ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΣΕΡΡΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

Αποστόλης Κουιρουκίδης
Επιστημονικός Συνεργάτης

ΣΕΡΡΕΣ 2005

Αεί ο Θεός ο Μέγας Γεωμετρεί
(Πλάτωνας)

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι σημειώσεις[1] αυτές καλύπτουν την ύλη του μαθήματος Μαθηματικά ΙΙ που διδάσκεται στο Β′ εξάμηνο του τμήματος Πληροφορικής & Επικοινωνιών, του Τ.Ε.Ι. Σερρών. Στο πρώτο κεφάλαιο (Εισαγωγή) γίνεται μία σύντομη ανασκόπηση βασικών εννοιών από την Γεωμετρία. Το κεφάλαιο αυτό έχει σκοπό να αποτελέσει αναφορά για κάποιες βασικές έννοιες που χρειάζονται παρακάτω, παρά να κάνει εξαντλητική παρουσίαση του θέματος της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Στα επόμενα κεφάλαια παρουσιάζονται οι συναρτήσεις, δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών, η διαφορισιμότητά τους, και η ολοκληρωσιμότητά τους (διπλά & τριπλά ολοκληρώματα). Επίσης μελετάμε την βασική διανυσματική ανάλυση που είναι απαραίτητη και σε θέματα Φυσικής.

Παρακάτω γίνεται μία εισαγωγή στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης και δεύτερης τάξης, μαζί με κάποιες στοιχειώδεις μεθόδους αριθμητικής επίλυσής τους. Τέλος εισάγονται οι μιγαδικοί αριθμοί, μαζί με τις βασικές εφαρμογές τους σε προβλήματα Ηλεκτρικών κυλωμάτων.

Συνιστάται ανεπιφύλακτα στους σπουδαστές να κάνουν ευρεία χρήση ανώτερων γλωσσών προγραμματισμού (όπως $C++$) ή/καί σχεδιαστικών πακέτων για την γραφική παράσταση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, καθώς και των αποτελεσμάτων από την αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων. Σε κάθε κεφάλαιο η καλυπτόμενη ύλη επιβάλλει γραφικές παραστάσεις που οξύνουν την σκέψη και απαιτούνται για την καλή κατανόησή της. Η συνδιασμένη χρήση ανωτέρων γλωσσών προγραμματισμού και προγραμμάτων γραφικών στα θέματα που πραγματευόμαστε εδώ, αποτελεί εξαιρετικά χρήσιμη πρακτική.

Απόστολος Κουϊρουκίδης

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Διανύσματα, Συστήματα Συντεταγμένων

Στον τρισδιάστατο Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^3$ ένα σημείο P μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα από τις καρτεσιανές συντεταγμένες του $P(x, y, z)$, ως πρός ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$. Το διάνυσμα θέσης του σημείου είναι

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \tag{1.1.1}$$

όπου τα $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα (με μέτρο μονάδα) κατά μήκος των αξόνων. Υπενθυμίζουμε ότι για ένα διάνυσμα $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ το μέτρο του δίνεται από την

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \tag{1.1.2}$$

Ορίζονται επίσης και τα *συνημίτονα κατεύθυνσης*, ως

$$\begin{aligned}
\xi &:= cos\phi_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
\eta &:= cos\phi_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
\zeta &:= cos\phi_3 = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

όπου (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) είναι οι γωνίες που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{r}$ με τους τρείς άξονες. Οι αριθμοί (ξ, η, ζ) αποτελούν τις συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{r}$.

Το *εσωτερικό γινόμενο* δύο διανυσμάτων ορίζεται ως

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\phi \tag{1.1.4}$$

όπου ϕ είναι η μεταξύ τους γωνία. Εάν δύο διανύσματα είναι κάθετα, το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν. Ισχύει επίσης $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ ενώ σε σχέση με τις συνιστώσες τους, το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δίνεται από

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \tag{1.1.5}$$

Τέλος η προβολή του $\vec{A}$ πάνω στο $\vec{B}$ δίνεται από την

$$\Pi_{\vec{B}}(\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{B}\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \tag{1.1.6}$$

Το *εξωτερικό γινόμενο* δύο διανυσμάτων ορίζεται ως

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|sin\phi\, \hat{n} \tag{1.1.7}$$

