

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ  
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**

**Κ. ΚΟΚΚΟΤΑΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ**  
**Α.Π.Θ.**

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2002

# Κεφάλαιο 1 ΡΙΖΕΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Κλασικό πρόβλημα των στοιχειωδών Μαθηματικών είναι η εύρεση μιας τιμής  $r$  τέτοιας, ώστε για μια συνάρτηση  $f(x), x \in (a, b)$  να ισχύει:

$$f(r) = 0 \quad \text{Εξ. 1.1}$$

Η βασική διαδικασία για την εύρεση ριζών μη-γραμμικών εξισώσεων είναι η δημιουργία μιας αναδρομικής σχέσης. Η διαδικασία αυτή θα ακολουθηθεί και στην εύρεση ριζών γραμμικών και μη-γραμμικών συστημάτων, αλλά και στην αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Επομένως, σε κάθε μέθοδο που θα αναπτύξουμε, στόχος μας είναι η εύρεση αναδρομικών σχέσεων της μορφής

$$x_{n+1} = \sigma(x_n) \quad \text{Εξ. 1.2}$$

που θα δίνει μια ακολουθία τιμών  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  και στο όριο  $n \rightarrow \infty$  να δίνει τη ρίζα της εξίσωσης (1.1).

Τα βασικά ερωτήματα που καλούμαστε να απαντήσουμε κατά την ανάπτυξη των διαφόρων μεθόδων είναι:

- I. Κάτω από ποιες συνθήκες συγκλίνει μια μέθοδος
- II. Αν συγκλίνει, πόσο γρήγορα συγκλίνει
- III. Πώς θα βρεθεί η αρχική τιμή  $x_0$ .

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα κλασικό λογιστικό πρόβλημα είναι το εξής:

Εάν ένας καταθέτης τοποθετεί κάθε μήνα στο τραπεζικό λογαριασμό του ένα σταθερό κεφάλαιο  $K$ , τότε πόσος χρόνος χρειάζεται, ώστε το κεφάλαιο του να γίνει  $F$  δοθέντος ότι το επιτόκιο είναι  $x$ ;

Ο κανόνας που χρησιμοποιούν οι τράπεζες είναι

$$F = K \cdot \frac{12}{x} \left[ \left( 1 + \frac{x}{12} \right)^N - 1 \right] \quad \text{Εξ. 1.3}$$

όπου  $N$  είναι ο αριθμός των μηνών. Εύκολα μπορεί κανείς να οδηγηθεί στη λύση του προβλήματος, αν λογαριθμώσει κατάλληλα τη σχέση 1.3. Θα μπορούσε όμως να ακολουθήσει και μια διαφορετική διαδικασία, δηλαδή να δοκιμάσει διάφορες τιμές του  $N$ , έως ότου επιτύχει το απαιτούμενο αποτέλεσμα, δηλαδή μετά από  $K$  προσπάθειες να οδηγηθεί στην τιμή  $N_K$ , για την οποία

$$f(N_K) = F - \frac{12K}{x} \left[ \left( 1 + \frac{x}{12} \right)^{N_K} - 1 \right] = 0 \quad \text{Εξ. 1.4}$$

επομένως, ουσιαστικά να αναζητεί τη ρίζα της εξίσωσης  $f(N) = 0$ .

Το πρόβλημα, όπως το περιγράψαμε, ίσως δεν απαιτεί τη βοήθεια των μεθόδων εύρεσης ριζών που θα περιγράψουμε στη συνέχεια. Όμως, έστω ότι διαφοροποιούμε τη λογική του, δηλαδή θεωρούμε ότι ο καταθέτης γνωρίζει για πόσους μήνες θα καταθέτει χρήματα και αναζητά το κατάλληλο επιτόκιο. Σε αυτή την περίπτωση, αναγόμενους στην εύρεση της ρίζας της εξίσωσης  $f(x) = 0$ . Οι μέθοδοι, που θα αναπτυχθούν στη συνέχεια, θα μας βοηθήσουν να επιλύσουμε το πρόβλημα με ακρίβεια και ταχύτητα.

## 1.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ (Bolzano)

Στο προηγούμενο παράδειγμα, ας προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε μια απλοϊκή ίσως διαδικασία. Υποθέτουμε ότι το κεφάλαιο που κατατίθεται κάθε μήνα είναι 1000 δρχ και το ποσό που έχουμε στόχο να συλλέξουμε σε διάστημα 50 μηνών είναι 65000 δρχ.

Αν δοκιμάσουμε λοιπόν για δυο τυχαίες (αλλά λογικές) τιμές του επιτοκίου, έστω  $x_1 = 0.10$  και  $x_2 = 0.15$ , θα βρούμε:

$$\begin{aligned} f(0.10) &= 3286.4 \\ f(0.15) &= -3881.8 \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι με επιτόκιο 0.10, υπολειπόμεθα του στόχου μας κατά 3286.4 δραχμές, ενώ με επιτόκιο 0.15 τον ξεπερνούμε κατά 3881.8 δραχμές. Επομένως, η φυσική μας επιλογή θα είναι να δοκιμάσουμε για επιτόκιο 0.125, δηλαδή μια τιμή στο μέσο του διαστήματος (0.1, 0.15). Για επιτόκιο  $x_3 = 0.125$  βρίσκουμε ότι

$$f(0.125) = -174.5$$

άρα απέχουμε από το στόχο μας μόνο κατά 174.5 δρχ, ενώ φαίνεται πλέον πως η σωστή τιμή του επιτοκίου βρίσκεται στο διάστημα (0.10, 0.125). Επομένως, επιλέγοντας μια τιμή στο μέσο του διαστήματος,  $x_4 = 0.1125$ , βρίσκουμε ότι

$$f(0.1125) = 1585.6$$

Άρα η σωστή τιμή βρίσκεται στο διάστημα (0.1125, 0.125), επομένως μπορούμε να επιλέξουμε ένα νέο επιτόκιο, που θα είναι  $x_5 = (0.1125 + 0.125)/2 = 0.11875$ , και να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία.

Μετά από μερικές ακόμη προσπάθειες, θα καταλήξουμε στην τιμή του κεφαλαίου που επιθυμούμε να συγκεντρώσουμε μετά από καταθέσεις 50 μηνών.

Η “απλοϊκή” μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα αποτελεί μια από τις κλασικές μεθόδους εύρεσης ριζών εξισώσεων και ονομάζεται **μέθοδος διχοτόμησης** ή **μέθοδος του Bolzano**. Η διαδικασία που ακολουθούμε μπορεί να κωδικοποιηθεί ως ακολούθως:

Αν μια ρίζα βρίσκεται στο διάστημα  $[a_0, b_0]$ , τότε  $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ .

$$\text{Αν } \mu_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0),$$

τότε:

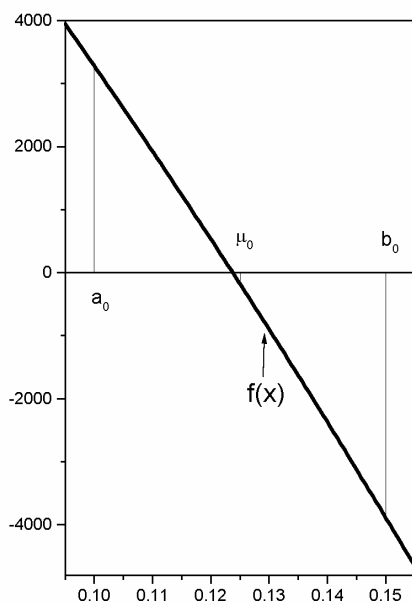
$$\text{είτε I. } f(\mu_0) \cdot f(a_0) < 0$$

$$\text{είτε II. } f(\mu_0) \cdot f(b_0) < 0$$

$$\text{είτε III. } f(\mu_0) = 0$$

Αν ισχύει η III, τότε τελειώνουμε, αλλιώς ορίζω νέο διάστημα

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [\mu_0, b_0] & \text{αν II} \\ [a_0, \mu_0] & \text{αν I} \end{cases}$$



**ΣΧΗΜΑ 1.1** Γραφική απεικόνιση της διαδικασίας που αναπτύχθηκε για τη μέθοδο διχοτόμησης.

### **ΚΡΙΤΙΚΗ**

Δύο στοιχεία κάνουν την μέθοδο ελάχιστα ελκυστική

I. Αργή σύγκλιση

II. Επικίνδυνη, όταν υπάρχουν ασυνέχειες

### **ΣΦΑΛΜΑ**

Ως σφάλμα ορίζουμε την «απόσταση»  $\varepsilon_n = |r - x_n|$  της τιμής  $x_n$  από τη ρίζα  $r$  της εξίσωσης. Για τη μέθοδο διχοτόμησης το σφάλμα είναι μικρότερο από το μισό του διαστήματος στο οποίο περικλείεται η ρίζα

$$\text{σφάλμα} \leq \frac{1}{2} \overbrace{|a_n - b_n|}^{\varepsilon_n}$$

Σε κάθε βήμα το σφάλμα μειώνεται στο μισό του προηγούμενου

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n}{2} = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2^2} = \dots = \frac{\varepsilon_0}{2^{n+1}}$$

υπάρχει επομένως η δυνατότητα να υπολογίσουμε από την αρχή τον αριθμό των βημάτων που απαιτούνται για την επίτευξη μιας δεδομένης ακρίβειας στην εύρεση της ρίζας. Έστω επομένως ότι  $E$  είναι η ζητούμενη ακρίβεια τότε η προηγούμενη σχέση μας οδηγεί στο ζητούμενο:

$$n = \log_2 \frac{\varepsilon_0}{E}$$

### **ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ**

```
REPEAT
    set  $x_3 = (x_1 + x_2)/2$ 
    IF  $f(x_3) \cdot f(x_1) < 0$ 
        set  $x_2 = x_3$ 
    ELSE set  $x_1 = x_3$ 
    ENDIF
UNTIL  $(|x_1 - x_2| < E) \text{ OR } f(x_3) = 0$ 
```

## **1.2 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ (*regula falsi*)**

Όπως διαπιστώσαμε, η μέθοδος της διχοτόμησης συγκλίνει στην ακριβή τιμή της ρίζας αρκετά αργά. Για το λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι με τις οποίες επιτυγχάνεται ταχύτερη σύγκλιση. Αρκετά δημοφιλής είναι η μέθοδος της **γραμμικής παρεμβολής**.

Βασίζεται στην εξής λογική:

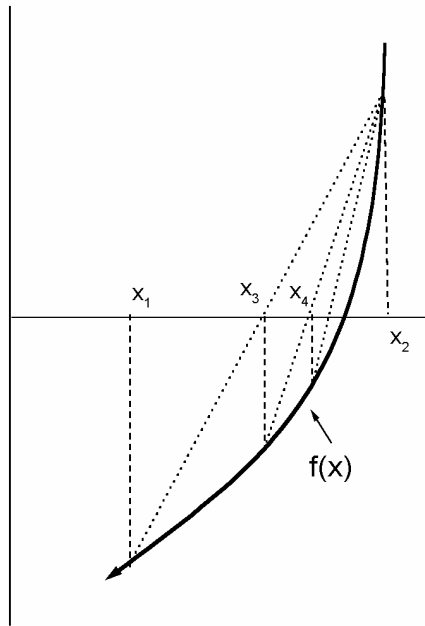
Αν στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  υπάρχει μία ρίζα της  $f(x)$ , δηλαδή  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ , τότε φέρνω την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $(x_1, f(x_1))$  και  $(x_2, f(x_2))$  με εξίσωση:

$$y(x) = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} (x - x_1) \quad \text{Εξ. 1.5}$$

η οποία τέμνει τον άξονα  $x$  έστω στο σημείο  $x_3$ :

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} (x_2 - x_1) \quad \text{Εξ. 1.6}$$

Επομένως στην πράξη αντικαθιστώ στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  την συνάρτηση  $f(x)$  με μία ευθεία και θεωρώ προσεγγιστικά ότι η τομή αυτής της ευθείας με τον άξονα των  $x$  είναι η ζητούμενη ρίζα. Το νέο σημείο είναι



**ΣΧΗΜΑ 1.2** Γραφική απεικόνιση της διαδικασίας που αναπτύχθηκε για τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής.

$$[a_1, \beta_1] = \begin{cases} [\mu_0, \beta_0] & \text{αν II} \\ [\alpha_0, \mu_0] & \text{αν I} \end{cases}$$

πλησιέστερα στην ρίζα και ως εκ τούτου μπορώ να χρησιμοποιήσω τη σχέση (1.6) ξανά για την αναζήτηση μιας νέας τιμής που να βρίσκεται πλησιέστερα στη ρίζα  $r$ . Για να χρησιμοποιήσουμε όμως τη σχέση (1.6) απαιτείται η κατάλληλη επιλογή ενός εκ των δύο αρχικών σημείων. Μια απλή (αλλά όχι μοναδική) διαδικασία επιλογής είναι να φροντίζουμε το ζεύγος των σημείων που χρησιμοποιούμε να περικλείει τη ρίζα:

$$\begin{array}{lll} \text{είτε} & \text{I. } f(x_1) \cdot f(x_3) < 0 & \Rightarrow x_2 = x_3 \\ \text{είτε} & \text{II. } f(x_2) \cdot f(x_3) < 0 & \Rightarrow x_1 = x_3 \\ \text{είτε} & \text{III. } f(x_3) = 0 & \end{array}$$

#### ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ:

Η σχέση (1.6) με κατάλληλους δείκτες είναι η ζητούμενη αναδρομική σχέση

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} (x_{n+1} - x_n) \quad \text{Εξ. 1.7}$$

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Ας εφαρμόσουμε στο παράδειγμα (λογιστικό πρόβλημα) της προηγούμενης μεθόδου τη γραμμική παρεμβολή, θα βρούμε για  $x_1 = 0.1$  και  $x_2 = 0.15$  ότι

$$x_3 = 0.1229 \text{ και } f(x_3) = 122.1$$

δηλαδή, ήδη από το πρώτο βήμα έχουμε επιτύχει εξαιρετικά ακριβές αποτέλεσμα και, αν επαναλάβουμε ακόμη μια φορά τη διαδικασία, καταλήγουμε πρακτικά στο ζητούμενο αποτέλεσμα, δηλαδή:

$$x_4 = 0.12375 \text{ και } f(x_4) = 4.4$$

επαναλήψεις	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_3)$
1	0.10	0.15	0.1229	122.114
2	0.1229	0.15	0.12375	4.361
3	0.12375	0.15	0.1237787	0.156
4	0.12378	0.15	0.1237798	0.00571

**Πίνακας 1.1**

Στο πρόβλημα που περιγράψαμε, η σύγκλιση είναι ταχύτατη, γιατί η μορφή της καμπύλης στην περιοχή της ρίζας είναι γραμμική, και ως εκ τούτου, η προσέγγισή της με μια ευθεία είναι πολύ καλή.

