Κεφάλαιο 3 ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ – ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Υπάρχει μια ολόκληρη κατηγορία μαθηματικών προβλημάτων αλλά και προβλημάτων της καθημερινής ζωής στα οποία απαιτείται από συγκεκριμένα δεδομένα μιας παρατήρησης να προβλέψουμε την εξέλιξη μιας διαδικασίας (ΠΡΟΒΛΕΨΗ) ή να εκτιμήσουμε πια ήταν η κατάσταση ενός φαινομένου στο ενδιάμεσο διάστημα δύο μετρήσεων (ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ). Για παράδειγμα αν ένας μετεωρολογικός σταθμός καταγράφει τη μεταβολή της θερμοκρασίας κάθε μια ώρα θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε ποιά είναι η θερμοκρασία σε μια τυχαία χρονική στιγμή (π.χ. στις 12:15) ή να προβλέψουμε ποιά θα είναι η θερμοκρασία στις 20:00 αν έχουμε μετρήσεις μόνο ως τις 19:00.

Στα μαθηματικά πολλές φορές απαιτείται ο υπολογισμός μιας συνάρτησης (στην ουσία ενός κανόνα) που να ακολουθούν ζεύγη δοθέντων σημείων. Αλλά ακόμη και αν γνωρίζουμε τη μορφή μιας πολύπλοκης συνάρτησης προτιμούμε να την αντικαταστήσουμε με μια απλούστερη συνάρτηση την οποία στη συνέχεια μπορούμε ευκολότερα να χρησιμοποιήσουμε στους υπολογισμούς μας π.χ. για ολοκληρώσεις ή παραγωγίσεις κλπ. Φυσικά, θα πρέπει η νέα και απλή συνάρτηση να αποτελεί κατά το δυνατόν σωστή αναπαράσταση της ακριβούς, και γι' αυτό σε κάθε περίπτωση είναι σημαντικό να γνωρίσουμε το σφάλμα αυτής της αντικατάστασης. Η απλούστερη συνάρτηση είναι το πολυώνυμο και γι' αυτό όλες οι μέθοδοι που θα αναπτυχθούν σε αυτό το Κεφάλαιο θα έχουν ως σκοπό τον προσδιορισμό ενός πολυωνύμου το οποίο θα υπακουεί σε συγκεκριμένους κανόνες που θα ορίσουμε.

ΜΕΘΟΔΟΙ

Οι μέθοδοι που θα αναπτύξουμε χαρακτηρίζονται από το είδος της αρχικής πληροφορίας που θα είναι διαθέσιμη. Έτσι, συνοπτικά αναφέρουμε τις παρακάτω μεθοδους που θα αναπτυχθούν στη συνέχεια διεξοδικά:

- **ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ LAGRANGE**: δοθείσης μιας n-άδας ζευγών σημείων (x_i, y_i), όπου τα $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ δεν είναι κατ' ανάγκη ίσα, θα υπολογίσουμε ένα πολυώνυμο n-1 βαθμού, που θα διέρχεται από αυτά τα n σημεία. Το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται **συμπτωτικό πολυώνυμο.**

- **ΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΓΙΑ ΙΣΑΠΕΧΟΝΤΑ x_i :** η προηγούμενη διαδικασία απλοποιείται σημαντικά αν τα n σημεία ισαπέχουν και τα συμπτωτικά πολυώνυμα υπολογίζονται με στοιχειώδεις πράξεις.

- **ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ**: Στην ουσία εδώ υπολογίζουμε ένα πολυώνυμο απο μια n-άδα τριάδων (x_i, y_i, y'_i). Το πολυώνυμο αυτό είναι βαθμού $2n-1$.

- **ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ TAYLOR**: πρόκειται για το γνωστό πολυώνυμο Taylor με το οποίο αντικαθιστούμε μια συνάρτηση με ένα πολυώνυμο βαθμού n, απαιτώντας το πολυώνυμο και η συνάρτηση, όπως επίσης και οι παράγωγοί του μέχρι τάξης n να ταυτίζονται σε ένα δοθέν σημείο.

- **ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕ SPLINES:** μια εξαιρετική μέθοδος συνδυασμού των παραπάνω μεθόδων. Στην ουσία, για μια n-άδα ζευγών (x_i, y_i) δημιουργούμε $n-1$ τριτοβάθμια πολυώνυμα **(κυβική spline**), ένα για κάθε ζεύγος σημείων $(x_i, y_i) - (x_{i+1}, y_{i+1})$ αντί ενός $(n-1)$-βάθμιο πολυώνυμο που διέρχεται από τα n σημεία.

3.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ LAGRANGE

Όπως προαναφέραμε, το **συμπτωτικό πολυώνυμο** ορίζεται ως ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$ που διέρχεται από n σημεία.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το συμπτωτικό πολυώνυμο 3ου βαθμού που διέρχεται από τα σημεία:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x	3.2	2.7	1.0	4.8	5.6
$f(x)$	22.0	17.8	14.2	38.3	51.7
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4

Προφανώς, πρέπει να επιλέξουμε τέσσερα από τα πέντε σημεία που δίνονται, έστω λοιπόν τα τέσσερα πρώτα. Αν το πολυώνυμο έχει τη μορφή $ax^3+bx^2+cx+d=P(x)$, τότε δημιουργούμε *4* εξισώσεις με *4* αγνώστους, άγνωστοι προφανώς είναι τα *a, b, c, d.* Λύνοντας το σύστημα με τις μεθόδους του προηγούμενου κεφαλαίου βρίσκουμε: $a = -0.5275$, $b = 6.4952$, $c = -16.117$ και $d = 24.3499$. Δηλαδή, το συμπτωτικό πολυώνυμο είναι το:

$$P(x)=-0.5275x^3+6.4952x^2-16.117x+24.3499$$

οπότε, αν ζητηθεί, για παράδειγμα, η τιμή της $f(3)$ βρίσκουμε ότι $f(3) = 20.21$.