όπου το μοναδιαίο $\hat{n}$ είναι κάθετο στο επίπεδο των $\vec{A},\vec{B}$ και η φορά του καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Σε συνάρτηση με τις συνιστώσες τους, το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δίνεται από την

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{x}, & \hat{y}, & \hat{z} \\ A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \end{vmatrix} = \hat{x}(A_2B_3 - A_3B_2) + \\ &+ \hat{y}(A_3B_1 - A_1B_3) + \hat{z}(A_xB_y - A_yB_x) \qquad (1.1.8)\end{aligned}$$

Επίσης το μέτρο του εξωτερικού γινομένου $|\vec{A}\times\vec{B}| = E_{AB}$, δηλ. μας δίνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα. Τέλος αν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά τότε $\vec{A}\times\vec{B} = 0$.

Το *μεικτό γινόμενο* τριών διανυσμάτων ορίζεται ως

$$(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) := \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix} \qquad (1.1.9)$$

Η απόλυτη τιμή του μεικτού γινομένου μας δίνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα τρία διανύσματα. Ετσι αν τρία διανύσματα είναι συνεπίπεδα το μεικτό τους γινόμενο μηδενίζεται, ενώ εάν είναι διάφορο του μηδενός σημαίνει ότι τα τρία διανύσματα μπορούν να αποτελέσουν *βάση*, δηλ. κάθε άλλο διάνυσμα να αναλυθεί ως προς αυτά (να γραφεί ως γραμμικός συνδιασμός τους).

Εκτός από το τρισορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, υπάρχουν και άλλα συστήματα συντεταγμένων με ειδική συμμετρία που πολλές φορές είναι χρήσιμα σε συγκεκριμένα προβλήματα. Οι *κυλινδρικές συντεταγμένες* (r,θ,z) ορίζονται για κάθε σημείο εκτός της αρχής $O(0,0,0)$ και

$$\begin{aligned} x &= rcos\theta \\ y &= rsin\theta \\ z &= z, \;\; r>0, \;\; 0\le\theta<2\pi \qquad (1.1.10)\end{aligned}$$

Για την αρχή έχουμε $r = z = 0$ αλλά το θ είναι απροσδιόριστο. Επίσης οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί δίνονται από την

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \left[\begin{array}{cc} Arctan(y/x), & x>0, y>0 \\ \pi + Arctan(y/x) & x<0 \\ 2\pi + Arctan(y/x) & x>0, y<0 \\ \theta = (\pi/2) & x=0, y>0 \\ \theta = (3\pi/2) & x=0, y<0 \end{array}\right. \qquad (1.1.11)\end{aligned}$$

όπου με $V(u) = Arctan(u)$ συμβολίζουμε τον πρωτεύοντα κλάδο της αντίστροφης εφαπτομένης που φαίνεται στο Σχήμα 1.1.

Σχήμα 1.1: Η συνάρτηση $V(u) = Arctan(u)$.

Τέλος τα μοναδιαία διανύσματα που δείχνουν κατά την διεύθυνση που αυξάνονται οι κυλινδρικές συντεταγμένες δίνονται απο τις

$$\begin{aligned} \hat{r} &= cos\theta\, \hat{x} + sin\theta\, \hat{y} \\ \hat{\theta} &= -sin\theta\, \hat{x} + cos\theta\, \hat{y} \\ \hat{z} &= \hat{z} \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

Ο στοιχειώδης όγκος στις κυλινδρικές συντεταγμένες δίνεται από την $dV = rdrd\theta dz$ ενώ η στοιχειώδης επιφάνεια πάνω σε κύλινδρο ακτίνας R από την $dS = Rd\theta dz$.

Οι *σφαιρικές συντεταγμένες* (r, θ, ϕ) ορίζονται για κάθε σημείο εκτός της αρχής $O(0, 0, 0)$ από τις

$$\begin{aligned} x &= rsin\theta cos\phi \\ y &= rsin\theta sin\phi \\ z &= rcos\theta \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

όπου $r > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ και $0 \leq \phi < 2\pi$. Η αρχή έχει $r = 0$ αλλά τα θ, ϕ είναι απροσδιόριστα. Οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί δίνονται από

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= Arccos(z/r) \\ \phi &= \left[\begin{array}{cc} Arctan(y/x), & x > 0, y > 0 \\ \pi + Arctan(y/x) & x < 0 \\ 2\pi + Arctan(y/x) & x > 0, y < 0 \\ \theta = (\pi/2) & x = 0, y > 0 \\ \theta = (3\pi/2) & x = 0, y < 0 \end{array} \right. \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

όπου με $V(u) = Arccos(u) : [-1,1] \rightarrow [0,\pi]$ συμβολίζουμε τον πρωτεύοντα κλάδο της συνάρτησης του αντίστροφου συνημιτόνου που φαίνεται στο Σχήμα 1.2.