**ΚΡΙΤΙΚΗ:**

- I. Συγκλίνει ταχύτερα από τη μέθοδο διχοτόμησης
- II. Δεν είναι υποχρεωτικό η ρίζα να εσωκλείεται μεταξύ των δύο αρχικών τιμών.

Η διαδικασία εύρεσης της ρίζας με την μεθοδολογία που αναπτύξαμε περιγράφεται από τον ακόλουθο αλγόριθμο:

**ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (I) ΓΙΑ ΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ**

Υποθέτει ότι η ρίζα περικλείεται στο αρχικό διάστημα  $(x_1, x_2)$

*REPEAT*

$$\text{set } x_3 = x_2 - f(x_2) \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$$

IF  $f(x_3) \cdot f(x_1) < 0$

set  $x_2 = x_3$

ELSE set  $x_1 = x_3$

*ENDIF*

UNTIL  $|f(x_3)| < E$

Στη διαδικασία που μόλις περιγράψαμε υπάρχει κάποιο αδύνατο σημείο, γιατί, όπως γίνεται αντιληπτό από τον πίνακα 1.1, η τιμή μιας εκ των  $x_1$  ή  $x_2$  παραμένει σταθερή. Άρα πλησιάζουμε τη ρίζα “μονόπλευρα” και αυτό έχει ως συνέπεια, μερικές φορές, η σύγκλιση να είναι αρκετά αργή, βλ. Σχήμα 1.2

Υπάρχουν δυο εναλλακτικές διαδικασίες για τη διόρθωση της μονόπλευρης σύγκλισης. Η πρώτη διαδικασία αλλάζει την επιλογή των τιμών για το επόμενο βήμα, δηλαδή, αν από δυο τιμές  $x_1, x_2$  έχουμε υπολογίσει με τη χρήση της εξ. 1.6 μια  $x_3$ , χρησιμοποιούμε για το επόμενο βήμα την  $x_3$  και αυτήν από τις  $x_1, x_2$ , για την οποία η  $|f(x)|$  είναι μικρότερη. Επομένως, ο τροποποιημένος αλγόριθμος θα είναι:

**ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (II) ΓΙΑ ΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ**

Η ρίζα δεν περικλείεται στο αρχικό διάστημα  $(x_1, x_2)$

*REPEAT*

$$\text{set } x_3 = x_2 - f(x_2) \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$$

IF  $|f(x_1)| < |f(x_2)|$

set  $x_2 = x_3$

ELSE set  $x_1 = x_3$

*ENDIF*

UNTIL  $|f(x_3)| < E$

Η δεύτερη διαδικασία που βελτιώνει την ακρίβεια είναι η αντικατάσταση της τιμής της  $f(x)$  στο σταθερό σημείο  $x_2$  με την τιμή  $f(x_2)/2$  κοκ. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται στον παρακάτω τροποποιημένο αλγόριθμο:

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (II) (ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟΣ)

```

 $F_1 = f(x_1)$ 
 $F_2 = f(x_2)$ 
 $S = f(x_1)$ 

                                REPEAT

    set  $x_3 = x_2 - F_2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{F_2 - F_1}$ 

    IF       $f(x_3) \cdot F_1 < 0$ 
        set  $x_2 = x_3$ 
        set  $F_2 = f(x_3)$ 
    IF  $f(x_3) \cdot S > 0$ 
        set  $F_1 = F_1/2$ 
    ENDIF

    ELSE
        set  $x_1 = x_3$ 
        set  $F_1 = f(x_3)$ 
        IF  $f(x_3) \cdot S > 0$ 
            set  $F_2 = F_2/2$ 
        ENDIF
    ENDIF

    set SAVE =  $f(x_3)$ 

UNTIL       $|f(x_3)| < E$ 

```

**ΣΥΓΚΛΙΣΗ**

Έστω  $\xi$  η ακριβής ρίζα της εξίσωσης. Αν θεωρήσουμε ότι  $\varepsilon_n = |\xi - x_n|$  είναι το σφάλμα στην εύρεση της ρίζας της  $f(x) = 0$  για  $x = x_n$ , τότε η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής συγκλίνει με βάση τη σχέση

$$\varepsilon_{n+1} = k \cdot \varepsilon_n^{1.618}$$

Η απόδειξη αυτής της σχέσης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως βάση για τον υπολογισμό της ταχύτητας σύγκλισης και άλλων μεθόδων αυτού του κεφαλαίου.

Έστω η αναδρομική σχέση

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}(x_{n+1} - x_n)$$

τότε

$$x_n = \xi + \varepsilon_n \text{ όπου } f(\xi) = 0$$

δηλαδή  $\varepsilon_n$  είναι η "απόσταση" (το σφάλμα) της  $x_n$  από την ακριβή ρίζα της εξίσωσης  $\xi$ . Επομένως αν θεωρήσουμε ένα ανάπτυγμα Taylor της μορφής για κάθε μία από τις τρεις τιμές  $x_1$ ,  $x_2$  και  $x_3$

$$f(x_i) = f(\xi + \varepsilon_i) = f(\xi) + \varepsilon_i f'(\xi) + \frac{\varepsilon_i^2}{2} f''(\xi)$$

και αντικαταστήσουμε τα αναπτύγματα στην αρχική σχέση βρίσκουμε

$$\xi + \varepsilon_{n+2} = \xi + \varepsilon_{n+1} - \frac{\varepsilon_{n+1} f'(\xi) + \varepsilon_{n+1}^2 f''(\xi)/2}{f'(\xi)(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(\varepsilon_{n+1}^2 - \varepsilon_n^2)} \cdot (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)$$

η σχέση αυτή μετά από μερικές απλοποιήσεις οδηγεί στην:

$$\varepsilon_{n+2} = \varepsilon_{n+1} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_n}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \right) \right] = \varepsilon_{n+1} \varepsilon_n \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}$$

η οποία συνδέει το σφάλμα στο βήμα  $n+2$  με τα σφάλματα στα βήματα  $n+1$  και  $n$ .

Το ζητούμενο όμως είναι μια σχέση της μορφής  $\varepsilon_{n+1} = k \cdot \varepsilon_n^m$  όπου τα  $k$  και  $m$  είναι άγνωστες σταθερές. Τα σφάλματα στις επαναλήψεις  $n+1$  και  $n+2$  είναι

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{n+1} = k \cdot \varepsilon_n^m \\ \varepsilon_{n+2} = k \cdot \varepsilon_{n+1}^m \end{array} \right\} \Rightarrow k \cdot \varepsilon_{n+1}^m = \varepsilon_{n+1} \varepsilon_n \left( \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \right) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{n+1} = \left( \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{m-1}} \frac{1}{\varepsilon_n^{m-1}} A^{\frac{1}{m-1}}}$$

$$\text{όπου } A = \left( \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \right)$$

οπότε αντικαθιστώντας και το  $\varepsilon_{n+1}$  οδηγούμε σε μια σχέση μόνο για το  $\varepsilon_n$  από την οποία θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις τιμές του  $k$  και  $m$ .

$$\text{Άρα } k \cdot \varepsilon_n^m = \left( \frac{A}{k} \right)^{\frac{1}{m-1}} \varepsilon_n^{\frac{1}{m-1}} \quad \left| \quad \begin{array}{l} k = \left( \frac{A}{k} \right)^{\frac{1}{m-1}} \\ m = \frac{1}{m-1} \Rightarrow m^2 - m - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Άρα } m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 1.618 \quad k^m = A = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}$$

Οπότε τελικά καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση:

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} = k \cdot \varepsilon_n^{1.618}}$$

Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση της μεθόδου δεν είναι γραμμική αλλά περίπου τετραγωνική και προφανώς η εύρεση της ρίζας μιας εξίσωσης απαιτεί σημαντικά μικρότερο αριθμό αριθμητικών πράξεων.



### 1.3 ΜΕΘΟΔΟΣ MULLER

Η μέθοδος Muller βασίζεται στην προσέγγιση της συνάρτησης με ΠΑΡΑΒΟΛΗ.

Αν δοθούν τρεις αρχικές τιμές  $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i$ , τότε η επόμενη προσέγγιση  $x_{i+1}$  βρίσκεται ως η ρίζα της παραβολής

$$Ax^2 + Bx + \Gamma = 0$$

όπου

$$A = qf(x_i) - q(1+q)f(x_{i-1}) + q^2f(x_{i-2})$$

$$B = (2q+1)f(x_i) - (1+q)^2f(x_{i-1}) + q^2f(x_{i-2})$$

$$\Gamma = (1+q)f(x_i)$$

και  $q = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1} - x_{i-2}}$

#### ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

$$x_{i+1} = x_i - (x_i - x_{i-1}) \left[ \frac{2\Gamma}{B \pm \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}} \right]$$

Το σημείο του παρονομαστή επιλέγεται ούτως ώστε να γίνεται το κλάσμα μικρότερο απολύτως.

#### ΣΦΑΛΜΑ

$$\varepsilon_{n+1} = K\varepsilon_n^{1.84}$$

δηλαδή η συγκλιση είναι σημαντικά καλύτερη από τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής.

#### ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι

1. Συγκλίνει ταχύτατα
2. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εύρεση μιγαδικών ριζών.

### 1.4 ΜΕΘΟΔΟΣ $x = g(x)$

Στα Μαθηματικά, ονομάζουμε *σταθερό σημείο* μιας συνάρτησης  $g(x)$  έναν πραγματικό αριθμό τέτοιον, ώστε  $p = g(p)$ . Η ακολουθία  $p_{n+1} = g(p_n)$  για  $n = 0, 1, \dots$  καλείται *ακολουθία σταθερού σημείου*.

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Έστω μια συνεχής συνάρτηση  $g(x)$  και μια ακολουθία  $p_n$ , που δημιουργείται από μια αναδρομική σχέση σταθερού σημείου. Αν  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ , τότε το  $p$  είναι ένα σταθερό σημείο της  $g(x)$ .

Αν δοθεί μια συνάρτηση  $f(x)$  της οποίας ζητάμε τη ρίζα  $f(x) = 0$  και είναι δυνατό να βρεθεί μια γραφή  $x = g(x)$  τέτοια, ώστε, αν  $f(r) = 0$  να είναι  $r = g(r)$ , τότε η ακολουθία  $x_n = g(x_n)$  οδηγεί στη ρίζα της εξίσωσης.

Επομένως, προσπαθούμε να βρούμε μια σχέση της μορφής

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

ούτως ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \text{ρίζα}$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Αν σε ένα διάστημα  $I = (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$  περιέχεται μια απλή ρίζα  $r$  της εξίσωσης  $f(x) = 0$  και, αν η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί στη μορφή  $x = g(x)$  με  $|g'(x)| \leq r < 1$  (όπου  $|g'(x)| = dg(x)/dx$ ), τότε η ακολουθία που προκύπτει με  $x_0 \in I$  συγκλίνει και δίνει τη ρίζα  $r$  στο όριο  $n \rightarrow \infty$ . Επιπλέον, αυτή είναι μοναδική ρίζα της  $f(x)$  στο διάστημα  $I$ .

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν  $x_n \in I$ , τότε

$$x_{n+1} - r = g(x_n) - g(r) = \frac{g(x_n) - g(r)}{x_n - r} (x_n - r) = g'(\xi_n)(x_n - r)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα μέσης τιμής και  $\xi_n$  είναι μια μέση τιμή στο διάστημα  $(x_n, r)$ .