Το **πολυώνυμο Lagrange** δίνει απ' ευθείας το συμπτωτικό πολυώνυμο, χωρίς τη λύση συστήματος. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, θα είναι:

$$\begin{aligned}P_3(x)=&\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}f_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f_1\\&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_2)(x_3-x_2)}f_3\end{aligned} \qquad \text{Εξ. 3.1}$$

το οποίο εύκολα προγραμματίζεται και επόμενως για κάθε τιμή x_i θα βρίσκουμε αμέσως την τιμή της $f(x_i)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ LAGRANGE

Η απόδειξη θα γίνει με χρήση της επαγωγικής μεθόδου, δηλαδή:

I. Το πολυώνυμο *0* (μηδενικού) βαθμού είναι η σταθερή συνάρτηση

$$P_0(x) = a_0 = f_1$$

για όλα τα x, δηλαδή μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x που διέρχεται από το (x_1,f_1).

II. Το πολυώνυμο 1ου βαθμού είναι:

$$P_1(x) = a_0 + a_1x$$

Για το οποίο ισχύει:

$$P_1(x_1) = a_0 + a_1x_1 = f_1$$
$$P_1(x_2) = a_0 + a_1x_2 = f_2$$

οπότε λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε:

$$a_0=\frac{x_2f_1-x_1f_2}{x_2-x_1} \quad \text{και} \quad a_1=\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}$$

Αρα:

$$\begin{aligned}P_1(x)&=\frac{x_2f_1-x_1f_2}{x_2-x_1}+\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}\cdot x=f_1\frac{x-x_2}{x_1-x_2}+f_2\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\\&=f_1L_1(x)+f_2L_2(x)\end{aligned}$$

όπου

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \qquad L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Για τα $L_i(x)$ (που ονομάζονται **συντελεστές Lagrange**) ισχύει προφανώς

$$\left.\begin{array}{ll} L_1(x_1) = 1 & L_2(x_1) = 0 \\ L_1(x_2) = 0 & L_2(x_2) = 1 \end{array}\right\}$$

Στη γενική περίπτωση λόγω της παραπάνω θα είναι:

$$L_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{για } j \neq k \\ 1 & \text{για } j = k \end{cases}$$

(δ_{jk} είναι το δέλτα του Kronecker) οπότε ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$ θα βρεθεί από τη σχέση

$$P_{n-1}(x) = f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + \dots + f_n L_n(x)$$

με

$$L_j(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n)}$$

<u>ΣΦΑΛΜΑ</u>

Το σφάλμα που γίνεται στον υπολογισμό μιας τιμής $f(x)$ για κάποιο δοθέν x μπορεί να εκτιμηθεί από τη σχέση:

$$E(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \qquad \text{(Εξ. 3.1)}$$

όπου n ο βαθμός του συμπτωτικού πολυωνύμου και το ξ είναι κατάλληλο σημείο μεταξύ των $x_0, \dots, x_n$.

<u>Απόδειξη</u>

Δημιουργώ μια νέα βοηθητική συνάρτηση

$F(x) = y(x) - P(x) - C \cdot \pi(x)$

όπου C είναι μια σταθερά και

$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$

Επομένως, επειδή $f(x_i) = P(x_i)$ η $F(x)$ θα μηδενίζεται για κάθε τιμή του $x = x_i$. Αν επιλέξω την σταθερά C να είναι:

$$C = \frac{y(t) - P(t)}{\pi(t)}$$

όπου t είναι μια τυχαία τιμή τότε θα είναι και $F(t) = 0$ άρα η $F(x)$ έχει $n+2$ τουλάχιστον ρίζες. Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle η $F'(x)$ έχει $n+1$ ρίζες μεταξύ των ριζών της $F(x)$, η $F''(x)$ έχει n ρίζες μεταξύ των ριζών της $F'(x)$ κοκ. Συνεχίζοντας έτσι συμπεραίνουμε ότι η $F^{(n+1)}(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε ένα σημείο $x = \xi$. Επειδή όμως η $p^{(n+1)}(x) = 0$ θα έχουμε

$$F^{(n+1)}(\xi) \equiv 0 = y^{(n+1)}(\xi) - C \cdot (n+1)!$$

Άρα $C = \dfrac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$,

και κατα συνέπεια:

$$y(t) - P(t) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi(t)$$

Επειδή όμως το t ήταν ένα τυχαίο σημείο διάφορο των $x_0, x_1, \ldots, x_n$ η παραπάνω σχέση θα ισχύει για κάθε x. Αρα

$$y(x) - P(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi(x)$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1</u>

Να προσεγγισθεί η συνάρτηση y = cos(π·x) με ένα τριτοβάθμιο συμπτωτικό πολυώνυμο που παίρνει τις ίδιες τιμές με την y για $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$. Να μελετηθεί το σφάλμα.