Σχήμα 1.2: Η συνάρτηση $V(u) = Arccos(u)$.

Τα μοναδιαία διανύσματα συνδέονται με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \hat{r} &= sin\theta cos\phi \, \hat{x} + sin\theta sin\phi \, \hat{y} + cos\theta \, \hat{z} \\ \hat{\theta} &= cos\theta cos\phi \, \hat{x} + cos\theta sin\phi \, \hat{y} - sin\theta \, \hat{z} \\ \hat{\phi} &= -sin\phi \, \hat{x} + cos\phi \, \hat{y} \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

Ο στοιχειώδης όγκος στις σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από την $dV = r^2 sin\theta dr d\theta d\phi$ ενώ η στοιχειώδης επιφάνεια πάνω σε σφαίρα ακτίνας R από την $dS = R^2 sin\theta d\theta d\phi$.
Τα παραπάνω συστήματα συντεταγμένων και τα μοναδιαία τους διανύσματα φαίνονται στο Παράρτημα Α'.

1.2 Αναλυτική Γεωμετρία στο Επίπεδο και τον Χώρο

Μία καμπύλη στο επίπεδο περιγράφεται γενικά από μία σχέση της μορφής $F(x,y) = 0$. Εάν μπορέσουμε να επιλύσουμε την σχέση αυτή ως πρός $y = f(x)$ τότε έχουμε καμπύλη στο επίπεδο που είναι και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Μία ισοδύναμη έκφραση για μία καμπύλη, δοσμένη σε παραμετρική μορφή, είναι η

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \quad t \in [a,b]. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Γνωστές καμπύλες στο επίπεδο είναι οι λεγόμενες *κωνικές τομές*, που είναι δευτέρου βαθμού ως πρός τις συντεταγμένες (x, y). Οταν γραφούν σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων λαμβάνουν μία από τις μορφές που φαίνονται στον Πίνακα 1.1. Εδώ $R > 0$ είναι η ακτίνα του κύκλου και $a, b > 0$ οι ημιάξονες της έλλειψης και της υπερβολής αντίστοιχα.

Κύκλος	$x^2 + y^2 = R^2$
Έλλειψη	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Παραβολή	$y^2 = 2px,\ x^2 = 2py$
Υπερβολή	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$

Πίνακας 1.1: Οι κωνικές τομές.

Στον χώρο μία επιφάνεια περιγράφεται γενικά από μία σχέση της μορφής $G(x, y, z) = 0$. Εάν μπορέσουμε να επιλύσουμε την σχέση αυτή ως πρός $z = g(x, y)$ τότε έχουμε στον χώρο μία επιφάνεια που είναι και γραφική παράσταση της εν-λόγω συνάρτησης *δύο ανεξάρτητων μεταβλητών*. Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε μία επιφάνεια στο χώρο σε παραμετρική μορφή ως

$$\begin{aligned} x &= x(t, s) \\ y &= y(t, s) \\ z &= z(t, s), \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Μπορούμε στα παραπάνω να αντιπαραβάλλουμε το γεγονός ότι μία καμπύλη στον *χώρο* δίνεται γενικά σε παραμετρική μορφή ως $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in \mathbb{R}$.