Επειδή  $|g'(x_n)| \leq r < 1$ ,

$$|x_{n+1} - r| \leq r|x_n - r| < |x_n - r|$$

μετά από  $n$  βήματα

$$|x_n - r| \leq r^n |x_0 - r| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - r| = 0$$

Τέλος, αν  $r'$  μια άλλη ρίζα, τότε

$$r - r' = \frac{g(r) - g(r')}{r - r'} (r - r') = g'(\xi)(r - r')$$

Επομένως επειδή  $|g'(\xi)| \leq r < 1$  οδηγούμαστε στο συμπέρασμα

$$|r - r'| \leq r|r - r'| < |r - r'| \quad \textbf{αδύνατο}$$

Αρα η  $r$  είναι η μοναδική ρίζα στο διάστημα  $I$ .

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Μια προφανής γραφή της σχέσης 1.4, για να χρησιμοποιηθεί για την παρούσα μέθοδο, είναι:

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{12k}{F} \left[ \left( 1 + \frac{x_n}{12} \right)^N - 1 \right]$$

Δυστυχώς όμως, αυτή η αναδρομική σχέση δε συγκλίνει, διότι  $|g'(x)| > 1$  για τιμές του  $x \in [0.05, 0.15]$ , δηλαδή στην περιοχή της ρίζας.

Μια άλλη γραφή όμως, στη μορφή

$$x_{n+1} = g_1(x_n) = 12 \left[ \left( \frac{x_n F}{12k} - 1 \right)^{\frac{1}{N}} - 1 \right]$$

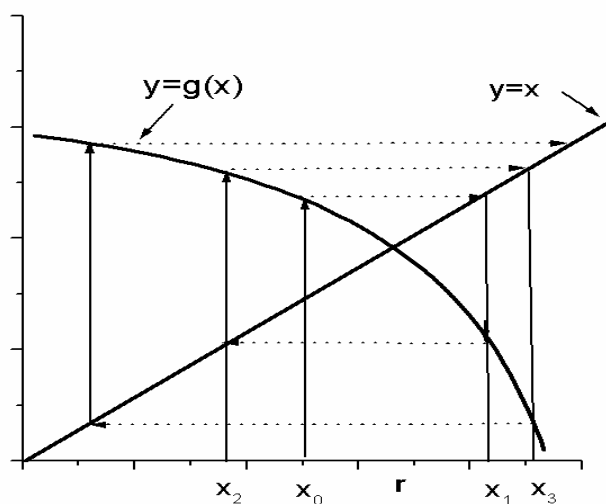
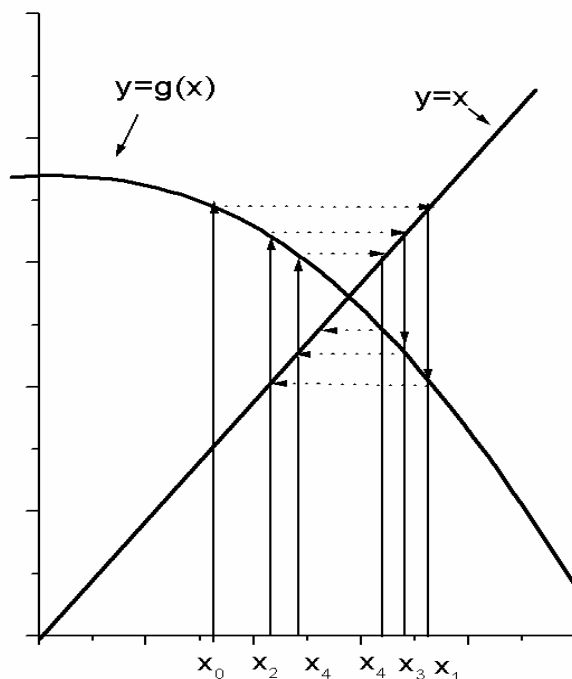
συγκλίνει (αλλά αργά) διότι  $|g_1'(x)| < 1$  (π.χ. για  $x = 0.1$ ,  $g_1'(x) \approx 0.108$ ), βλ. Πίνακα 1.2.

επαναλήψεις	$x_n$	$(x_n - r)/r$
1	0.1	
2	0.1043	-0.157
3	0.1080	-0.1275
4	0.1111	-0.1028
5	0.1136	-0.0825
...	...	
29	0.12376	-0.000135

Πίνακας 1.2

### ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Στα παρακάτω σχήματα 1.3 και 1.4 είναι προφανής η διαδικασία σύγκλισης της μεθόδου. Για το σχήμα 1.3 έχει επιλεγεί  $|g'(x)| < 1$  ενώ για το σχήμα 1.4 είναι  $|g'(x)| > 1$ .



**ΣΧΗΜΑΤΑ 1.3 και 1.4** Γραφική απεικόνιση της διαδικασίας που αναπτύχθηκε για τη μέθοδο  $y=g(x)$  με  $|g'(x)| < 1$  (1.3) και  $|g'(x)| > 1$  (1.4).

## ΣΦΑΛΜΑ

Μετά από  $n$  βήματα το σφάλμα θα είναι  $\varepsilon_n = r - x_n$ , οπότε:

$$\varepsilon_{n+1} = r - x_{n+1} = g(r) - g(x_n) = g'(\xi)(r - x_n) = g'(\xi)\varepsilon_n$$

Αν η  $\underline{g'(\xi)}$  μεταβάλλεται ΑΡΓΑ, τότε  $y'(\xi) = g'(r)$ .

Δηλαδή το ο ρυθμός ελλάττωσης του σφάλματος σε κάθε βήμα είναι γραμμικός και δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{e_{n+1} = g'(r)e_n}$$

Επομένως επιδίωξή μας θα είναι η δημιουργία μιας τέτοιας αναδρομικής σχέσης για την οποία η παράγωγος  $g'(x)$  να είναι κατά το δυνατόν μικρότερη.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να εφαρμοσθεί η μέθοδος για την εύρεση μιας ρίζας της εξίσωσης  $f(x) = x + \ln(x) = 0$  στο διάστημα  $[0.1, 1]$ .

Δοκιμάζουμε διάφορες γραφές της εξίσωσης:

**α.**  $x_{n+1} = -\ln(x_n)$

Αλλά  $|g'(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| \geq 1$  στο διάστημα  $[0.1, 1]$

**ΟΠΟΤΕ ΔΕΝ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ**

**β.**  $x_{n+1} = e^{-x_n}$  οπότε

$$|g'(x)| = |e^{-x}| \leq e^{-0.1} \approx 0.9 < 1 \quad \text{ΑΡΑ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ}$$

Αλλές δυνατές γραφές είναι οι εξής:

**γ.**  $x = \frac{x + e^{-x}}{2} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{1}{2}|1 - e^{-x}| \leq \frac{1}{2}|1 - e^{-1}| = 0.316$

**ΑΡΑ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ**

**δ.**  $x = \frac{x + 2e^{-x}}{3} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{1}{3}|1 - 2e^{-x}| \leq \frac{1}{3}|1 - 2e^{-1}| = 0.03$

**ΑΡΑ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ**

Προφανώς θα επιλέξουμε την τελευταία γραφή και η αναδρομική σχέση θα είναι:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2e^{-x_n}}{3}$$

## 1.5 ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΑΙΤΚΕΝ

Όταν η σύγκλιση μιας μεθόδου είναι γραμμική, όπως στην προηγούμενη μέθοδο, όπου είχαμε  $\varepsilon_{n+1} = g'(r)\varepsilon_n$ , τότε, για  $n \rightarrow \infty$ , η μέθοδος είναι δυνατόν να επεκταθεί, για να επιτύχουμε ακριβέστερο αποτέλεσμα χωρίς επιπλέον πράξεις.

Το σφάλμα μετά από  $n$  εφαρμογές της σχέσης  $x_{n+1} = g'(x_n)$  είναι:

$$r - x_{n+1} \approx g'(r)(r - x_n)$$

και μετά από  $n+1$  εφαρμογές είναι:

$$r - x_{n+2} \approx g'(r)(r - x_{n+1})$$

οπότε διαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε ότι

$$\frac{r - x_{n+1}}{r - x_{n+2}} = \frac{g'(r)(r - x_n)}{g'(r)(r - x_{n+1})}$$

και λύνοντας ως προς  $r$  βρίσκουμε:

$$r = x_{n+2} - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως “**βελτίωση του Aitken**”.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν στα αποτελέσματα του πίνακα 2 της μεθόδου  $x = g(x)$  χρησιμοποιήσουμε ως  $x_0 = 0.1080, x_1 = 0.1111, x_2 = 0.1136$ , τότε η βελτίωση Aitken δίνει  $r = 0.1240$  με σχετικό σφάλμα  $0.00024$ . Χωρίς τη βελτίωση Aitken, η ακρίβεια αυτή επιτυγχάνεται μόνο μετά από 25 εφαρμογές της μεθόδου  $x = g(x)$ .

## 1.6 ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON – RAPHSON

Αν στην περιοχή μιας ρίζας  $r$  της συνάρτησης  $f(x)$  η  $f'(x)$  και η  $f''(x)$  είναι συνεχείς, τότε μπορούμε να αναπτύξουμε αλγορίθμους, οι οποίοι συγκλίνουν στη ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  ταχύτερα από όλες τις μεθόδους που εξετάσαμε ως τώρα.

Η μέθοδος Newton-Raphson είναι ευρύτατα διαδεδομένη και η δημοφιλέστερη από όλες τις προηγούμενες μεθόδους.

Έστω ένα σημείο  $x_0$ , το οποίο θεωρούμε ως την πρώτη προσέγγιση στη ρίζα. Παίρνοντας την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$  προσδιορίζουμε ένα νέο σημείο  $x_1$  από την τομή της εφαπτομένης με τον άξονα  $x$  (άρα  $f(x_1) = 0$ ). Οπότε, από το ορθογώνιο τρίγωνο  $x_1 x_0 A$ , βρίσκουμε

$$\varepsilon\phi\vartheta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

το οποίο οδηγεί στην αναδρομική σχέση:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{Εξ. 1.8}$$

Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί για το  $x_1$  κοκ.

επαναλήψεις	$x_0$	$x_1$	$f(x_1)$
1	0.15	0.1247	-132.475
2	0.1247	0.1237810	-0.01681
3	0.12378	0.1237798	-0.00101

**Πίνακας 1.3** Εφαρμογή της μεθόδου Newton-Raphson για το λογιστικό πρόβλημα

Ας προσπαθήσουμε τώρα να δημιουργήσουμε τη σχέση 1.8 με πιο αυστηρό τρόπο. Ας υποθέσουμε ότι  $x_{n+1}$  είναι η ακριβής λύση της εξίσωσης και μια τιμή  $x_n$  βρίσκεται σχετικά κοντά στην  $x_{n+1}$  και έστω  $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$ . Τότε:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n + \varepsilon_n) = f(x_n) + \varepsilon_n f'(x_n) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(x_n) + \dots$$

Αλλά, επειδή υποθέσαμε ότι η  $x_{n+1}$  είναι ρίζα της  $f(x)$ , θα ισχύει  $f(x_{n+1}) = 0$ , και έτσι αναγόμεντες στη σχέση

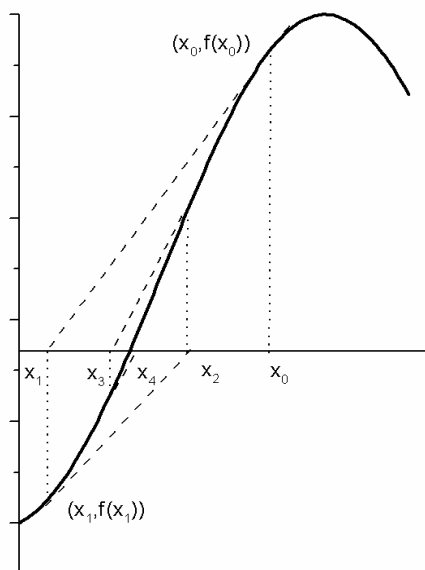
$$0 = f(x_n) + \varepsilon_n f'(x_n) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n)$$

οπότε καταλήγουμε στην αναδρομική σχέση:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

### **ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ**

Η γραφική παράσταση στο **Σχήμα 1.5** δείχνει τον τρόπο λειτουργίας της μεθόδου.



**ΣΧΗΜΑ 1.5** Γραφική απεικόνιση της διαδικασίας που αναπτύχθηκε για τη μέθοδο Newton-Raphson.

### **ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ**

Έστω  $\xi$  η ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ . Τότε  $x_n = \xi + \varepsilon_n$  και  $x_{n+1} = \xi + \varepsilon_{n+1}$ , οπότε:

$$\xi + \varepsilon_{n+1} = \xi + \varepsilon_n - \frac{f(\xi + \varepsilon_n)}{f'(\xi + \varepsilon_n)} = \xi + \varepsilon_n - \frac{f(\xi) + \varepsilon_n f'(\xi) + \frac{1}{2} \varepsilon_n^2 f''(\xi)}{f'(\xi) + \varepsilon_n f''(\xi)}$$

Επειδή όμως  $f(\xi) = 0$  και  $\frac{1}{1 + \varepsilon_n \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}} = 1 - \varepsilon_n \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$ , καταλήγουμε στη σχέση

$$\varepsilon_{n+1} = - \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \cdot \varepsilon_n^2$$

Όπως παρατηρείτε, η σύγκλιση της μεθόδου είναι “τετραγωνική”, καλύτερη από κάθε άλλη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε ως τώρα.