Προφανώς ο πίνακας τιμών είναι:

x_i	0	0.5	1
f_i	1	0	-1

Οπότε

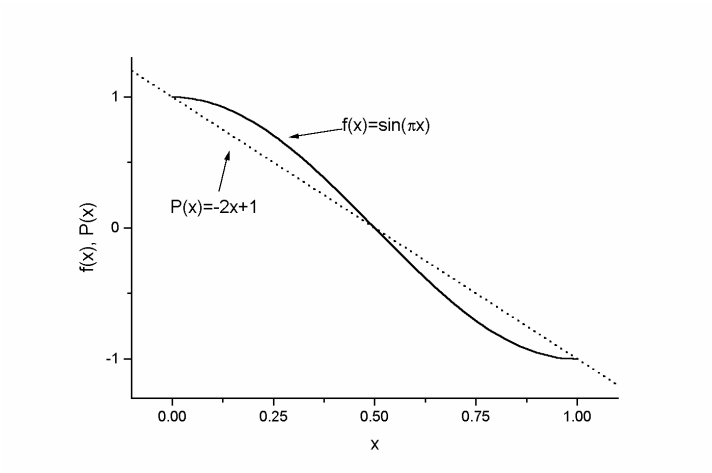
$$L_1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0.5)(x-1)}{(0-0.5)(0-1)} = 2x^2 - 3x + 1,$$

$$L_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)} = -4(x^2 - x),$$

$$L_3 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)} = 2x^2 - x$$

άρα

$$P(x) = 1 \cdot (2x^2 - 3x + 1) - 0.4 \cdot (x^2 - x) + (-1) \cdot (2x^2 - x) = -2x + 1$$



το πολυώνυμο τελικά δεν είναι δευτεροβάθμιο αλλά πρωτοβάθμιο, το Σχήμα 3.1 δείχνει τις δύο συναρτήσεις. Το σφάλμα θα είναι

$E(x) = x \cdot (x - 0.5) \cdot (x - 1)\dfrac{\pi^3 \sin(\pi\xi)}{3!}$ και για $x = 0.25$ είναι: $E(0.25) \leq 0.24$

3.2 ΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΓΙΑ ΙΣΑΠΕΧΟΝΤΑ x_i

Όταν οι τιμές των x_i ισαπέχουν, τότε η εύρεση του συμπτωτικού πολυωνύμου απλοποιείται, αν χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα τους **τελεστές διαφοράς** και τους **πίνακες διαφορών.**

Ορίζουμε **ώς τελεστή διαφοράς προς τα εμπρός** τον τελεστή Δ, με την εξής ιδιότητα $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$. Αναλόγως μπορώ να ορίσω ως **συντελεστή διαφοράς προς τα πίσω** τον τελεστή $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$

Μπορούν να οριστούν ως **διαφορές 1ης τάξης** τα

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0,\ \Delta f_1 = f_2 - f_1,\ \ldots\ ,\Delta \mathrm{f_i} = f_{i+1} - f_i$$

ως **διαφορές 2ης τάξης** τα

$$\Delta^2 f_1 = \Delta(\Delta f_1) = \Delta(f_2 - f_1) = \Delta f_2 - \Delta f_1 = (f_3 - f_2) - (f_2 - f_1) = f_3 - 2f_2 + f_1$$
$$\Rightarrow \Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

ως **διαφορές 3ης τάξης** τα

$$\Delta^3 f_1 = \Delta^2(\Delta^2 f_i) = f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1$$
$$\Rightarrow \Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

και τέλος ώς **διαφορές *n* τάξης**

$$\Delta^n f_i = f_{i+n} - nf_{i+n-1} + \frac{n(n-1)}{2} f_{i+n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} f_{i+n-3} + \ \ldots.$$

Με βάση τα παραπάνω, είναι εύκολο να δημιουργήσουμε **πίνακες διαφορών** για κάθε n-άδα σημείων (x_i, y_i). Οι πίνακες διαφορών διευκολύνουν σημαντικά την εύρεση του συμπτωτικού πολυωνύμου. Για παράδειγμα, παραθέτουμε το παρακάτω πίνακα:

x	*f(x)*	*Δf(x)*	*Δ²f(x)*	*Δ³f(x)*	*Δ⁴f(x)*	*Δ⁵f(x)*
0.0	*0.000*					
		0.203				
0.2	*0.203*		*0.017*			
		0.220		*0.024*		
0.4	*0.423*		*0.041*		*0.020*	
		0.261		*0.044*		*0.032*
0.6	*0.684*		*0.085*		*0.052*	
		0.246		*0.096*		
0.8	*1.030*		*0.181*			
		0.527				
1.0	*1.557*					

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το συμπτωτικό πολυώνυμο *n* βαθμού θα δίνεται από τη σχέση:

$$P_n(x_s) = f_0 + s\cdot \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\cdot \Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\cdot \Delta^3 f_0 + \dots$$
$$= f_0 + \binom{s}{1}\cdot \Delta f_0 + \binom{s}{2}\cdot \Delta^2 f_0 + \binom{s}{3}\cdot \Delta^3 f_0 + \dots = \sum_{i=0}^{n}\binom{s}{i}\cdot \Delta^i f_0$$

όπου $x_s = x_0 + s\cdot h$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Για $s = 0$ και $s = 1$ ο τύπος ισχύει. Έστω ότι ισχύει και για $s = m$, δηλαδή:

$$P(x_m) = \sum_{i=0}^{n}\binom{m}{i}\cdot \Delta^i f_0$$

θα δείξουμε ότι ισχύει για $s = m + 1$

$$P(x_{m+1}) = P(x_m) + \Delta P(x_m) = \sum_{i=0}^{n}\binom{m}{i}\cdot \Delta^i f_0 + \sum_{i=0}^{n}\binom{m}{i}\cdot \Delta^{i+1} f_0$$
$$= f_0 + \sum_{i=1}^{n}\binom{m}{i}\cdot \Delta^i f_0 + \sum_{i=1}^{n}\binom{m}{i-1}\cdot \Delta^i f_0 + \Delta^{n+1} f_0$$
$$= f_0 + \sum_{i=1}^{n}\binom{m+1}{i}\cdot \Delta^i f_0 + \Delta^{n+i} f_0 = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{m+1}{i}\cdot \Delta^i f_0$$

οεδ

Στη παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήθηκε η σχέση $\binom{k+1}{n+1} = \binom{k}{n+1} + \binom{k}{n}$

ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΙΣΑΠΕΧΟΝΤΑ x_i

Newton – Gregory προς τα μπρός (από το σημείο $x_0 \to x_n$)

$$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \cdot \Delta f_0 + \binom{s}{2} \cdot \Delta^2 f_0 + \ldots + \binom{s}{n} \cdot \Delta^n f_0$$

Newton – Gregory προς τα πίσω (από το σημείο $x_{-n} \to x_0$)

$$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \cdot \Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2} \cdot \Delta^2 f_{-2} + \binom{s+2}{3} \cdot \Delta^3 f_{-3} + \ldots + \binom{s+n-1}{n} \cdot \Delta^n f_{-n}$$

Gauss προς τα μπρος (από το σημείο $x_{-\left[\frac{n}{2}\right]} \to x_{-\left[\frac{n+1}{2}\right]}$)

$$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \cdot \Delta f_0 + \binom{s}{2} \cdot \Delta^2 f_{-1} + \binom{s+1}{3} \cdot \Delta^3 f_{-1} + \binom{s+1}{4} \cdot \Delta^4 f_{-2} + \ldots + \binom{s+[(n-1)/2]}{n} \cdot \Delta^n f_{-\left[\frac{n}{2}\right]}$$

Stirling (από $x_{-\left[\frac{n}{2}\right]} \to x_{\left[\frac{n}{2}\right]}$, αν n άρτιος)

$$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \frac{\Delta f_{-1} + \Delta f_0}{2} + \frac{\binom{s+1}{2} + \binom{s}{2}}{2} \Delta^2 f_{-1} + \binom{s+1}{3} \frac{\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}}{2} + \frac{\binom{s+2}{4} + \binom{s+1}{4}}{2} \Delta^4 f_{-2}$$

$$+ \ldots + \begin{cases} \dfrac{\binom{s+[n/2]}{n} + \binom{s+[(n-1)/2]}{n}}{2} \Delta^n f_{-\left[\frac{n}{2}\right]} & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\[2ex] \binom{s+[(n-1)/2]}{n} \dfrac{\Delta^n f_{-\left[\frac{n+1}{2}\right]} + \Delta^n f_{-\left[\frac{n}{2}\right]}}{2} & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

όπου $s = \dfrac{x - x_0}{h}$ και $\left[\dfrac{m}{2}\right]$ το ακέραιο μέρος του $\dfrac{m}{2}$. Υπενθυμίζουμε ότι:

$$\binom{s+j}{\kappa} = \frac{(s+j)(s+j-1)(s+j-2)\ldots(s+j-\kappa+1)}{\kappa!}$$

Για να χρησιμοποιήσετε τις παραπάνω σχέσεις επιλέξτε ένα x_0 και υπολογίστε το s, στη συνέχεια αντικαταστήτε στην κατάλληλη σχέση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας διαφορών, να υπολογισθούν τα συμπτωτικά πολυώνυμα Newton-Gregory, Gauss και Stirling.

x	$F(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0.2	1.06894				
		0.11242			
0.5	1.18136		0.01183		
		0.12425		0.00123	
0.8	1.30561		0.01306		0.00015
		0.13731		0.00138	
1.1	1.44292		0.01444		0.00014
		0.15175		0.0152	
1.4	1.59467		0.01596		
		0.16771			
1.7	1.76238				

- **Newton – Gregory προς τα μπρός** για τα σημεία από $x = 0.5 \to x = 1.4$, δηλαδή $x_0 = 0.5$

$$P_3(x) = 1.18136 + 0.12425 \cdot s + 0.01306 \cdot \binom{s}{2} + 0.00138 \cdot \binom{s}{3}$$

$$= 1.18136 + 0.12425 \cdot s + 0.01306 \cdot s \cdot (s-1)/2 + 0.00138 \cdot s \cdot (s-1) \cdot (s-2)/6$$

$$= 0.9996 + 0.3354 \cdot x + 0.052 \cdot x^2 + 0.085 \cdot x^3$$

- **Newton – Gregory προς τα πίσω** για τα σημεία από $x = 1.1 \to x = 0.2$, δηλαδή $x_0 = 1.1$

$$P_n(x) = 1.44292 + 0.13731 \cdot s + 0.01306 \cdot \binom{s+1}{2} + 0.00123 \cdot \binom{s+2}{3}$$

$$= 1.44292 + 0.13731 \cdot s + 0.01306 \cdot s \cdot (s+1)/2 + 0.00123 \cdot s \cdot (s+1) \cdot (s+2)/6$$

$$= 0.99996 + 0.33374 \cdot x + 0.05433 \cdot x^2 + 0.007593 \cdot x^3$$

- **Gauss προς τα μπρος** για τα σημεία από $x = 0.5 \to x = 1.1$, δηλαδή $x_0 = 0.8$

$$P_2(x) = 1.30561 + 0.13731 \cdot s + 0.01306 \cdot \binom{s}{2}$$

$$= 1.10578 + 0.36338 \cdot x + 0.07256 \cdot x^2$$

- **Stirling** για τα σημεία από $x = 0.2 \to x = 1.4$, δηλαδή $x_0 = 0.8$

$$P_4(x) = 1.30561 + \binom{s}{1} \cdot \frac{0.12425 + 0.13731}{2} + \frac{\binom{s}{2} + \binom{s+1}{2}}{2} \cdot 0.01306$$

$$+ \binom{s+1}{3} \cdot \frac{0.00123 + 0.00138}{2}$$

$$= 1.2214 + 0.40715 \cdot x + 0.06772 \cdot x^2 + 0.008056 \cdot x^3$$

3.3 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Είναι δυνατόν ένα συμπτωτικό πολυώνυμο να μοιάζει κάπως παραπάνω σε μια δοθείσα συνάρτηση ή ένα σύνολο τιμών, εφόσον απαιτηθεί και οι παράγωγοι του πολυωνύμου να παίρνουν τις ίδιες τιμές με τη συνάρτηση ή το σύνολο τιμών στα σημεία επαφής.

