldots - (f_\kappa x_\kappa^m) b_m = f_\kappa &
\end{array}
$$

δηλαδή k εξισώσεις για τις k άγνωστες ποσότητες $a_{0,} a_1, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$.
Το σύστημα αυτό λύνεται σχετικά εύκολα με τις μεθόδους του 2ου Κεφαλαίου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.5

Να βρεθεί μια ρητή συνάρτηση που να επαληθεύει τα παρακάτω σημεία:

x	-1	0	1
y	1	2	-1

Προφανώς ο βαθμός των πολυωνύμων στον αριθμητή και παρανομαστή θα πρέπει να είναι το πολύ 3 $(n+m+1=3)$. Οπότε αν υποθέσω γραμμικά πολυώνυμα στον αριθμητή και παρανομαστή θα έχω μια ρητή συνάρτηση της μορφής:

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x}$$

θέτωντας τις τιμές του πίνακα δημιουργώ τις τρείς παρακάτω εξισώσεις:

$$
\left.
\begin{array}{l}
a_0 + (-1)a_1 - (-1)b_1 = 1 \\
a_0 + 0 \cdot a_1 - 0 \cdot b_1 = 2 \\
a_0 + 1 \cdot a_1 - (-1)b_1 = -1
\end{array}
\right\} \Rightarrow
\begin{array}{l}
a_0 = 2 \\
a_1 = -1 \\
b_1 = -2
\end{array}
$$

άρα η ζητούμενη ρητή συνάρτηση θα είναι:

$$\boxed{R(x) = \frac{2-x}{1-2x}}$$

εναλακτικά θα μπορούσα να οδηγηθώ και στην παρακάτω ρητή συνάρτηση, εάν είχα θεωρήσει δευτεροβάθμιο πολυώνυμο στον παρανομαστή

$$R(x) = \frac{a_0}{1 + b_1 x + b_2 x} \quad \Rightarrow \quad R(x) = \frac{2}{1 - 2x - x^2}$$

ενώ προφανώς για δευτεροβάθμιο πολυώνυμο στον αριθμητή οδηγούμαστε στο συμπτωτικό πολυώνυμο, δηλαδή

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1} \quad \Rightarrow \quad R(x) = 2 - x - 2x^2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Υπολογίστε τη ρητή προσεγγίση της συνάρτησης $y = e^x$ με μια ρητή συνάρτηση $R_{3,3}(x)$ (δηλαδή 3ο βάθμιο πολυώνυμο σε αριθμητή και παρανομαστή). Συγκρίνετε με το ανάπτυγμα Maclaurin 6ης τάξης για $x = 1$. Τι παρατηρείτε;

2 Επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία για τις συναρτήσεις $y = \cos(x)$ και $y = \sin(x)$ (βρείτε το $R_{3,5}(x)$) και για την $y = {}^{1}\!/_{x\sin(x)}$ (βρείτε το $R_{4,6}(x)$).

3 Βρείτε μια ρητή συνάρτηση που να επαληθεύει τις τιμές:

0	1	2	4
0.83	1.06	1.25	4.15

4 Προσδιορίστε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων για τα παρακάτω σημεία:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	1.2	1.5	1.4	1.6	2.1	2.0	2.2	2.5	3.0

5 Προσδιορίστε την ευθεία μεγίστου-ελαχίστου για τα δεδομένα του προηγούμενου προβλήματος.

6 Προσδιορίστε μια παραβολή ελαχίστων τετραγώνων που να προσεγγίζει τη συνάρτηση $y = e^{-x^2/2}$.

7 Αν εξέλιξη ενός φαινομένου ακολουθεί ένα νόμο της μορφής $y(t) = ke^{at^2+bt}$ να βρεθούν οι τιμές των σταθερών k, a, b για τα δεδομένα του πίνακα

t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$y(t)$	2.7	2.9	3.1	3.4	3.6	3.9	4.3	4.6	5.0	5.6

(Υπόδειξη: Λογαριθμήστε την δοθείσα σχέση και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε παραβολή ελαχίστων τετραγώνων).