Μία σημαντική κατηγορία επιφανειών στον χώρο είναι οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού οι οποίες σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων λαμβάνουν μία από τις παρακάτω μορφές:

- **Ελλειψοειδές**
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1.2.3}$$
- **Μονόχωνο Υπερβολοειδές**
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1.2.4}$$

- **Δίχωνο Υπερβολοειδές**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{1.2.5}$$

- **Κώνος**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2 \tag{1.2.6}$$

- **Ελλειπτικό Παραβολοειδές**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\gamma z \tag{1.2.7}$$

- **Υπερβολικό Παραβολοειδές**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\gamma z \tag{1.2.8}$$

- **Παραβολικός Κύλινδρος**

$$y^2 = 2px \tag{1.2.9}$$

- **Ελλειπτικός Κύλινδρος**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.2.10}$$

- **Υπερβολικός Κύλινδρος**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.2.11}$$

- **Επίπεδο**

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1.2.12}$$

Η απόσταση δύο σημείων $A(A_1, A_2, A_3)$ και $B(B_1, B_2, B_3)$ δίνεται από την σχέση

$$d(A, B) = \left[\sum_{i=1}^{3}(A_i - B_i)^2\right]^{1/2} \tag{1.2.13}$$

ενώ η απόσταση του σημείου $P_1(x_1, y_1, z_1)$ από το επίπεδο της Εξ. (1.2.12) από την

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{1.2.14}$$

Μία καμπύλη στον χώρο μπορεί επίσης να εκφραστεί ως η τομή δύο επιφανειών, $G_1(x,y,z)=0$ και $G_2(x,y,z)=0$. Η εξίσωση τώρα της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $P_1(x_1,y_1,z_1)$ και είναι παράλληλη πρός το διάνυσμα $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ δίνεται από την

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}, \quad |\vec{a}|\neq 0 \tag{1.2.15}$$

ενώ η ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία ($P_1 \neq P_2$) δίνεται από την σχέση

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{1.2.16}$$

Τέλος μία ευθεία μπορεί να οριστεί ως η τομή των δύο επιπέδων $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, \quad (i=1,2)$. Ας ορίσουμε $a=(B_1C_2-C_1B_2)$, $b=(C_1A_2-A_1C_2)$ και $c=(A_1B_2-A_2B_1)$ και έστω ότι (χωρίς βλάβη της γενικότητας) $c\neq 0$. Τότε η παραμετρική μορφή της ευθείας μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} x &= x_1+ta \\ y &= y_1+tb \\ z &= tc, \quad t\in\mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

όπου τα (x_1,y_1) είναι λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} A_1x_1+B_1y_1+D_1=0 \\ A_2x_1+B_2y_1+D_2=0 \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

1.3 Ασκήσεις

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v}_1=\frac{1}{\sqrt{33}}(2\hat{x}+2\hat{y}+5\hat{z})$, $\vec{v}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$, $\vec{v}_3=\frac{1}{\sqrt{11}}(3\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$. Να αποδειχθεί ότι αποτελούν μοναδιαία βάση και να αναλυθεί ως πρός αυτή τη βάση το $\vec{a}=3\hat{x}+5\hat{y}+4\hat{z}$.

2. Δίνεται το σημείο $P(-1,-4,-6)$. Να βρεθούν τα σημεία P_1, P_2, P_3 και P_4 τα οποία είναι συμμετρικά του P ως πρός τα επίπεδα Oxy, Oyz, Ozx και την αρχή O του $Oxyz$ αντίστοιχα.

3. Δίνονται τα σημεία Β, Γ πάνω στον άξονα Ox με τετμημένη 2 και $\lambda^2-10\lambda+23$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί το λ ώστε το διάνυσμα ΒΓ να έχει μέτρο μονάδα και η τετμημένη του σημείου Γ.

4. Να βρεθούν τα συνημίτονα κατεύθυνσης, τα μέτρα και οι γωνίες με τους άξονες του συστήματος $Oxyz$ των διανυσμάτων $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ και $(1,0,-1)$. Επίσης να βρεθεί η μεταξύ τους γωνία.

5. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}(2,-3,-1)$ και $\vec{b}(-6,9,3)$ είναι παράλληλα. Να βρεθεί το εμβαδόν E_{ab} του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα $\vec{a}(1,0,0)$ και $\vec{b}(2,2,0)$.

6. Για δύο συνεπίπεδα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ δείξτε ότι η μεγάλη δ_1 και η μικρή δ_2 διαγώνιος του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν δίνονται από τίς

$$\delta_1^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|cos\phi$$
$$\delta_2^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|cos\phi$$

όπου ϕ η μεταξύ τους γωνία.

7. Δείξτε ότι τα $\vec{a}(1,1,1)$, $\vec{b}(2,2,2)$ και $\vec{c}(3,4,5)$ είναι συνεπίπεδα. Να αναλυθεί το ένα από αυτά σε σχέση με τα άλλα δύο.