Επομένως, αν απαιτήσουμε το πολυώνυμο με τη συνάρτηση ή το σύνολο τιμών να παίρνουν τις ίδιες τιμές σε n σημεία, όπως και οι παράγωγοί του

$$\begin{aligned} P(x) &= y(x) \\ P'(x) &= y'(x) \end{aligned} \quad \text{για} \quad x_{1,} x_2, \dots, x_n$$

καταλήγουμε σε $2n$ εξισώσεις, οι οποίες καθορίζουν ένα πολυώνυμου το πολύ $2n-1$ βαθμού. Το πολυώνυμο αυτό δίνεται από τον **τύπο του Hermite**.

$$P_{2n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) y_i + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) y_i'$$

όπου

$$A_i(x) = \left[1 - 2 \cdot L_i'(x_i)(x - x_i)\right] \cdot \left[L_i(x)\right]^2$$

$$B_i(x) = (x - x_i) \cdot \left[L_i(x)\right]^2$$

$L_i(x)$ είναι οι συντελεστές Lagrange.

ΣΦΑΛΜΑ

Το σφάλμα προφανώς θα είναι ισοδύναμο με αυτό ενός συμπτωτικού πολυωνύμου βαθμού $2n-1$

$$y(x) - p(x) = \frac{y^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}\left[(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_n)\right]^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογισθεί το εφαπτόμενο πολυώνυμο για τα εξής δεδομένα

k	x_k	y_k	y'_k
0	0	0	0
1	4	2	0

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-4}{0-4} = -\frac{x-4}{4} \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x}{4}$$

$$L_0'(x) = \frac{1}{x_0 - x_1} = -\frac{1}{4} \qquad L_1'(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} = \frac{1}{4}$$

Αρα:

$$A_0(x) = \left[1 - 2 \cdot L_0'(x - x_0)\right] \cdot L_0^2 = \left[1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)(x - 0)\right] \cdot \left(\frac{x-4}{4}\right)^2$$

$$A_1(x) = \left[1 - 2 \cdot L_0'(x - x_1)\right] \cdot L_1^2 = \left[1 - 2 \cdot \frac{1}{4}(x - 4)\right] \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \left(3 - \frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2$$ Επομένως:

$$B_0(x) = (x - 0) \cdot \left(\frac{x-4}{4}\right)^2 = x\left(\frac{x-4}{4}\right)^2 \qquad B_1(x) = (x - 4) \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2$$

$$P(x) = (6 - x)\frac{x^2}{16}$$

3.4 <u>ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕ SPLINES</u>

Πολλές φορές το συμπτωτικό πολυώνυμο δεν αποτελεί την πλέον ιδανική αναπαράσταση της συνάρτησης που αντιπροσωπεύει ένα σύνολο σημείων, ειδικότερα όταν υπάρχουν τοπικές "ασυνέχειες" στα δεδομένα.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4</u>

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le -0.2 \\ 1-5|x| & -0.2 < x < 0.2 \\ 0 & 0.2 \le x \le 1.0 \end{cases}$$

Αν υποθέσουμε ότι βρίσκουμε στο διάστημα (-1,1) τα συμπτωτικά πολυώνυμα δεύτερου, τέταρτου, έκτου και όγδοου βαθμού τότε βλέπουμε ότι δεν αποτελούν σωστή αναπαράσταση της συνάρτησης.

Γίνεται προφανής η ανάγκη αλγορίθμου που να παίρνει υπόψη του τις τοπικές "ασυνέχειες". Για να το επιτύχουμε αυτό, εμφυτεύουμε ένα κατάλληλο πολυώνυμο σε κάθε ζεύγος σημείων.

Στη συνέχεια, θα προσπαθήσουμε να εμφυτεύσουμε ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού για κάθε ζεύγος σημείων (x_i, y_i) και (x_{i+1}, y_{i+1}), αυτό απαιτεί πληροφορία από 4 σήμεια, επομένως για να το επιτύχουμε, απαιτείται, για παράδειγμα, η <u>κλίση</u> και η <u>καμπυλότητα</u> των πολυωνύμων δεξιά και αριστερά του σημείου (x_i, y_i) να ταυτίζονται.

Έστω το τριτοβάθμιο πολυώνυμο που διέρχεται από τα σημεία (x_i, y_i) και (x_{i+1}, y_{i+1})

$$y = a_i \cdot (x - x_i)^3 + b_i \cdot (x - x_i)^2 + c_i \cdot (x - x_i) + d_i$$

Επειδή διέρχεται από τα δυο άκρα του διαστήματος, θα είναι:

$$y_i = a_i \cdot (x_i - x_i)^3 + b_i \cdot (x_i - x_i)^2 + c_i \cdot (x_i - x_i) + d_i = d_i$$

και

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= a_i \cdot (x_{i+1} - x_i)^3 + b_i \cdot (x_{i+1} - x_i)^2 + c_i \cdot (x_{i+1} - x_i) + d_i \\ &= a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i \end{aligned}$$

όπου $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Χρειαζόμαστε και την πρώτη και δεύτερη παράγωγο, για να συσχετίσουμε τις κλίσεις και καμπυλότητες των πολυωνύμων, δηλαδή:

$$y' = 3a_i \cdot (x - x_i)^2 + 2b_i \cdot (x - x_i) + c_i$$

$$y'' = 6a_i \cdot (x - x_i) + 2b_i$$

Έστω S_i η δεύτερη παράγωγος στο x_i και S_{i+1} στο x_{i+1}. Τότε:

$$S_i = 6a_i \cdot (x_i - x_i) + 2b_i = 2b_i$$

$$S_{i+1} = 6a_i \cdot (x_{i+1} - x_i) + 2b_i = 6a_i h_i + 2b_i$$

Άρα

$$b_i = \frac{S_i}{2} \qquad a_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i}$$