### **ΚΡΙΤΙΚΗ:**

Η μέθοδος Newton-Raphson είναι η απλούστερη από όλες τις άλλες μεθόδους και συνίσταται η χρήση της όταν είναι δυνατό να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης.

Γενικά τα αξίζει να θυμόμαστε ότι:

- |     |   |
|-----|---|
| I   | ΕΧΕΙ ΓΡΗΓΟΡΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ                         |
| II  | ΑΠΑΙΤΕΙ ΓΝΩΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ    |
| III | ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ |

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**

Εύρεση τετραγωνικής ρίζας αριθμού

Αν

$$f(x) = x^2 - a \quad f'(x) = 2x$$

τότε αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση Newton-Raphson καταλήγω στην αναδρομική σχέση:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

ή καλύτερα

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

### **ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ**

#### **ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ NEWTON – RAPHSOΝ**

```
COMPUTE f(x1), f'(x1)

SET x2 = x1

IF (f(x1) ≠ 0) AND (f'(x1) ≠ 0)

    REPEAT
        SET x1 = x2
        SET x2 = x1 - f(x1)/f'(x1)

    UNTIL (|x1 - x2| < E) OR (|f(x2)| < E')

ENDIF
```

#### **1.6.1 ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ NEWTON – RAPHSOΝ (Μέθοδος Halley)**

Θα δοκιμάσουμε μια βελτίωση της μεθόδου Newton-Raphson προσπαθώντας να επιτύχουμε ταχύτερη σύγκλιση.

Αν  $\varepsilon = x_{n+1} - x_n$ , τότε

$$f(x_{n+1}) = f(x_n + \varepsilon) = f(x_n) + \varepsilon f'(x_n) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(x_n) + \dots$$

οπότε, αν θεωρήσουμε ότι  $f(x_{n+1}) \approx 0$ , τότε

$$f(x_n) + \varepsilon \left[ f'(x_n) + \frac{\varepsilon}{2} f''(x_n) \right] = 0$$

οπότε λύνοντας ως προς το πρώτο από τα  $\varepsilon$  στην παραπάνω σχέση

$$\varepsilon = - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{\varepsilon}{2} f''(x_n)}$$

και αντικαθιστώντας από την 1ης τάξης Newton – Raphson που αναπτύξαμε προηγουμένως το δεύτερο  $\varepsilon$  δηλαδή:

$$\varepsilon \approx - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

καταλήγουμε στη σχέση:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{f''(x_n) \cdot f(x_n)}{2f'(x_n)}} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n) - f''(x_n) \cdot f(x_n)}$$

Η μέθοδος αυτή αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως **μέθοδος του Halley**.

### ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Η σύγκλιση της μεθόδου Halley είναι εντυπωσιακή και επιτυγχάνει “κυβική” σύγκλιση (να αποδειχθεί ως άσκηση).

$$\varepsilon_{n+1} = - \left[ \frac{1}{6} \frac{f'''(\xi)}{f'(\xi)} - \frac{1}{4} \left( \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \right)^2 \right] \cdot \varepsilon_n^3$$

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**

Να αποδείξετε ότι η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού  $a$  δίνεται από τη σχέση

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3x_n a}{3x_n^2 + a}$$

Αν θέσω  $f(x) = x^2 - a$  τότε  $f'(x) = 2x$  και  $f''(x) = 2$  οπότε αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση Halley καταλήγω στη ζητούμενη αναδρομική σχέση.

Ας χρησιμοποιήσουμε τις δύο σχέσεις για να υπολογίσουμε την ρίζα του 9! Αρα θα βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = x^2 - 9 = 0$ . Ας θεωρήσουμε μία αρχική τιμή  $x_0 = 15$ , ο παρακάτω πίνακας μας δείχνει τα αποτελέσματα από τις δύο μεθόδους.

Newton-Raphson	Σφάλμα	Halley	Σφάλμα
15		15	
7.8	4.8	5.526	2.5
4.477	1.477	3.16024	0.16
3.2436	0.243	3.00011	$1.05 \times 10^{-4}$
3.0092	$9.15 \times 10^{-3}$	3.0000000	$3.24 \times 10^{-14}$
3.00001	$1.39 \times 10^{-5}$	3.0000000	0.0



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί η ρίζα της εξίσωσης  $e^x - \sin(x) = 0$  ( $r = -3.183063012$ ). Αν το αρχικό διάστημα είναι  $[-4, -3]$ , πόσες εφαρμογές της μεθόδου διχοτόμησης απαιτούνται, για να επιτύχουμε ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων (δηλαδή  $|x_n - r| < 0.00005$ );
2. Υπολογίστε το σημείο τομής των καμπυλών  $y = e^x$  και  $y = 2x + 1$  με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων με τη μέθοδο της διχοτόμησης.
3. Εφαρμόστε τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής στη λύση του προβλήματος 1. Πόσες επαναλήψεις απαιτούνται για την επίτευξη της ακρίβειας των τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων;
4. Επαναλάβετε την άσκηση 2 με τη χρήση γραμμικής παρεμβολής.
5. Εφαρμόστε τη μέθοδο Muller στις ασκήσεις 1 και 2.
6. Βρείτε τις τρεις ρίζες της  $e^x - 2x^2 = 0$ , με κατάλληλη χρήση της μεθόδου  $x = g(x)$ .
7. Να βρεθούν οι ρίζες της  $3x - \sin(x) - e^x$  με τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής και τη μέθοδο Newton-Raphson.
8. Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - 2x - 3 = 0$  (προφανώς είναι 3 και -1) δοκιμάσετε τις κατάλληλες γραφές για να επιτύχεται σύγκλιση.
9. Εφαρμόστε τη μέθοδο Newton-Raphson στις ασκήσεις 1 και 2.
10. Να βρεθεί η n-οστή ρίζα ενός αριθμού (αναδρομική σχέση)
11. Να βρεθεί η 3η ρίζα ενός αριθμού
12. Να βρεθεί η ιδιοτιμή  $\lambda$  της εξίσωσης  $y'' + \lambda y = 0$  με οριακές συνθήκες  $y(0) = 0$  και  $y(1) = y'(1)$ .
13. Γνωρίζουμε ότι αν η  $f(x)$  έχει διπλή ρίζα στο  $x = r$  τότε  $f'(r) = 0$ . Επίσης αν η  $f(x)$  έχει μια ρίζα με πολλαπλότητα  $m$  στο  $x = r$  τότε  $f^{(i)} = 0$ , για  $i = 1, 2, \dots, m-1$ . Με βάση τα προηγούμενα να δείχθει ότι αν  $f(x)$ ,  $f'(x)$  και  $f''(x)$  είναι συνεχείς και φραγμένες σ'ένα διάστημα που περιέχει μια ρίζα πολλαπλότητας  $m$  δηλαδή είναι  $f(r) = f'(r) = \dots = f^{(m-1)}(r) = 0$  αλλά  $f^{(m)}(r) \neq 0$  τότε η 
$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
 συγκλίνει τετραγωνικά.
14. Να βρεθεί ο αντιστροφος ενός αριθμού χωρίς χρήση διαίρεσης.
15. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο  $x = g(x)$  να βρεθεί μια ρίζα του πολυωνύμου  $2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = 0$  κοντά στο 1. Χρησιμοποιείτε τουλάχιστον δυο διαφορετικές αναδιατάξεις του πολυωνύμου και συγκρίνετε το αποτέλεσμα. Τέλος χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Aitken για τη βελτίωση του τελικού αποτελέσματος.
16. Να βρεθεί αριθμητικά η τιμή του  $1/\sqrt{a}$
17. Η  $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$  έχει τρεις ρίζες. Αν γραφεί στη μορφή  $x = \pm\sqrt{e^x/3}$  να βρεθούν οι ρίζες της, όσες είναι δυνατόν, και αν δεν μπορεί να βρεθεί κάποια με αυτό το σχήμα τότε δοκιμάστε εναλλακτικά σχήματα.

## 1.7 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Οι τεχνικές που αναπτύξαμε στις προηγούμενες ενότητες αυτού του Κεφαλαίου για τη λύση μη-γραμμικών εξισώσεων μπορούν να εφαρμοστούν και στη λύση συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων. Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε δύο μεθόδους για την αριθμητική επίλυση συστημάτων που βασίζονται στη λογική της μεθόδου Newton-Raphson και της μεθόδου  $x = g(x)$ .

Ένα παράδειγμα συστήματος μη-γραμμικών εξισώσεων είναι το εξής. Έστω δύο συναρτήσεις:

$$f(x, y) = e^x - 3y - 1$$

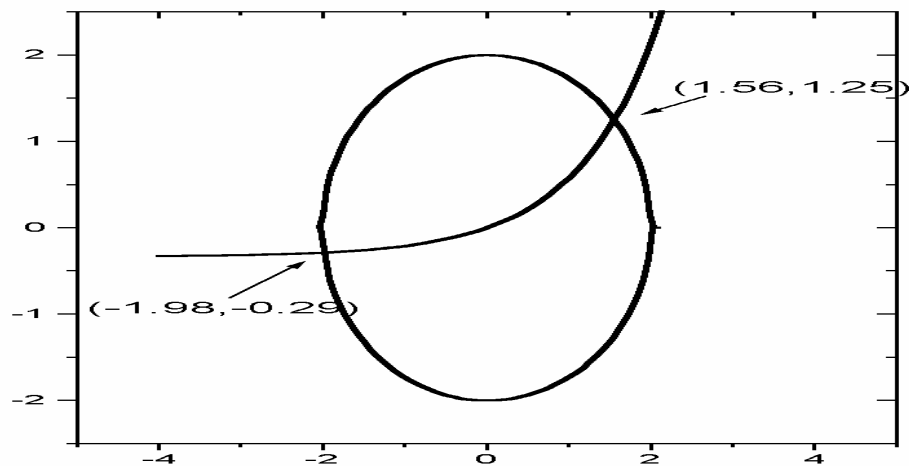
$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$$

Ζητούμε τα πιθανά σημεία για τα οποία ταυτοχρόνως ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$f(x, y) = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

Προφανώς οι εξισώσεις  $f(x, y) = 0$  και  $g(x, y) = 0$  ορίζουν καμπύλες στο επίπεδο  $xy$  και η τομή τους είναι η ζητούμενη λύση του παραπάνω συστήματος (βλ. Σχήμα 1.6).



**ΣΧΗΜΑ 1.6** Γραφική απεικόνιση των λύσεων ενός μη-γραμμικού συστήματος.

### 1.7.1 ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON

## Συστήματα 2 εξισώσεων

Έστω το σύστημα

$$f(x, y) = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

Εάν εφαρμόσουμε μια επαναληπτική διαδικασία που συγκλίνει σε μια από τις πιθανές λύσεις του συστήματος, τότε μετά από  $n + 1$  επαναλήψεις το σημείο  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  μπορεί να θεωρηθεί ότι

προσεγγίζει ικανοποιητικά σε μία λύση του συστήματος, δηλαδή  $f(x_{n+1}, y_{n+1}) \cong 0$  και

$g(x_{n+1}, y_{n+1}) \cong 0$ . Εάν θεωρήσουμε ότι στο προηγούμενο βήμα  $(x_n, y_n)$  το σφάλμα προσέγγισης της

λύσης είναι τέτοιο ώστε  $x_{n+1} = x_n + \varepsilon$  και  $y_{n+1} = y_n + \delta$ , τότε αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor γύρω από τη λύση, βρίσκουμε:

$$0 \cong f(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n + \varepsilon, y_n + \delta) \cong f(x_n, y_n) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x} + \delta \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$0 \cong g(x_{n+1}, y_{n+1}) = g(x_n + \varepsilon, y_n + \delta) \cong g(x_n, y_n) + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x} + \delta \frac{\partial g}{\partial y}$$

και λύνοντας το παραπάνω σύστημα ως προς τα  $\varepsilon$  και  $\delta$  καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\varepsilon = \frac{-f \frac{\partial g}{\partial y} + g \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}} \quad \delta = \frac{-g \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}}$$

Από τον ορισμό των  $\varepsilon$  και  $\delta$ , καταλήγω στις παρακάτω σχέσεις που αποτελούν γενίκευση της μεθόδου Newton-Raphson για συστήματα 2 μη-γραμμικών εξισώσεων:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f \cdot g_y - g \cdot f_y}{f_x \cdot g_y - g_x \cdot f_y} \\ y_{n+1} &= y_n - \frac{g \cdot f_x - f \cdot g_x}{f_x \cdot g_y - g_x \cdot f_y} \end{aligned}}$$