8. Να βρεθεί μία τριάδα από τα $\vec{a}(5,6,1)$, $\vec{b}(3,1,2)$, $\vec{c}(1,-1,1)$ και $\vec{d}(4,5,-1)$ που σχηματίζει βάση. Να αναλυθεί το άλλο διάνυσμα ως πρός αυτήν.

9. Να βρεθεί διάνυσμα μοναδιαίο και κάθετο στα $v_1(1,-1,1)$ και $\vec{v}_2(1,1,-1)$.

10. Δείξτε τις παρακάτω ταυτότητες

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= -\vec{b}\times\vec{a} \\
\vec{a}\times\vec{a} &= 0 \\
\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) &= \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) \\
\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \\
(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= (\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c} - (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}
\end{aligned}$$

11. Να βρείτε τις συντεταγμένες του $P(1,1,1)$ στις κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

12. Να επιλυθούν οι σχέσεις (1.1.12) και (1.1.15) ως προς τα μοναδιαία διανύσματα των καρτεσιανών συντεταγμένων και να γραφεί το διάνυσμα θέσης της Εξ. (1.1.1) στις αντίστοιχες συντεταγμένες. Εφαρμογή: Το σημείο $P(1,1,0)$.

13. Να γραφούν παραμετρικές εξισώσεις για τον κύκλο, την έλλειψη, την παραβολή $y^2 = 2px$ και την υπερβολή, ως επίπεδες καμπύλες.

14. Εστω η έλλειψη και $E^{'}(-c,0)$ $(c^2 = a^2 - b^2)$ η εστία της που βρίσκεται στο αρνητικό τμήμα του άξονα Ox. Θεωρώντας το σημείο αυτό αρχή συστήματος πολικών συντεταγμένων, θέστε $x + c = rcos\theta$, $\;y = rsin\theta$

στην καρτεσιανή εξίσωση της έλλειψης και βρείτε την πολική της εξίσωση ως

$$r = \frac{(b^2/a)}{1 - ecos\theta}$$

όπου $e = (c/a)$ η εκκεντρότητά της. Αν ο Ηλιος είναι στην εστία της έλλειψης τότε η τροχιά της Γης περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες από αυτή την σχέση.

15. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των σημείων $O(0,0,0)$ και $(acost, bsint, 0)$, $t \in [0, 2\pi)$. Για ποιά σημεία γίνεται μέγιστη; Ελάχιστη;

16. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{V}(A, B, C)$ είναι κάθετο στο επίπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $P(0, -2, 0)$, $Q(-1, -2, -3)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

17. Βρείτε το επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ και $C(0, 0, 3)$. Ποιά είναι η διανυσματική μονάδα που είναι κάθετη σ′ αυτό; Να βρεθεί η απόσταση της αρχής των αξόνων από το επίπεδο.

18. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}(3, 4, 5)$ και $\vec{b}(0, 6, 1)$. Να γραφεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη πρός το $\vec{a} \times \vec{b}$. Να γραφεί επίσης η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από την παραπάνω ευθεία και είναι παράλληλο πρός το διάνυσμα $\vec{c}(1, 1, 1)$.

19. Εστω η ευθεία που ορίζεται ως τομή των επιπέδων $2x + 3y + z - 5 = 0$ και $6x + 7y + 8z + 6 = 0$. Να γραφούν οι παραμετρικές της εξισώσεις. Επίσης να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη προς την παραπάνω και διέρχεται από το σημείο τομής των επιπέδων $x + y = 4$, $y + z = 6$ και $z + x = 12$.

20. Να υπολογιστεί με ολοκλήρωση ο όγκος και η επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας R.

Κεφάλαιο 2

Πραγματικές Συναρτήσεις

2.1 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Όταν ένα μεταβλητό μέγεθος εξαρτάται από άλλα μεταβλητά μεγέθη (δύο ή περισσότερα) τότε ορίζεται μία συνάρτηση πολλών μεταβλητών. Σαν παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε τον όγκο ενός ιδανικού αερίου, που αποτελεί συνάρτηση δύο μεταβλητών $V = V(p, T) = nRT/p$, δηλ. της πίεσης του και της θερμοκρασίας. Εδώ το n =αριθμός moles και το $R = 0.082\, litr{\cdot}atm/grad{\cdot}moles$ νοούνται ως σταθερές.