οπότε

$$y_{i+1} = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i} h_i^3 + \frac{S_i}{2} h_i^2 + c_i h_i + y_i$$

επομένως

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6}$$

Αν απαιτήσουμε τώρα οι κλίσεις από δεξιά και αριστερά του σημείου x_i να είναι ίσες, τότε επειδή

$$y_i' = 3a_i \cdot (x_i - x_i)^2 + 2b_i \cdot (x_i - x_i) + c_i = c_i$$

$$y_i' = 3a_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} = 3a_{i-1} h_{i-1}^2 + 2b_{i-1} h_{i-1} + c_{i-1}$$

καταλήγουμε στη σχέση:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6}$$

$$= 3\left(\frac{S_i - S_{i-1}}{6h_{i-1}}\right) h_{i-1}^2 + 2\frac{S_{i-1}}{2} h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2h_{i-1} S_{i-1} + h_{i-1} S_i}{6}$$

και απλοποιώντας καταλήγω

$$h_{i-1} S_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) S_i + h_i S_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$$

Αν έχουμε $n+1$ σημεία, η παραπάνω σχέση μπορεί να εφαρμοσθεί στα $n-1$ εσωτερικά σημεία του διαστήματος (x_0, x_n). Άρα, θα έχουμε ένα σύστημα $n-1$ εξίσωσεων για τους $n+1$ αγνώστους S_i. Οπότε πρέπει να ορίσω δύο "αυθαίρετες" συνθήκες για τα S_0 και S_n στα άκρα του συστήματος.

<u>ΕΠΙΛΟΓΗ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΣΤΑ ΑΚΡΑ</u>

`Οπως προαναφέραμε υπάρχει μια ελευθερία στον υπολογισμό των συνθηκών στα άκρα του διαστήματος. Υπάρχουν όμως μερικές επιλογές που είναι αρκετά αξιόπιστες και χρησιμοποιούνται ευρύτατα.

I. $S_0 = 0$ και $S_n = 0$

Αυτή η επιλογή είναι ισοδύναμη με την υπόθεση ότι στα άκρα του διαστήματος η κυβική spline που μελετάμε να είναι γραμμική (στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως ΦΥΣΙΚΗ SPLINE)

II. $S_0 = S_1$ και $S_n = S_{n-1}$

Η επιλογή αυτή είναι ισοδύναμη με την υπόθεση ότι στα άκρα έχουμε παραβολική προσέγγιση.

III. Προβλέποντας την τιμή του S_0 από τα S_1, S_2 και του S_n από τα S_{n-1}, S_{n-2}, δηλαδή υποθέτουμε οτι η κλίση της S_i είναι ίδια μεταξύ των σημείων x_0 και x_1

$$\frac{S_1 - S_0}{h_0} = \frac{S_2 - S_1}{h_1} \Rightarrow S_0 = \frac{(h_0 + h_1) S_1 - h_0 S_2}{h_1}$$

και μεταξύ των σημείων x_{n-1} και x_n

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{h_{n-1}} = \frac{S_{n-1} - S_{n-2}}{h_{n-2}} \Rightarrow s_n = \frac{(h_{n-2} + h_{n-1}) S_{n-1} - h_{n-1} S_{n-2}}{h_{n-2}}$$

IV. Εξαναγκασμός των κλίσεων στα άκρα να πάρουν συγκεκριμένες τιμές. Εστω $f'(x_0)=A$ και $f'(x_n)=B$

$$2h_0S_0 + h_1S_1 = 6\left(\frac{y_1-y_0}{h_0} - A\right)$$

$$h_{n-1}S_{n-1} + 2h_nS_n = 6\left(B - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}\right)$$

Το σύστημα των $n+1$ εξισώσεων γράφεται γενικά ως:

$$\begin{pmatrix} & & & \ldots\ldots & & & \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & & \\ & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ & & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{n-2} \\ S_{n-1} \\ S_n \end{pmatrix} =$$

$$= 6\begin{pmatrix} \ldots \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \ldots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ \ldots \end{pmatrix} = \vec{Y}$$

Δηλαδή, έχω ένα σύστημα $n-1$ εξισώσεων για τους $n+1$ αγνώστους S_i. Αν όμως αφαιρέσω τα S_0 και S_n έχω ένα σύστημα *n-1* εξισώσεων με *n-1* αγνώστους που λύνεται. Τα S_0 και S_n υπολογίζονται από τις προηγούμενες συνθήκες:

ΕΠΙΛΟΓΗ I: $S_0=0$ και $S_n=0$, δημιουργούμε τον παρακάτω σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & \ldots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \\ S_{n-1} \end{pmatrix} = \vec{Y}$$

ΕΠΙΛΟΓΗ II: $S_0=S_1$ και $S_n=S_{n-1}$, δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα συντελεστών:

$$\begin{pmatrix} 3h_0+2h_1 & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & h_{n-2} & 2h_{n-2}+3h_{n-1} \end{pmatrix}$$

ΕΠΙΛΟΓΗ ΙΙΙ τα S_0 και S_n υπολογίζονται με γραμμική πρόβλεψη οπότε δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα συντελεστών:

$$\begin{pmatrix} \frac{(h_0+h_1)(h_0+2h_1)}{h_1} & \frac{h_1^2-h_0^2}{h_1} & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & \frac{h_{n-2}^2-h_{n-1}^2}{h_{n-2}} & \frac{(h_{n-1}+h_{n-2})(h_{n-1}+2h_{n-2})}{h_{n-2}} \end{pmatrix}$$

τα S_0 και S_n υπολογίζονται μετά τη λύση του συστήματος.