### Συστήματα $N$ εξισώσεων

Η παραπάνω μέθοδος μπορεί εύκολα να γενικευθεί και για συστήματα  $N$  εξισώσεων:

$$f_1(x^1, x^2, \dots, x^N) = 0$$

$$f_2(x^1, x^2, \dots, x^N) = 0$$

...

$$f_n(x^1, x^2, \dots, x^N) = 0$$

με  $N$  αγνώστους  $(x^1, x^2, \dots, x^N)$ . Αν θεωρήσουμε ότι οι τιμές  $(x_{n+1}^1, x_{n+1}^2, \dots, x_{n+1}^N)$  προσεγγίζουν ικανοποιητικά μια πιθανή λύση του συστήματος, τότε με βάση τα προηγούμενα θα υπάρχει μια  $N$ -αδα τιμών  $(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N)$  για τις οποίες θα ισχύουν οι σχέσεις

$$x_{n+1}^1 = x_n^1 + \Delta x_n^1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$x_{n+1}^N = x_n^N + \Delta x_n^N$$

Αρα μπορούμε να θεωρήσουμε αναπτύγματα της μορφής:

$$0 \cong f_1(x_{n+1}^1, \dots, x_{n+1}^N) = f_1(x_n^1 + \Delta x_n^1, \dots, x_n^N + \Delta x_n^N) \cong f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x^1} \Delta x_n^1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x^N} \Delta x_n^N$$

....

$$0 \cong f_N(x_{n+1}^1, \dots, x_{n+1}^N) = f_N(x_n^1 + \Delta x_n^1, \dots, x_n^N + \Delta x_n^N) \cong f_N + \frac{\partial f_N}{\partial x^1} \Delta x_n^1 + \dots + \frac{\partial f_N}{\partial x^N} \Delta x_n^N$$

Οπότε, τα  $\Delta x_n^i$  (όπου  $i = 1 \dots N$ ) θα υπολογισθούν από τη λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \frac{\partial f_1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^N} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x^1} & \frac{\partial f_N}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x^N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_n^1 \\ \vdots \\ \Delta x_n^N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

με αγνώστους τις  $N$  τιμές  $\Delta x_n^i$ .

Άρα, εάν ξεκινήσουμε με μια  $N$ -άδα αρχικών τιμών  $(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^N)$ , τότε από τη λύση του παραπάνω συστήματος θα υπολογίσουμε μια νέα  $N$ -άδα τιμών  $(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^N)$  από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_0^1 + \Delta x_0^1 \\ \vdots & \\ x_1^N &= x_0^N + \Delta x_0^N \end{aligned}$$

Εφ' όσον συγκλίνει, η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές απαιτείται ώστε να επιτευχθεί η ζητούμενη ακρίβεια, για παράδειγμα έως ότου  $\max |\Delta x_n^i| < E$  όπου  $E$  μια δοθείσα επιθυμητή ακρίβεια.

### **1.7.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΥΠΟΥ $x = g(x)$**

Αποτελεί επέκταση της μεθόδου που μελετήσαμε στην ενότητα 1.4.

Έστω το σύστημα των  $N$  εξισώσεων

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0 \\ \vdots & \\ f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0 \end{aligned}$$

Εάν είναι δυνατόν το σύστημα να γραφεί στη μορφή:

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \dots & \\ x_N &= F_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{aligned}$$

τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε για τη μέθοδο  $x = g(x)$ . Υπάρχουν δύο διαδικασίες για την εύρεση λύσεων του συστήματος:

#### **Α' ΜΕΘΟΔΟΣ**

Στο αρχικό βήμα, δίνω  $N$  αρχικές τιμές  $(x_1, \dots, x_N)_0$  στο δεξιό μέλος όλων των εξισώσεων συγχρόνως και υπολογίζω μια νέα  $N$ -άδα τιμών  $(x_1, \dots, x_N)_1$  από το αριστερό μέλος των εξισώσεων. Επαναλαμβάνω τη διαδικασία για τη νέα  $N$ -άδα τιμών και υπολογίζω μια καλύτερη προσέγγιση της λύσης κ.ο.κ.

## Β' ΜΕΘΟΔΟΣ

Δίνω  $N$  αρχικές τιμές  $(x_1, \dots, x_N)_0$  στο δεξιό μέλος της πρώτης εξίσωσης μόνο και υπολογίζω (από το αριστερό της μέλος) τη νέα τιμή  $(x_1)_1$ . Στη συνέχεια, στο δεξιό μέλος της δεύτερης εξίσωσης δίνω τις τιμές  $(x_1)_1, (x_2, \dots, x_N)_0$  και υπολογίζω τη νέα τιμή  $(x_2)_1$ . Στη τρίτη εξίσωση δίνω  $(x_1, x_2)_1, (x_3, \dots, x_N)_0$  κ.ο.κ.

### ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Το σύστημα  $x_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$  με  $i = 1, \dots, N$  θα συγκλίνει σε μια περιοχική γύρω από μια λύση, αν ικανοποιούνται τα κριτήρια σύγκλισης

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \right| &< 1 \\ \vdots \\ \left| \frac{\partial f_N}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial f_N}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \right| &< 1 \end{aligned}$$

Τα κριτήρια αυτά αποτελούν επέκταση του κριτηρίου που ισχύει για τη σύγκλιση στη ρίζα μίας μη-γραμμικής εξίσωσης, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο  $x = g(x)$ . Είναι προφανές, πόσο σύνθετη γίνεται πλέον η μελέτη της σύγκλισης με αυτή τη μέθοδο, στην περίπτωση ενός συστήματος εξισώσεων.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εστω το σύστημα

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$e^x - 3y = 1$$

του οποίου οι ακριβείς λύσεις είναι (1.5595, 1.2522) και (-1.9793, -0.2873) (σχήμα 1.6). Το σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$x_{n+1} = -\sqrt{4 - y_n^2}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}(e^{x_n} - 1)$$

(όπου επιλέξαμε το πρόσημο - στην πρώτη εξίσωση). Αν χρησιμοποιήσουμε την πρώτη μέθοδο, με αρχικές τιμές (-1, 0), δημιουργούμε την παρακάτω ακολουθία σημείων:

n	0	1	2	3	4	5
x	-1	-2	-1.9884	-1.9791	-1.9792	-1.9793
y	0	-0.2107	-0.2882	-0.2877	-0.2873	-0.2873

η οποία μετά από 5 επαναλήψεις έχει προσεγγίσει ικανοποιητικά τη μία από τις ρίζες της εξίσωσης.

Αν χρησιμοποιήσω τη δεύτερη μέθοδο, τότε

n	0	1	2	3
x	-1	-2	-1.9791	-1.9793
y	0	-0.2882	-0.2873	-0.2873

Δηλαδή, για το συγκεκριμένο σύστημα, ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτείται για την επίτευξη της παραπάνω ακρίβειας είναι περίπου ο μισός απ' ό,τι με την πρώτη μέθοδο.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να και βρούμε τη δεύτερη λύση του συστήματος, που θα προκύψει από τη λύση του συστήματος

$$x_{n+1} = \sqrt{4 - y_n^2}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}(e^{x_n} - 1)$$

(επιλέγοντας, αυτή τη φορά, το πρόσημο + στη πρώτη εξίσωση). Ας ξεκινήσουμε από μια τιμή που είναι αρκετά κοντά στην ακριβή λύση, έστω λοιπόν  $x_0 = 1.5$  και  $y_0 = 1$ . Η ακολουθία τιμών θα είναι:

n	0	1	2	3	4	5
x	1.5	1.7321	1.2630	1.8126	1.0394	1.9050
y	1	1.5507	0.8453	1.7087	0.6092	1.9064

Παρατηρούμε ότι αποκλίνουμε από τη λύση του συστήματος, και τούτο διότι, αν εφαρμόσουμε τα κριτήρια σύγκλισης στην περιοχή της λύσης, θα παρατηρήσουμε ότι δεν ικανοποιούνται.

Αν όμως γράψουμε το σύστημα στη μορφή

$$y_{n+1} = \sqrt{4 - x_n^2}$$

$$x_{n+1} = \ln(1 + 3y_n)$$

τότε η ακολουθία τιμών που δημιουργούμε συγκλίνει (αλλά αργά) στην δεύτερη λύση του συστήματος μετά από μεγάλο αριθμό επαναλήψεων.

### **ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1. Να γίνουν δύο βήματα με τη μέθοδο Newton-Raphson για το παρακάτω σύστημα, με αρχικές τιμές (0,1):

$$4x^2 - y^2 = 0$$

$$4xy^2 - x = 1$$

2. Με αρχικές τιμές (0,0,1) να γίνει ένα βήμα με τη μέθοδο Newton-Raphson για το σύστημα

$$xy - z^2 = 1$$

$$xyz - x^2 + y^2 = 2$$

$$e^x - e^y + z = 3$$

Να εξηγηθεί το αποτέλεσμα.

3. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα με χρήση και των δύο προαναφερθέντων μεθόδων.

**A.**

$$e^x - y = 0$$

$$xy - e^x = 0$$

**B.**

$$xyz - x^2 + y^2 = 1.34$$

$$xy - z^2 = 0.09$$

$$e^x - e^y + z = 0.41$$

**Γ.**

$$x^3 - y = 0$$

$$x^2 + y^3 = 1$$

## Κεφάλαιο 2

## ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η λύση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων απαντάται σε μια πλειάδα προβλημάτων κάθε επιστημονικού κλάδου. Σε πολλές περιπτώσεις, χρειάζεται να λύσει κανείς γραμμικά συστήματα πολύ μεγάλου μεγέθους, π.χ.  $10,000 \times 10,000$  συντελεστών. Η λύση ενός τέτοιου συστήματος απαιτεί ένα πολύ μεγάλο αριθμό πράξεων. Ακόμη και με τη χρήση γρήγορου υπολογιστή, η λύση μπορεί να είναι χρονοβόρα και να απαιτεί μεγάλη υπολογιστική μνήμη. Επίσης, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των βημάτων, τόσο αυξάνει το συνολικό σφάλμα στρογγύλευσης των αριθμητικών πράξεων στη μνήμη του υπολογιστή.

Οι μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες: στις άμεσες μεθόδους και στις επαναληπτικές μεθόδους. Οι άμεσες μέθοδοι μπορούν να οδηγήσουν σε ακριβή λύση του συστήματος, ενώ οι επαναληπτικές μέθοδοι ξεκινούν με κάποια αρχική εκτίμηση της λύσης και βελτιώνουν την εκτίμηση μέχρι κάποια επιθυμητή ακρίβεια. Για πολύ μεγάλα γραμμικά συστήματα, οι επαναληπτικές μέθοδοι είναι ασύγκριτα πιο γρήγορες απ' ό,τι οι άμεσες μέθοδοι. Για ορισμένους τύπους γραμμικών συστημάτων π.χ. για συστήματα που ανάγονται σε συμμετρικό πίνακα ή σε πίνακα με διαγώνια δομή, έχουν αναπτυχθεί ειδικές μέθοδοι που επιτυγχάνουν την επίλυση του συστήματος με λιγότερες πράξεις απ' ό,τι με τη χρήση γενικών μεθόδων.

Τα προβλήματα που συνήθως πρέπει να λύσουμε είναι:

I. Να λυθεί το σύστημα:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}$ , όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \cdots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{12} & & & \alpha_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{1N} & \cdots & \cdots & \alpha_{NN} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

II. Να βρεθεί ο  $\mathbf{A}^{-1}$  (αντίστροφος πίνακας)

III. Να βρεθεί η ορίζουσα του  $\mathbf{A}$

IV. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του  $\mathbf{A}$

### 2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε μια βασική μέθοδο για την επίλυση γραμμικών συστημάτων  $N$  εξισώσεων με  $N$  αγνώστους. Το βασικό βήμα είναι η μετατροπή του συστήματος σε ένα άνω-τριγωνικό σύστημα οπότε στη συνέχεια η διαδικασία υπολογισμού των λύσεων είναι απλή.

Υπενθυμίζουμε ότι στα γραμμικά συστήματα επιτρέπονται οι παρακάτω πράξεις που δεν αλλοιώνουν τις λύσεις του αρχικού συστήματος.

- Αλλαγή της σειράς δύο εξισώσεων
- Πολλαπλασιασμός μιας εξίσωσης με μία μη-μηδενική σταθερά
- Μια εξίσωση μπορεί να αντικατασταθεί από το άθροισμα αυτής της εξίσωσης και ένα πολλαπλάσιο κάποιας από τις υπόλοιπες.