Η μελέτη της φυσιολογίας ενός ανθρώπου μας δείχνει ότι η επιφάνεια του σώματός του $S(m^2)$ σε τ. μέτρα εξαρτάται από το βάρος του $W(Kg)$ σε κιλά και το ύψος του $H(cm)$ σε εκατοστά μέσω της σχέσης $S = S(W, H) = 0.007184W^{0.425}H^{0.725}$.

Τέλος ο νόμος της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα ανάμεσα σε δύο μάζες M_1, M_2 δίνεται από την σχέση $F(x, y, z) = -GM_1M_2/(x^2 + y^2 + z^2)$. Τα παραπάνω είναι παραδείγματα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

Αν περιοριστούμε σε συναρτήσεις δύο μεταβλητών τότε μπορούμε να συμβολίσουμε μία τέτοια συνάρτηση με

$$z = f(x, y), \tag{2.1.1}$$

όπου x, y είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές. Η γραφική παράστασή της στον χώρο ως πρός ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων $Oxyz$, είναι γενικά μία επιφάνεια που τέμνεται, από μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα Oz, κατά το πολύ ένα σημείο (μονότιμη συνάρτηση). Μία συνάρτηση τριών μεταβλητών συμβολίζεται με $w = g(x, y, z)$, αλλά δεν έχουμε, στην περίπτωση αυτή, ένα εύκολο τρόπο για την γραφική της απεικόνιση στον χώρο.

Ονομάζουμε *ισοσταθμικές καμπύλες* μίας συνάρτησης δύο μεταβλητών τις καμπύλες πάνω στο επίπεδο Oxy που προκύπτουν από τομή της επιφάνειας με την οικογένεια των οριζόντιων επιπέδων $z = k,\ k \in \mathbb{R}$. Θα έχουμε λοιπόν την μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών $f(x, y) = k,\ k \in \mathbb{R}$ και σχεδιάζοντας ορισμένες από αυτές στο επίπεδο Oxy μπορούμε να έχουμε καλύτερη εποπτεία για την συμπεριφορά της συνάρτησης στον χώρο.

Επίσης ορίζουμε ως *$x-$προφίλ* της f, την οικογένεια των καμπυλών πάνω στο επίπεδο Oyz που προκύπτουν ως τομή της f με τα επίπεδα $x = x_0$. Αρα θα είναι $z = f(x_0, y),\ x_0 \in \mathbb{R}$. Παρόμοια ορίζεται το *$y-$προφίλ*.

Παράδειγμα 2.1: Εστω το ελλειπτικό παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$. Οι ισοσταθμικές καμπύλες $x^2 + y^2 = k \geq 0$ είναι κύκλοι, ενώ οι καμπύλες που συνιστούν το $x-$προφίλ της συνάρτησης, πάνω στο επίπεδο Oyz, δίνονται από την $z = y^2 + x_0^2,\ x_0 \in \mathbb{R}$. Εδώ έχουμε παραβολές.

2.2 Τόποι, Πεδία Ορισμού

Επειδή το ζεύγος των ανεξάρτητων μεταβλητών (x, y), σε μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, γενικά ανήκει στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε συνοπτικά κάποιες ιδιότητες των υποσυνόλων του. Κατ΄ αρχήν η απόσταση δύο σημείων στο επίπεδο είναι

$$d(P, P') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \tag{2.2.1}$$

Ονομάζουμε $\delta-$*περιοχή* ενός σημείου P_0 το σύνολο

$$\Pi(P_0, \delta) = \{P(x, y)/d(P, P_0) < \delta\} \tag{2.2.2}$$

Αντιστοίχως *τετραγωνική* δ-*περιοχή* ονομάζουμε το σύνολο

$$\Pi_{\square}(P_0, \delta) = \{(x, y)/|x - x_0| < \delta,\ |y - y_0| < \delta\} \tag{2.2.3}$$