ΕΠΙΛΟΓΗ IV : όπου $f'(x_0)=A$, $f'(x_n)=B$

$$\begin{pmatrix} 2h_0 & h_1 & & & \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & \\ & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \\ & & \dots & & \\ & & & h_{n-2} & 2h_{n-1} \end{pmatrix}$$

Μετά τη λύση του συστήματος υπολογίζουμε τους συντελεστές a_i, b_i, c_i, d_i για τα τριτοβάθμια πολυώνυμα σε κάθε διάστημα από τις σχέσεις:

$$a_i = \frac{S_{i+1}-S_i}{6h_i}$$

$$b_i = \frac{S_i}{2}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{2h_iS_i + h_iS_{i+1}}{6}$$

$$d_i = y_i$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ</u>

Η επιλογή **I** πλαταίνει την καμπύλη στα άκρα.
Η επιλογή **III** δημιουργεί μεγάλη καμπυλότητα στα άκρα.
Η επιλογή **IV** είναι πιθανότατα καλύτερη, αν υπολογίσουμε σωστά τις κλίσεις στα άκρα.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5</u>

Να προσαρμοσθεί μια κυβική spline στα δεδομένα

x	0	1	2	3	4
y	-8	-7	0	19	56

(τα δεδομένα προέρχονται από τη συνάρτηση $y = x^3-8$)

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θα εξετάσουμε το πρόβλημα και για τις τέσσερεις συνθήκες για τα άκρα.

<u>ΣΥΝΘΗΚΗ Ι</u>: Δημιουργούμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 72 \\ 108 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} S_0 = 0 \\ S_1 = 6.4285 \\ S_2 = 10.2857 \\ S_3 = 24.4285 \\ S_4 = 0 \end{array}$$

<u>ΣΥΝΘΗΚΗ ΙΙ</u>: Δημιουργούμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 72 \\ 108 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} S_1 = S_0 = 4.8 \\ S_2 = 1.2 \\ S_3 = 19.2 = S_4 \end{array}$$

<u>ΣΥΝΘΗΚΗ ΙΙΙ</u>: Δημιουργούμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 36 \\ 72 \\ 108 \end{matrix} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} S_0 = 0 \;\; S_1 = 6 \\ S_2 = 12 \;\; S_3 = 18 \\ S_4 = 24 \end{array}$$

<u>ΣΥΝΘΗΚΗ ΙV</u>: Δημιουργούμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 36 \\ 72 \\ 108 \\ 66 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} S_0 = 0 \\ S_1 = 6 \\ S_2 = 12 \\ S_3 = 18 \\ S_4 = 24 \end{array}$$

Παρατηρήστε ότι οι τιμές των S_i ταυτίζονται με αυτές της 2ης παραγώγου της $y = x^3 - 8$ οταν χρησιμοποιήθηκαν οι συνθήκες ΙΙΙ και ΙV.

3.5 **ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ TAYLOR**

Μέχρι τώρα προσπαθούσαμε να υπολογίσουμε πολυώνυμα $P(x)$ τα οποία ταυτιζόταν σε ένα αριθμό σημείων με μια συνάρτηση $f(x)$ (συμπτωτικό πολυώνυμο) ή επιπλέον είχαν και «επαφή» δηλαδή ταυτιζόταν και η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης με τις τιμές του πολυωνύμου στα κοινά σημεία (εφαπτόμενο πολυώνυμο). Το πολυώνυμο Taylor έχει την ιδιότητα να ταυτίζεται σέ ένα μόνο σημείο x_0 με τή δοθείσα συνάρτηση, αλλά, επιπλεόν, εάν είναι βαθμού n, τότε και οι πρώτοι παράγωγοί τους μέχρι τάξης n θα ταυτίζονται σε αυτό το σημείο, δηλαδή:

$$P^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) \quad \text{για} \quad i = 0,1,\dots,n$$

Το πολυώνυμο Taylor μπορεί να γραφεί:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}(x - x_0)^i$$

ΣΦΑΛΜΑ

Το σφάλμα του «μοιάζει» με το σφάλμα του συμπτωτικού πολυωνύμου και δίνεται (όπως είναι γνωστό από το διαφορικό λογισμό) από τη σχέση:

$$y(x) - p(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \textit{Εξ. 3.2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί ένα πολυώνυμο που μαζί με τις πρώτες n παραγώγους του παίρνει στο $x_0 = 0$ τις τιμές που παίρνουν οι αντίστοιχες ποσότητες της συνάρτησης e^x.

ΛΥΣΗ

Όλες οι παράγωγοι της e^x είναι προφανώς e^x, οπότε

$$y_0 = y_0^{(1)} = y_0^{(2)} = \dots = y_0^{(n)} = 1$$

και επομένως

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} x^n = 1 + x\frac{x^2}{2} + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

Το σφάλμα θα είναι:

$$E = x^{n+1}\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$$

Μπορούμε στη συνέχεια να επεκτείνουμε το ερώτημα και να ζητήσουμε να υπολογίσουμε πόσους όρους πρέπει να κρατήσουμε στο ανάπτυγμα Taylor ώστε να επιτύχουμε ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων ή καλύτερα σφάλμα μικρότερο του 5×10^{-7} για $x \in [0,1]$. Οπότε, επειδή η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του σφάλματος είναι για $x = 1$ θα έχουμε

$$E = 0.00000005 \le \frac{e}{n+1}$$

οπότε η ανισότητα θα ικανοποιείται για $n \ge 10$. Δηλαδή, θα πρέπει να χρησιμοποιήσω τουλάχιστον 10 όρους στο ανάπτυγμα για να επιτύχω τη ζητούμενη ακρίβεια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Προσεγγίστε τη συνάρτηση $y(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$ με ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο (συμπτωτικό), το οποίο παίρνει τις ίδιες τιμές με τη συνάρτηση για $x = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1$. Να μελετηθεί το σφάλμα $y(x) - p(x)$.