Έστω το σύστημα  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}$  με  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1N}x_N &= b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2N}x_N &= b_2 \\ &\vdots \\ \alpha_{N1}x_1 + \alpha_{N2}x_2 + \alpha_{N3}x_3 + \dots + \alpha_{NN}x_N &= b_N \end{aligned} \quad (\text{I})$$

### **ΒΗΜΑ 1ο**

Πολλαπλασιάζω την πρώτη εξίσωση με  $a_{21}/a_{11}$  και την αφαιρώ από τη δεύτερη εξίσωση. Ομοίως, πολλαπλασιάζω την πρώτη με  $a_{31}/a_{11}$  και την αφαιρώ από την τρίτη κ.ο.κ., οπότε λαμβάνω:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \cdots + \alpha_{1N}x_N & = & b_1 \\ 0 + \alpha_{22}^{(1)}x_2 + \alpha_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + \alpha_{2N}^{(1)}x_N & = & b_2^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 + \alpha_{N2}^{(1)}x_2 + \alpha_{N3}^{(1)}x_3 + \cdots + \alpha_{NN}^{(1)}x_N & = & b_N^{(1)} \end{array} \quad (\text{II})$$

όπου, για παράδειγμα, είναι  $\alpha_{22}^{(1)} = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} - a_{22}$ .

### **ΒΗΜΑ 2ο**

Η πρώτη γραμμή και η πρώτη στήλη παραμένουν οπότε πολλαπλασιάζω αντίστοιχα τη δεύτερη εξίσωση με  $\alpha_{32}^{(1)}/\alpha_{22}^{(1)}$  και την αφαιρώ από την τρίτη εξίσωση κ.ο.κ., οπότε

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \cdots + \alpha_{1N}x_N & = & b_1 \\ 0 + \alpha_{22}^{(1)}x_2 + \alpha_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + \alpha_{2N}^{(1)}x_N & = & b_2^{(1)} \\ 0 + 0 + \alpha_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + \alpha_{3N}^{(2)}x_N & = & b_3^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 + 0 + \alpha_{N3}^{(2)}x_3 + \cdots + \alpha_{NN}^{(2)}x_N & = & b_N^{(2)} \end{array} \quad (\text{III})$$

Αντίστοιχα, για παράδειγμα, είναι  $\alpha_{33}^{(2)} = \frac{\alpha_{32}^{(1)}\alpha_{23}^{(1)}}{\alpha_{22}^{(1)}} - \alpha_{33}^{(1)}$ .

Μετά από  $N-1$  βήματα καταλήγω στο σύστημα

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \cdots + \alpha_{1N}x_N & = & b_1 \\ \alpha_{22}^{(1)}x_2 + \alpha_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + \alpha_{2N}^{(1)}x_N & = & b_2^{(1)} \\ \alpha_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + \alpha_{3N}^{(2)}x_N & = & b_3^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{NN}^{(N-1)}x_N & = & b_N^{(N-1)} \end{array} \quad (\text{IV})$$

Το σύστημα (IV) είναι τριγωνικό και η λύση του μπορεί να δοθεί από τις παρακάτω σχέσεις. Προφανώς για τον  $N$ -οστό όρο ισχύει:

$$\boxed{x_N = b_N^{(N-1)} / \alpha_{NN}^{(N-1)}}$$

ενώ και για τους υπόλοιπους όρους:

$$\boxed{x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{k=i+1}^N \alpha_{ik}^{(i-1)} x_k}{\alpha_{ii}^{(i-1)}}}$$



## ΟΔΗΓΗΣΗ (PIVOTING)

Για τη βελτίωση της ακρίβειας των υπολογισμών φροντίζουμε στο σύστημα (I) το  $a_{11}$  να είναι το απολύτως μεγαλύτερο στοιχείο. Αντίστοιχα, στο σύστημα (II) το  $a_{22}^{(1)}$  πρέπει να είναι το απολύτως μεγαλύτερο στοιχείο κ.ο.κ.

Το pivoting μας προφυλάσσει και από μια πιθανή παθολογική συμπεριφορά της μεθόδου Gauss. Η παθολογική συμπεριφορά οφείλεται στην ιδιότητα της μεθόδου Gauss σύμφωνα με την οποία διαιρούμε σε κάθε βήμα με το στοιχείο  $a_{NN}$ , επομένως, αν κάποιο από αυτά τα διαγώνια στοιχεία είναι μηδέν ή γενικά ένας πολύ μικρός αριθμός, η ακρίβεια της μεθόδου είναι πολύ κακή. Με το pivoting αποφεύγουμε τέτοιες παθολογικές καταστάσεις.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εστω ότι, μετά από τη χρήση της μεθόδου Gauss στη λύση ενός  $N \times N$  συστήματος, οι δυο τελευταίες εξισώσεις, η  $N-1$  και η  $N$  είναι:

$$0x_{N-1} + x_N = 1$$

$$2x_{N-1} + x_N = 3$$

Προφανώς, έχουν λύση:  $x_{N-1} = x_N = 1$ . Αλλά, λόγω σφαλμάτων αποκοπής, το σύστημα θα είναι:

$$\varepsilon x_{N-1} + x_N = 1$$

$$2x_{N-1} + x_N = 3$$

οπότε συνεχίζοντας στο τελευταίο βήμα θα πάρουμε:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon x_{N-1} + x_N &= 1 \\ \left(1 - \frac{2}{\varepsilon}\right) x_N &= 3 - \frac{2}{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_N &= \frac{3 - \frac{2}{\varepsilon}}{1 - \frac{2}{\varepsilon}} \sim 1 & (\text{σωστό}) \\ x_{N-1} &= \frac{1 - x_N}{\varepsilon} & !!! \end{aligned}$$

Παρατηρούμε δηλαδή, πως το  $x_{N-1}$  είναι απροσδιόριστο, γιατί αποτελεί το λόγο δυο μικρών αριθμών, των οποίων η ακρίβεια εξαρτάται από την ακρίβεια με την οποία εκτελεί τις πράξεις ο Η/Υ.

Στη συνέχεια, ο όρος  $x_{N-1}$  θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των  $x_1, \dots, x_{N-2}$  με καταστροφικά αποτελέσματα.

Όμως, αν χρησιμοποιηθεί οδήγηση, το σύστημα γράφεται:

$$\left. \begin{aligned} 2x_{N-1} + x_N &= 3 \\ \varepsilon x_{N-1} + x_N &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2x_{N-1} + x_N &= 3 \\ \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) x_N &= 1 - \frac{3\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

οπότε η λύση του είναι  $x_N \approx 1.0$  και  $x_{N-1} = \frac{3 - x_N}{2} \approx 1.0$ .

## 2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS-JORDAN

Η μέθοδος Gauss-Jordan αποτελεί παραλλαγή της μεθόδου Gauss. Η βασική της διαφορά έγκειται στο ότι το τελικό σύστημα, δεν είναι τριγωνικό αλλά πρακτικά διαγωνιοποιείται ο πίνακας **A** και η λύση του συστήματος είναι προφανής.

Η μέθοδος βασίζεται στην εξής λογική:

Σε κάθε βήμα απαλείφουμε κι έναν όρο από την πρώτη εξίσωση. Δηλαδή, στο σύστημα (II) του προηγούμενου κεφαλαίου, πολλαπλασιάζω τη δεύτερη εξίσωση με  $a_{12}/a_{22}^{(1)}$  και την αφαιρώ από την πρώτη, οπότε το σύστημα (III) γράφεται:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{11}x_1 + 0 & + \alpha_{13}^{(2)}x_3 + \dots + \alpha_{1N}^{(2)}x_N & = b_1^{(2)} \\ 0 & + \alpha_{22}^{(1)}x_2 + \alpha_{23}^{(1)}x_3 + \dots + \alpha_{2N}^{(1)}x_N & = b_2^{(1)} \\ 0 & + 0 & + \alpha_{33}^{(2)}x_3 + \dots + \alpha_{3N}^{(2)}x_N = b_3^{(2)} \\ & & \vdots \\ 0 & + 0 & + \alpha_{N3}^{(2)}x_3 + \dots + \alpha_{NN}^{(2)}x_N = b_N^{(2)} \end{array} \quad (III)'$$

στο επόμενο βήμα θα απαλειφθούν οι όροι με συντελεστές  $a_{13}^{(2)}$  και  $a_{23}^{(1)}$  κ.οκ. Οπότε τελικά μετά από η βήματα καταλήγω στο σύστημα:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{11}x_1 & & = b_1^{(N-1)} \\ & \alpha_{22}^{(1)}x_2 & = b_2^{(N-1)} \\ & & \vdots \\ & \alpha_{NN}^{(N-1)}x_N & = b_N^{(N-1)} \end{array}$$

του οποίου η λύση του δίνεται από την προφανή σχέση

$$x_i = \frac{b_i^{(N-1)}}{\alpha_{ii}^{(i-1)}}$$

## 2.3 ΜΕΘΟΔΟΣ “ L-U ”

Προηγουμένως είδαμε πόσο εύκολα μπορεί να λυθεί ένα άνω-τριγωνικό σύστημα. Εδώ θα εξετάσουμε τη διαδικασία της «παραγοντοποίησης» ενός πίνακα **A**. Κάθε πίνακας **A** μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δυο πινάκων που περιέχουν τη διαγώνιο και τα πάνω ή κάτω απ' αυτή στοιχεία του πίνακα. Για παράδειγμα:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

(lower)                      (upper)

Στόχος μας είναι ο υπολογισμός των στοιχείων των πινάκων **L** και **U**. Αυτό θα γίνει με τη λύση ενός συστήματος  $N \times N$  εξισώσεων, στη συγκεκριμένη περίπτωση ενός συστήματος 16 εξισώσεων.

Πολλαπλασιάζοντας τις γραμμές του **L** με την πρώτη στήλη του **U**, λαμβάνουμε:

$$l_{11} = a_{11} \quad l_{21} = a_{21} \quad l_{31} = a_{31} \quad l_{41} = a_{41}$$

Δηλαδή, η πρώτη στήλη του **L** είναι η ίδια με την πρώτη στήλη του **A**. Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του **L** με τις στήλες του **U**, οπότε λαμβάνουμε:

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}, \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}, \quad u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}}$$

Άρα και η πρώτη γραμμή του **U** υπολογίστηκε. Συνεχίζοντας υπολογίζουμε τη δεύτερη στήλη του **L**.

$$\left. \begin{aligned} l_{21}u_{12} + l_{22} &= a_{22} \\ l_{31}u_{12} + l_{32} &= a_{32} \\ l_{41}u_{12} + l_{42} &= a_{42} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} l_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} \\ l_{32} &= a_{32} - l_{31}u_{12} \\ l_{42} &= a_{42} - l_{41}u_{12} \end{aligned}$$

Όπως παρατηρούμε, τα  $l_{21}, l_{31}, l_{41}$  και  $u_{12}$  έχουν ήδη υπολογισθεί, επομένως και η δεύτερη στήλη του πίνακα **L** υπολογίστηκε. Με ανάλογο τρόπο, οι σχέσεις

$$\begin{aligned} u_{23} &= \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}} & l_{33} &= a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \\ u_{24} &= \frac{a_{24} - l_{21}u_{14}}{l_{22}} & l_{43} &= a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23} \\ u_{34} &= \frac{a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24}}{l_{33}} & l_{44} &= a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} \end{aligned}$$

μας δίνουν τα υπόλοιπα στοιχεία των δυο πινάκων **U** και **L**.

## ΓΕΝΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΓΙΑ “L-U” ΑΝΑΛΥΣΗ

Με βάση τα προηγούμενα οδηγούμαστε στη δημιουργία ενός «κανόνα» υπολογισμού των στοιχείων των δύο πινάκων **L** και **U**.

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad j \leq i \quad i = 1, 2, \dots, N$$
$$u_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} u_{ki}}{l_{jj}} \quad j \leq i \quad j = 2, 3, \dots, N$$

Για  $j = 1$  ο κανόνας για τα  $l_{i1}$  είναι  $l_{i1} = a_{i1}$  ενώ

για  $i = 1$  ο κανόνας για τα  $u_{1j}$  είναι  $u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$ .