Ανοικτό σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζουμε το σύνολο που για κάθε σημείο του P_0 υπάρχει περιοχή $\Pi(P_0, \delta)$ που να περιέχεται εξ΄ ολοκλήρου σ΄ αυτό, δηλ. $\Pi(P_0, \delta) \subset D$.
Συμπλήρωμα ενός συνόλου ονομάζουμε το $C(D) = \mathbb{R}^2 - D$.
Κλειστό ονομάζουμε ένα σύνολο όταν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό σύνολο.
Ενα σύνολο D ονομάζεται *συναφές* αν γιά κάθε ζεύγος σημείων του P_1, P_2 υπάρχει τεθλασμένη γραμμή με πεπερασμένο πλήθος τμημάτων που τα ενώνει και ανήκει εξ΄ ολοκλήρου στο D.
Τόπος ονομάζεται ένα συναφές υποσύνολο του επιπέδου. Οι τόποι με τους οποίους θα ασχοληθούμε κυρίως εδώ, μπορούν να γραφούν σε μία από τις δύο παρακάτω μορφές

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y)/a \leq x \leq b,\ \ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\} \\ D_2 &= \{(x, y)/g_1(y) \leq x \leq g_2(y),\ \ c \leq y \leq d\} \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Ενας τόπος θα λέγεται *φραγμένος* αν υπάρχει σταθερά M, ώστε για κάθε ζεύγος σημείων του να έχουμε $d(P_1, P_2) < M$.

Ενα σημείο P_0 θα ονομάζεται *συνοριακό σημείο* του D, αν κάθε δ-περιοχή του σημείου αυτού περιέχει σημεία που ανήκουν στον τόπο, καθώς και σημεία που δέν ανήκουν σ΄ αυτόν. Τέλος το σημείο P_0 θα ονομάζεται *σημείο συσσώρευσης* του τόπου D, αν κάθε δ-περιοχή του περιέχει σημεία που ανήκουν στον τόπο.

Το *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης της Εξ. 2.1.1 είναι συνήθως ενας τόπος που συμβολίζεται με $D[f]$. Γενικά αυτός προκύπτει ύστερα από επίλυση κάποιων περιορισμών που επιβάλλει η μορφή της συνάρτησης. Οι κυριότεροι φαίνονται στον Πίνακα 2.1.

Παράδειγμα 2.2: Αν $f_1(x, y) = ln(1 - x^2 - y^2)$ όπου με ln συμβολίζουμε τον νεπέρειο λογάριθμο, τότε $D[f_1] = \{(x, y)/x^2 + y^2 < 1\}$, δηλ. το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

Μορφή	Περιορισμός
$logF(x,y)$	$F(x,y) > 0$
$1/F(x,y)$	$F(x,y) \neq 0$
$\sqrt[2n]{F(x,y)}$	$F(x,y) \geq 0$
$Arcsin(F(x,y))$	$\lvert F(x,y)\rvert \leq 1$

Πίνακας 2.1: Περιορισμοί στο πεδίο ορισμού.

Αν $f_2(x,y) = 1/(1-x^2-y^2)$ τότε το $D[f_2]$ ταυτίζεται με όλο το επίπεδο εκτός των σημείων του μοναδιαίου κύκλου.
Τέλος, όταν έχουμε πολλούς περιορισμούς, ως πεδίο ορισμού προκύπτει ο τόπος που τους ικανοποιεί ταυτόχρονα όλους. Αν π.χ. $f_3(x,y) = xln(y-1) + (1-x^2)^{1/2}$ τότε $D[f_3] = \{(x,y)/y > 1,\ \& -1 \leq x \leq 1\}$ δηλ. η λωρίδα του επιπέδου ανάμεσα στις ευθείες $x = \pm 1$ και πάνω από την ευθεία $y = 1$.

2.3 Όρια

Θα λέμε ότι μία συνάρτηση $z = f(x,y)$ έχει όριο τον αριθμό k, καθώς το σημείο $P(x,y)$ πλησιάζει ένα συγκεκριμένο σημείο $P_0(x_0,y_0)$ και θα το συμβολίζουμε ως

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y) = k \tag{2.3.1}$$

αν για κάθε αριθμό $\epsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρό) μπορούμε να βρούμε ένα αριθμό $\delta = \delta(P_0,\epsilon) > 0$ τέτοιον ώστε για όλα τα σημεία $P(x,y)$ που ικανοποιούν την $d(P,P_0) < \delta$, να έχουμε $|f(x,y) - k| < \epsilon$. Ο ορισμός αυτός μας λέει ότι πρέπει, καθώς πλησιάζουμε το σημείο P_0 (ανεξαρτήτως διαδρομής!), οι τιμές της συνάρτησης να προσεγγίζουν το k. Ο ορισμός αυτός βοηθάει μερικές φορές και σε αποδείξεις ορίων.