2. Προσεγγίστε τη συνάρτηση $y(x) = \log(x+1)$ με ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο (συμπτωτικό), το οποίο παίρνει τις τιμές με τη συνάρτηση για $x = 0, x_1 = 4,\ x_2 = 9$. Να μελετηθεί το σφάλμα $y(x) - p(x)$.

3. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Lagrange βρείτε ένα συμπτωτικό πολυώνυμο τρίτου βαθμού για τα παρακάτω ζεύγη x_k, y_k.

x_k	0	1	4	6
y_k	1	-1	1	-1

Μετά, υπολογίστε τις τιμές του πολυωνύμου για $x = 2,3,5$.

4. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Lagrange βρείτε ένα συμπτωτικό πολυώνυμο τετάρτου βαθμού για τα παρακάτω ζεύγη x_k, y_k.

x_k	0	1	4	5	6
y_k	0	16	48	88	0

Μετά, υπολογίστε τις τιμές του πολυωνύμου για $x = 2$ και $x = 3$.

5. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Newton προσδιορίστε ένα συμπτωτικό πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, που παίρνει τις τιμές:

x_k	1	2	3	4	5
y_k	1	-1	1	-1	1

6. Να βρεθεί ένα συμπτωτικό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, που να παίρνει τις ίδιες τιμές με την $y(x) = x^4$ για $x = 0,1,2$.

7. Να βρεθεί ένα συμπτωτικό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, που να παίρνει τις ίδιες τιμές με τη συνάρτηση $y(x) = \sqrt{x}$ για $x = 0,1,4$.

8. Να βρεθεί ένα συμπτωτικό πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, που να παίρνει τις τιμές:

x_k	2	4	6	8	10
y_k	0	0	1	0	0

9. Να βρεθεί ένα συμπτωτικό πολυώνυμο εβδόμου βαθμού, που να παίρνει τις τιμές:

x_k	0	1	2	3	4	5	6	7
y_k	1	2	4	7	11	16	22	29

10. Από τον τύπο του Hermite βρείτε ένα εφαπτόμενο πολυώνυμο 3ου βαθμού για τα δεδομένα:

x_k	y_k	y'_k
0	0	0
1	1	1

$Απ.\ p(x) = 2x^2 - x^3$

11. Από τον τύπο του Hermite βρείτε ένα εφαπτόμενο πολυώνυμο με δεδομένα:

x_k	y_k	y'_k
0	0	0
1	1	0
2	0	0

$Απ.\ p(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

12. Βρείτε ένα εφαπτόμενο πολυώνυμο τρίτου βαθμού για τα δεδομένα:

x_k	y_k	y'_k
0	1	-2
1	1	4

$Απ.\ p(x) = x^3 - x^2 + 1$

13. Βρείτε δυο πολυώνυμα δευτέρου βαθμού, το ένα με $p_1(0) = p_1'(0) = 0$ και το άλλο με $p_2(4) = 2$ και $p_2'(4) = 0$, που να περνούν και τα δυο από το σημείο $(2,1)$. Δείξτε ότι $p_1'(2) = p_2'(2)$. Τι σημαίνει αυτό;

14. Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor βαθμού n για τις συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$, με $x_0 = 0$. Για ποιο n το πολυώνυμο Taylor προσεγγίζει αυτές τις συναρτήσεις σωστά μέχρι και το τρίτο δεκαδικό ψηφίο, για $x \in \left(0, \pi/2\right)$;

15. Ενας μεταβλητός αστέρας παρουσιάζει τις εξής μεταβολές φαινομένου μεγέθους ως συνάρτηση του χρόνου

ΧΡΟΝΟΣ (sec)	0.0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0
ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΜΕΓΕΘΟΣ	0.302	0.185	0.106	0.093	0.24	0.579	0.561	0.468	0.302

Ποιο είναι το φαινόμενο μέγεθος τη χρονική στιγμή t = 0.35; Χρησιμοποιείστε splines για να συμπληρώσετε τον πίνακα ώστε να γνωρίζουμε την τιμή του φαινομένου μεγέθους κάθε 0.05sec.

16. Ο παρακάτω πίνακας δίνει το μήκος του τόξου ενός λεπτού της μοίρας στο γεωγραφικό παράλληλο (προσέξτε ότι στον ισημερινό αντιστοιχεί στο ναυτικό μίλι) και την σταθερά της βαρύτητας σε διάφορα γεωγραφικά πλάτη.

Γεωγραφικό Πλάτος	Μήκος 1' της μοίρας στον γεωγραφικό παράλληλο	Σταθερά της βαρύτητας g
0^0	1855.4 m	9.7805 m/sec^2
15^0	1792.0 m	9.7839 m/sec^2
30^0	1608.2 m	9.7934 m/sec^2
45^0	1314.2 m	9.8063 m/sec^2
60^0	930.0 m	9.8192 m/sec^2
75^0	481.7 m	9.8287 m/sec^2
90^0	0.0 m	9.8322 m/sec^2

Να βρεθεί πόσο είναι το μήκος 1' της μοίρας στο γεωγραφικό πλάτος της Θεσ/νίκης (40^0 37') και ποία είναι η τοπική τιμή της σταθεράς της βαρύτητας g.