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εστω ο πίνακας  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$  οπότε με βάση τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε:

$$l_{11} = 3, \quad l_{21} = 1, \quad l_{31} = 2$$
$$u_{12} = -\frac{1}{3}, \quad u_{13} = \frac{2}{3}$$
$$l_{22} = 2 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}, \quad l_{32} = -\frac{4}{3}$$
$$u_{23} = 1, \quad l_{33} = -1$$

οπότε τελικά οι ζητούμενοι πίνακες είναι:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \cancel{7/3} & 0 \\ 2 & \cancel{-4/3} & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{-1/3} & \cancel{2/3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ για τη μέθοδο LU

INPUT  $N, a_{ij}$

OUTPUT (αναμενόμενο)  $l_{ij}, u_{ij}$

#### STEP 1

$l_{11} = a_{11}$  IF  $l_{11} = 0$  STOP (Αδύνατη η εφαρμογή της LU)

#### STEP 2

FOR  $j=2, \dots, N$  SET  $u_{1j} = a_{1j} / l_{11}$  (υπολογισμός της πρώτης σειράς του U)

SET  $l_{j1} = a_{j1}$  (υπολογισμός της πρώτης στήλης του L)

#### STEP 3

FOR  $i=2, \dots, N-1$  DO STEPS 4 & 5

#### STEP 4

$$l_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki}$$

IF  $l_{ii} = 0$  STOP (αδύνατη η εφαρμογή της LU)

**STEP 5**

FOR  $j=i+1, \dots, N$

$$\text{SET } u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right) \quad (i \text{ γραμμή του } U)$$

$$\text{SET } l_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \quad (i \text{ γραμμή του } L)$$

**STEP 6**

$$\text{SET } l_{NN} = a_{NN} - \sum_{k=1}^{N-1} l_{Nk} u_{kN} \quad (\text{Αν } l_{NN} = 0 \text{ τότε } A = L \cdot U \text{ αλλά είναι singular})$$

**STEP 7**

OUTPUT  $l_{ij}, u_{ij}$

## 2.3 Εφαρμογή της “L-U” στα γραμμικά συστήματα

Με τη μέθοδο **L – U** ένα γραμμικό σύστημα της μορφής **A · x = b** ανάγεται στο σύστημα

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Λύνουμε πρώτα το κάτω-τριγωνικό σύστημα  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{b}' = \mathbf{b}$  σύμφωνα με τον κανόνα:

$$b'_1 = b_1 / l_{11}$$

$$b'_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} b'_k}{l_{ii}} \quad i = 2, 3, \dots, N$$

οπότε απομένει να λύσουμε το τριγωνικό σύστημα  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$  με τις σχέσεις που δόθηκαν στη μέθοδο Gauss, για την επίλυση τριγωνικών συστημάτων. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται όταν έχουμε να λύσουμε ένα μεγάλο αριθμό γραμμικών συστημάτων που διαφέρουν μόνο στο διάνυσμα **b**.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν το διάνυσμα **b** είναι  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$  και **A** ο πίνακας του προηγούμενου παραδείγματος, τότε το **b'** θα

είναι

$$\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b'_1 = \frac{12}{3} = 4, \quad b'_2 = \frac{11 - 1 \cdot 4}{7/3} = 3, \quad b'_3 = \dots = -2$$

Αρα καταλήγουμε ότι:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

δηλ.  $x_3 = 2, x_2 = 1, x_1 = 3$ .

## 2.4 ΜΕΘΟΔΟΣ JACOBI (Επαναληπτική)

Είναι γενίκευση της  $x = g(x)$  που έχουμε χρησιμοποιήσει για την εύρεση ριζών μη-γραμμικών εξισώσεων (κεφάλαια 1.4 και 1.7).

Έστω το σύστημα των  $N$  εξισώσεων με  $N$  αγνώστους

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$$

αυτό μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$x_1 = g_1(x_2, x_3, \dots, x_N)$$

$$x_2 = g_2(x_1, x_3, \dots, x_N)$$

.....

$$x_N = g_N(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$$

με αυτό τον τρόπο το αντιμετωπίζουμε όπως τα μη γραμμικά συστήματα του κεφαλαίου 1.7, με τη διαφορά ότι στο απουσιάζουν μη-γραμμικοί όροι. Πρακτικά κάθε μια από τις  $N$  εξισώσεις θα γραφεί στη μορφή:

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} x_j$$

και στη συνέχεια δίνοντας  $N$  “αυθαίρετες” αρχικές τιμές  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_N^{(0)}$ , δημιουργώ μια γενικευμένη αναδρομική σχέση της μορφής  $x_i^{(k+1)} = g_i(x_1^{(k)}, \dots, x_N^{(k)})$ .

Ικανή **συνθήκη σύγκλισης** είναι η:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}|$$

που αν ικανοποιείται η σύγκλιση είναι βέβαιη και ανεξάρτητη από τις αρχικές τιμές  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_N^{(0)}$ .

Σε μορφή πινάκων η αναδρομική σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)}$$

όπου  $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{C}$  δηλ. ο  $\mathbf{D}$  περιέχει τα διαγώνια στοιχεία του  $\mathbf{A}$  και ο  $\mathbf{C}$  όλα τα υπόλοιπα στοιχεία έχοντας θέσει 0 τα διαγώνια.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Από το σύστημα

$$4x - y + z = 7$$

$$4x - 8y + z = -21$$

$$-2x + y + 5z = 15$$

(που έχει λύσεις  $x = 2, y = 4, z = 3$ ) μπορώ να δημιουργήσω τις αναδρομικές σχέσεις:

$$x^{(k+1)} = \frac{7 + y^{(k)} - z^{(k)}}{4}$$

$$y^{(k+1)} = \frac{21 + 4x^{(k)} + z^{(k)}}{8}$$

$$z^{(k+1)} = \frac{15 + 2x^{(k)} - y^{(k)}}{5}$$

και θέτοντας ως αρχικές τιμές (1,2,2) παίρνω την ακολουθία τιμών

$$(1,2,2) \rightarrow (1.75, 3.375, 3) \rightarrow (1.844, 3.875, 3.025) \rightarrow (1.963, 3.925, 2.963) \\ \rightarrow (1.991, 3.977, 3.0) \rightarrow (1.994, 3.995, 3.001)$$

Δηλαδή, απαιτήθηκαν 5 συνολικά επαναλήψεις, για να βρούμε τη λύση του συστήματος με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

## 2.5 ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS – SEIDEL

Είναι βελτίωση της μεθόδου Jacobi.

Αν έχω κάποιες αρχικές τιμές για το διάνυσμα  $x_i$  έστω τις  $x_i^{(0)}$  υπολογίζω από την πρώτη εξίσωση το  $x_1^{(1)}$  και στη συνέχεια το χρησιμοποιώ στην δεύτερη εξίσωση μαζί με τα αρχικά  $(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_N^{(0)})$  για τον υπολογισμό του  $x_2^{(1)}$  και συνεχίζω και στις υπόλοιπες  $N-2$  εξισώσεις με τον ίδιο τρόπο.

Στη γενική περίπτωση για τον υπολογισμό του  $x_1$  μετά από  $k$  επαναλήψεις θα χρησιμοποιώ μια σχέση της μορφής:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left( b_1 - \sum_{j=2}^N a_{1j} x_j^{(k)} \right)$$

στη δεύτερη εξίσωση από την οποία θα υπολογίζω το  $x_2$  μετά από  $k$  επαναλήψεις αντικαθιστώ το  $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_N^{(k)})$  και υπολογίζω το  $x_2^{(k+1)}$  από τη σχέση

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left( b_2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^N a_{2j} x_j^{(k)} \right)$$

οπότε στην τρίτη εξίσωση θέτω  $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k)}, \dots, x_N^{(k)})$  κ.ο.κ.

Άρα, ο γενικός τύπος θα είναι:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Και εδώ, η συνθήκη σύγκλισης είναι:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, N$$

**Σε μορφή πινάκων η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γραφεί ως:**

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{B} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)})$$

όπου  $\mathbf{A} = \underset{\text{lower}}{\mathbf{L}} + \underset{\text{diagonal}}{\mathbf{D}} + \underset{\text{upper}}{\mathbf{U}}$ , ο πίνακας  $\mathbf{L}$  περιέχει τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{A}$  που βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο, ο πίνακας  $\mathbf{D}$  μόνο τα διαγώνια στοιχεία του  $\mathbf{A}$  και τέλος ο πίνακας  $\mathbf{U}$  τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{A}$  που βρίσκονται πάνω από τη διαγώνιο.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εφαρμόστε την μέθοδο Gauss-Seidel στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου και συγκρίνετε την ταχύτητα σύγκλισης. Πρακτικά οι προηγούμενες αναδρομικές σχέσεις θα γραφούν ως

$$\begin{aligned}x^{(k+1)} &= \frac{7 + y^{(k)} - z^{(k)}}{4} \\y^{(k+1)} &= \frac{21 + 4x^{(k)} + z^{(k)}}{8} \\z^{(k+1)} &= \frac{15 + 2x^{(k)} - y^{(k)}}{5}\end{aligned}$$

Παίρνω την ακολουθία τιμών:

$$(1,2,2) \rightarrow (1.75,3.75,2.95) \rightarrow (1.95,3.97,2.99) \rightarrow (1.996,3.996,2.999)$$

δηλαδή, σε τρεις επαναλήψεις υπολογίστηκαν οι ακριβείς λύσεις του συστήματος, που είναι  $(2,4,3)$ . Σημειώστε ότι με τη μέθοδο Jacobi απαιτήθηκαν 5 συνολικά επαναλήψεις, για να επιτευχθεί η ίδια ακρίβεια, δηλαδή η μέθοδος Gauss-Seidel απαιτεί σχεδόν τα μισά βήματα, για να συγκλίνει στην ακριβή λύση με την ίδια ακρίβεια.



## 2.6 Η ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΚΑΙ Ο ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

### 2.6.1 Η Ορίζουσα

Η **ορίζουσα** ενός πίνακα υπολογίζεται εύκολα, αν έχουμε ήδη εφαρμόσει τη μέθοδο Gauss σε έναν πίνακα. Τότε η ορίζουσα θα είναι το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα.

Για παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

### 2.6.2 Αντίστροφος Πίνακας

Ο υπολογισμός του **αντίστροφου** ενός πίνακα διαστάσεων  $N \times N$ , απαιτεί ουσιαστικά την επίλυση  $N$  γραμμικών συστημάτων.

Δηλαδή, αν δοθεί ο πίνακας  $\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  και  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  είναι ο αντίστροφός του.

Τότε προφανώς θα είναι:

$$\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και για τον υπολογισμό των αγνώστων  $x, y, z$  και  $w$  θα πρέπει να λυθούν τα παρακάτω δύο συστήματα:

$$\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε όμως ότι αν εφαρμόσουμε τον κανόνα Gauss-Jordan για το ένα σύστημα, δεν χρειάζεται να το επαναλάβουμε και για το δεύτερο. Το μόνο που αλλάζει είναι οι πράξεις που γίνονται στις αντίστοιχες στήλες του μοναδιαίου πίνακα. Οπότε, στην ουσία, προσπαθούμε να κάνουμε στο μοναδιαίο πίνακα τις ίδιες ακριβώς πράξεις που κάνουμε και στο δοθέντα πίνακα. Δηλαδή θα γράψουμε (σχηματικά) τους πίνακες ως εξής:

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & & & \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

**A** **I**

και θα εφαρμόσω στον πίνακα **I** ακριβώς τις ίδιες πράξεις που απαιτεί ο κανόνας Gauss – Jordan για τη διαγωνιοποίηση του πίνακα **A**.

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1N} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2N} \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \mathbf{A}_{N1} & \mathbf{A}_{N2} & \dots & \mathbf{A}_{NN} \end{array}$$

Οπότε τελικά καταλήγω στο να έχουμε στην αριστερή πλευρά τον μοναδιαίο πίνακα και δεξιά τον αντίστροφο του **A**.

## 2.7 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Έστω ένας  $N \times N$  πίνακας (τα στοιχεία του οποίου μπορεί να είναι και μιγαδικοί αριθμοί) και έστω  $\lambda$  ένας πραγματικός (ή και μιγαδικός) αριθμός, για τον οποίο η εξίσωση

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad \text{Εξ. 0.1}$$

έχει μια μη τετριμμένη λύση (δηλαδή,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ). Η τιμή  $\lambda$  ορίζεται ως μια **ιδιοτιμή** του πίνακα  $\mathbf{A}$ . Ένα μη μηδενικό διάνυσμα  $\mathbf{x}$ , που ικανοποιεί την εξίσωση 2.7.1, ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** του  $\mathbf{A}$ , που αντιστοιχεί στην τιμή  $\lambda$ .

Για παράδειγμα, στην εξίσωση

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{Εξ. 0.2}$$

$\mathbf{A} \quad \mathbf{v}_1 \quad \lambda_1 \quad \mathbf{v}_1$

το διάνυσμα  $\mathbf{v}_1 = (2, 1, -2)$  είναι ένα ιδιοδιάνυσμα και  $\lambda_1 = -1$  η αντίστοιχη ιδιοτιμή του  $\mathbf{A}$ .

Η συνθήκη 2.7.1 είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad \text{Εξ. 0.3}$$

οπότε, λύνοντας την 2.7.3, που ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση**, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}$ . Για παράδειγμα, αν την εφαρμόσουμε στον πίνακα της εξίσωσης 2.7.2, δημιουργούμε την εξίσωση

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0 \quad \text{Εξ. 0.4}$$

Το πολυώνυμο  $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0$  ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και οι ρίζες του  $\lambda_1 = -1, 3, 3$  είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}$ .

Αυτή η κλασική διαδικασία εύρεσης των ιδιοτιμών, και στη συνέχεια, των ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα συνίσταται μόνο για πίνακες με μικρό αριθμό στοιχείων. Για πίνακες με πολλά στοιχεία, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι μεγάλου βαθμού και οι συντελεστές του θα έχουν υπολογιστεί με ακρίβεια που θα ελαττώνεται, καθώς θα αυξάνεται η τάξη του πίνακα. Όμως οι ρίζες των πολυωνύμων είναι πολύ ευαίσθητες έστω και σε μικρά σφάλματα των συντελεστών του, επομένως, η ακρίβεια, με την οποία θα υπολογιστούν οι ιδιοτιμές, θα είναι περιορισμένη. Για το λόγο αυτό, θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια μια διαδικασία κατάλληλη για τον ακριβή υπολογισμό των ιδιοτιμών των πινάκων.

### 2.7.1 Η μέθοδος των δυνάμεων

Η **μέθοδος των δυνάμεων** και οι διάφορες παραλλαγές της έχουν σχεδιασθεί ειδικά για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων με τη χρήση Η/Υ. Η μέθοδος εφαρμόζεται αν υπάρχει μια ιδιοτιμή  $\lambda_1$  που είναι απολύτως μεγαλύτερη από όλες τις υπόλοιπες, δηλ.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_N| \quad \text{Εξ. 0.5}$$

και επίσης, αν κάθε διάνυσμα  $\mathbf{x}$  μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των  $N$  ιδιοδιανυσμάτων  $\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}^{(N)}\}$ . Δηλαδή, για κάθε  $\mathbf{u}^{(i)}$  ισχύει:

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{u}^{(i)} \quad (1 \leq i \leq N) \quad \text{Εξ. 0.6}$$

και

$$x = a_1 u^{(1)} + a_2 u^{(2)} + \dots + a_n u^{(N)} \quad \text{Εξ. 0.7}$$

Αν πολλαπλασιάσω και τα δυο μέλη της 2.7.7 με τον πίνακα  $\mathbf{A}$ , θα έχω:

$$\mathbf{A} \cdot x = a_1 \lambda_1 u^{(1)} + a_2 \lambda_2 u^{(2)} + \dots + a_n \lambda_n u^{(N)} \quad \text{Εξ. 0.8}$$

Αν πολλαπλασιάσω  $k$  φορές την 2.7.7 με τον πίνακα  $\mathbf{A}$ , θα καταλήξω σε μια σχέση της μορφής

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k x &= a_1 \lambda_1^k u^{(1)} + a_2 \lambda_2^k u^{(2)} + \dots + a_n \lambda_n^k u^{(N)} \\ &= \lambda_1^k \left( a_1 u^{(1)} + a_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k u^{(2)} + \dots + a_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k u^{(N)} \right) \end{aligned} \quad \text{Εξ. 0.9}$$

λόγω όμως της 2.7.5, οι όροι  $(\lambda_j / \lambda_1)^k$  τείνουν στο μηδέν, καθώς το  $k \rightarrow \infty$ .

Άρα, για  $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{A}^k x \approx \lambda_1^k a_1 u^{(1)} \quad \text{Εξ. 0.10}$$

επομένως, ο λόγος

$$r_k \equiv \frac{\mathbf{A}^{k+1} x}{\mathbf{A}^k x} \approx \frac{\lambda_1^{k+1} a_1 u^{(1)}}{\lambda_1^k a_1 u^{(1)}} \approx \lambda_1 \quad \text{Εξ. 0.11}$$

τείνει στην τιμή  $\lambda_1$ , καθώς  $k \rightarrow \infty$ . Παρατηρούμε όμως ότι από την 2.7.10 υπολογίζουμε και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $u^{(1)}$ .

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ο πίνακας  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  με ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 3.4142$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 0.5858$  και αντίστοιχα

ιδιοδιανύσματα  $u^{(1)} = (0.3694, 1, 0.8918)$ ,  $u^{(2)} = (0, 1, 0)$  και  $u^{(3)} = (0.7735, 1, -0.3204)$ .

Έστω για παράδειγμα το διάνυσμα  $x = (1, 2, 1)$ , οπότε, για παράδειγμα, είναι:

$$\mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} 68 & 0 & 164 \\ 136 & 32 & 428 \\ 164 & 0 & 396 \end{pmatrix} \text{ και } x^{(5)} = \mathbf{A}^5 x = (232, 628, 560)$$

Ανάλογα,  $\mathbf{A}^6 = \begin{pmatrix} 232 & 0 & 560 \\ 532 & 64 & 1484 \\ 560 & 0 & 1352 \end{pmatrix}$  και  $x^{(6)} = \mathbf{A}^6 x = (792, 2144, 1912)$  οπότε, με βάση τη σχέση

$$2.7.11, \lambda_1 = \frac{x^{(6)}}{x^{(5)}} = \frac{2144}{628} \approx 3.4140$$

Αντίστοιχα, το ιδιοδιάνυσμα  $u^{(1)}$  θα είναι ίσο με το  $x^{(6)}$ , που με κανονικοποίηση (διαιρούμε με το μεγαλύτερο στοιχείο του) γίνεται  $(0.3694, 1, 0.8918)$ . Δηλαδή, έχουμε υπολογίσει τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

## 2.7.1 Επιτάχυνση Aitken

Ο λόγος  $r_k$  της σχέσης 2.7.11 αποτελεί μια προσέγγιση στην ακριβή τιμή  $\lambda_1$  και το σφάλμα θα είναι  $\varepsilon_k = |r_k - \lambda_1|$ . Αντίστοιχα, για το  $r_{k+1}$  θα ισχύει  $\varepsilon_{k+1} = |r_{k+1} - \lambda_1|$ . Επειδή η σύγκλιση της μεθόδου είναι γραμμική, δηλαδή

$$\varepsilon_{k+1} = A\varepsilon_k$$

μπορώ να εφαρμόσω τη μέθοδο του Aitken για την επιτάχυνση της σύγκλισης. Δηλαδή, στην ουσία, τη σχέση του κεφαλαίου 1.5 που μας οδηγεί σε μια τιμή για το  $\lambda_1$ , που είναι συνάρτηση των  $r_k, r_{k+1}, r_{k+2}$ . Η σχέση είναι

$$\lambda_1 = \frac{r_k r_{k+2} - r_{k+1}^2}{r_{k+2} - 2r_{k+1} + r_k}$$

**Εξ. 0.12**

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο προηγούμενο παράδειγμα, είναι  $r_5 = 3.414$ ,  $r_4 = 3.413$  και  $r_3 = 3.407$ . Εφαρμόζοντας την επιτάχυνση Aitken υπολογίζουμε ότι  $\lambda_1 = 3.4142$ , που είναι ακριβέστερο κατά δυο δεκαδικά ψηφία από το  $r_5$ .

## 2.7.2 Αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στη μέθοδο των δυνάμεων και μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την απολύτως μικρότερη ιδιοτιμή. Αυτό είναι δυνατόν λόγω του παρακάτω θεωρήματος:

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν  $\lambda$  είναι μια ιδιοτιμή ενός πίνακα  $\mathbf{A}$ , τότε η  $\lambda^{-1}$  είναι μια ιδιοτιμή του  $\mathbf{A}^{-1}$ .

### Απόδειξη

Έστω  $\mathbf{A}x = \lambda x$ , ( $x \neq 0$ ). Τότε  $x = \mathbf{A}^{-1}(\lambda x) = \lambda \mathbf{A}^{-1}x$ . Οπότε,  $\mathbf{A}^{-1}x = \lambda^{-1}x$ , άρα, η τιμή  $\lambda^{-1}$  είναι ιδιοτιμή του πίνακα  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Επομένως, εάν ένας πίνακας  $\mathbf{A}$  έχει  $N$  ιδιοτιμές  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{N-1}| > |\lambda_N| > 0$ , τότε, οι ιδιοτιμές του  $\mathbf{A}^{-1}$  είναι οι τιμές  $\lambda_i^{-1}$ , για τις οποίες θα ισχύει:

$$|\lambda_N^{-1}| > |\lambda_{N-1}^{-1}| \geq \dots \geq |\lambda_1^{-1}| > 0$$

Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε την ιδιοτιμή  $\lambda_N^{-1}$  εφαρμόζοντας τη μέθοδο των δυνάμεων στον  $\mathbf{A}^{-1}$ . Η λογική διαδικασία θα ήταν να εφαρμόσουμε για τον  $\mathbf{A}^{-1}$  τη διαδικασία της μεθόδου δυνάμεων αλλά, όπως αναφέραμε στην παράγραφο 2.6, η αντιστροφή ενός πίνακα είναι αρκετά χρονοβόρα διαδικασία για τον Η/Υ. Έτσι, είναι προτιμότερο για τον υπολογισμό του  $(\mathbf{A}^{-1})^{(k+1)}x$  να λύσουμε με χρήση της μεθόδου Gauss το σύστημα  $\mathbf{A} \cdot x^{(k+1)} = x^{(k)}$ , όπου με  $x^{(k)}$  συμβολίζουμε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού  $\kappa$ -φορές του πίνακα  $\mathbf{A}$  με ένα διάνυσμα  $x$ , δηλαδή,  $x^{(k)} = \mathbf{A}^\kappa x$ . Πιο συγκεκριμένα, για ένα αρχικό διάνυσμα  $x^{(0)}$ , θα πάρουμε  $x^{(1)} = \mathbf{A}^{-1}x^{(0)}$ . Άρα,  $\mathbf{A}x^{(1)} = x^{(0)}$ . Επομένως, η λύση του συστήματος αυτού καθορίζει την τιμή του  $x^{(1)}$ . Με αυτή τη διαδικασία, για το διάνυσμα  $x^{(k+1)}$  θα ισχύει:

$$x^{(k+1)} = \mathbf{A}^{-1}x^{(k)} \Rightarrow \mathbf{A}x^{(k+1)} = x^{(k)}$$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εστω ο πίνακας  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  του προηγούμενου παραδείγματος και ένα αρχικό διάνυσμα

$\mathbf{x}^{(0)} = (1, 2, 1)$ , τότε θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα  $\mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)}$  με τη μέθοδο του Gauss. Εύκολα υπολογίζουμε ότι  $\mathbf{x}^{(1)} = (1, \frac{3}{2}, 0)$ . Συνεχίζουμε λύνοντας το σύστημα  $\mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)}$  με  $\mathbf{x}^{(2)} = (\frac{3}{2}, 2, \frac{-1}{2})$  κ.ο.κ. Τελικά μπορούμε να σχηματίσουμε το λόγο  $r_6 = \frac{\mathbf{x}^{(7)}}{\mathbf{x}^{(6)}} \approx 1.70707$ , οπότε απολύτως μικρότερη ιδιοτιμή του  $\mathbf{A}$  θα είναι  $\lambda_3 = 1/1.7070707 = 0.5858$ .

### 2.7.3 Μέθοδος της μετάθεσης

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται συμπληρωματικά των δυο προηγούμενων μεθόδων των δυνάμεων, η εφαρμογή των οποίων μας οδήγησε στην εύρεση της απολύτως μικρότερης και μεγαλύτερης ιδιοτιμής. Με τη **μέθοδο της μετάθεσης**, θα υπολογίσουμε τις ενδιάμεσες ιδιοτιμές.

Η εφαρμογή της μεθόδου βασίζεται στην ιδιότητα των πινάκων που περιγράφεται από το παρακάτω θεώρημα:

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Αν οι  $N$  τιμές  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) είναι ιδιοτιμές ενός  $N \times N$  πίνακα  $\mathbf{A}$ , τότε δοθέντος ενός μιγαδικού αριθμού  $\mu$  ο πίνακας  $\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$ : μοναδιαίος πίνακας) θα έχει ως ιδιοτιμές τις  $(\lambda_i - \mu)$  ( $i = 1, \dots, N$ ).

Επομένως, ας θεωρήσουμε στο διάστημα  $(\lambda_N, \lambda_1)$  ένα σημείο  $\mu$  τέτοιο, ώστε για μια ιδιοτιμή  $\lambda_\kappa$  να ισχύει  $0 < |\lambda_\kappa - \mu| < \varepsilon$  και όλες οι άλλες ιδιοτιμές να ικανοποιούν την ανισότητα  $|\lambda_i - \mu| > \varepsilon$ . Τότε, λόγω του θεωρήματος, η  $|\lambda_\kappa - \mu|$  θα είναι η απολύτως μικρότερη ιδιοτιμή του  $\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}$ , επομένως, μπορώ να την υπολογίσω χρησιμοποιώντας την *αντίστροφη μέθοδο των δυνάμεων*. Υπενθυμίζουμε ότι συνίσταται ο υπολογισμός των  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  από τη λύση του συστήματος  $(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I})\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)}$ . Οπότε, τελικά, αν υπολογίσουμε το  $r_\kappa$ , η ιδιοτιμή  $\lambda_i$  θα είναι:

$$\lambda_i = \frac{1}{r_\kappa} + \mu$$

Αναλόγως, μπορούμε να υπολογίσουμε την ιδιοτιμή  $\lambda_i$ , για την οποία η απόσταση να είναι μέγιστη. Σ' αυτήν την περίπτωση, υπολογίζουμε με τη μέθοδο των δυνάμεων την τιμή  $r_\kappa = \lambda_j - \mu$ , οπότε  $\lambda_j = r_\kappa + \mu$ .

### ΑΣΚΗΣΗ

Αν

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.002 & 4.000 & 4.000 \\ -2.000 & 2.906 & -5.387 \\ 3.000 & -4.031 & -3.112 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7.998 \\ -4.481 \\ -4.413 \end{pmatrix}, \text{ να βρεθούν η } \det(\mathbf{A}), \text{ ο } \mathbf{A}^{-1} \text{ αφού πρώτα}$$

λυθεί το σύστημα  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}$ . Στη συνέχεια να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του  $\mathbf{A}$ .