Παράδειγμα 2.3: Δείξτε ότι $\lim_{P\to P_0} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$ όπου $P_0(0,0)$.
Δεδομένου κάποιου $\epsilon > 0$ πρέπει να προσδιορίσουμε ένα $\delta > 0$ ώστε όταν $d(P,P_0) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ να ισχύει

$$|f(x,y) - k| = |\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0| < \epsilon$$

Αλλά $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$ οπότε $x^2 \le (x^2+y^2)$ και $y^2 \le (x^2+y^2)$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη προκύπτει ότι $|f(x,y) - k| \le (x^2+y^2) < \delta^2$ και συνεπώς έχουμε την ζητούμενη ανισότητα, αν επιλέξουμε $\delta = \delta(\epsilon) = \sqrt{\epsilon}$.

Θεώρημα: Το όριο εάν υπάρχει είναι μοναδικό.
Απόδειξη: Εάν $\lim_{P\to P_0} f(x,y) = k_1$ και $\lim_{P\to P_0} f(x,y) = k_2$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ ώστε όταν $d(P,P_0) < \delta_1$ (αντίστοιχα $d(P,P_0) < \delta_2$) να έχουμε $|f - k_1| < \epsilon$ (αντίστοιχα $|f - k_2| < \epsilon$). Αρα άν επιλέξουμε $\delta = min(\delta_1,\delta_2)$ τότε

$$|k_1 - k_2| = |f - k_2 - (f - k_1)| \le |f - k_1| + |f - k_2| < 2\epsilon$$

όταν $d(P,P_0) < \delta$ και λόγω του ότι το ϵ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό θα έχουμε $k_1 = k_2$. $\square$
Χρήσιμη πρακτική συνέπεια του θεωρήματος είναι ότι αν για δύο διαφορετικούς δρόμους προσέγγισης του σημείου P_0 προκύπτουν διαφορετικές οριακές τιμές, τότε το όριο δεν υπάρχει. Ισοδύναμος είναι και ο ορισμός που κάνει χρήση μιας ακολουθίας σημείων στο $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός: Αν το P_0 είναι σημείο συσσώρευσης του $D[f]$, τότε η Εξ. (2.3.1) είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο γεγονός: Για κάθε ακολουθία σημείων $\{P_n,\ n = 1,2,...\}$ που συγκλίνει στο P_0 και ανήκει στο πεδίο ορισμού, η ακολουθία $\{f(P_n)\}$ των τιμών της συνάρτησης συγκλίνει στο k.

Παράδειγμα 2.4: Δείξτε ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ δέν υπάρχει.
Έστω η ακολουθία σημείων $P_n(x_n,y_n)$ τέτοια ώστε $y_n = mx_n, \quad m \in \mathbb{R}$

δηλ. προσεγγίζουμε την αρχή μέσω ευθειών που διέρχονται από αυτήν. Τότε $f(x,y) = m/(1+m^2)$ και συνεπώς το όριο δεν υπάρχει γιατί η τιμή του εξαρτάται από τον διαδρομή προσέγγισης της αρχής (δηλ. από το m).

Παράδειγμα 2.5: Δείξτε ότι το όριο της $f(x,y) = xy^2/(x^2+y^4)$ στην αρχή, δεν υπάρχει.
Κατά μήκος της ευθείας $y = x$ έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x^4} = 0$$

ενώ κατά μήκος της καμπύλης $x = y^2$ έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$$

Αρα το όριο δεν υπάρχει.

Ορισμός: Όριο στο άπειρο. Θα λέμε ότι $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y) = k$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε όταν $\sqrt{x^2+y^2} > \delta$ να έχουμε $|f(x,y) - k| < \epsilon$.

Παράδειγμα 2.6: Αν $f(x,y) = 1 + \frac{1}{x^2+y^2}$ δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} = 1$.
Πράγματι για να έχουμε $|f(x,y) - 1| = 1/(x^2+y^2) < \epsilon$ αρκεί να επιλέξουμε $\delta(\epsilon) = 1/\sqrt{\epsilon}$.
Συνήθως για να βρούμε το όριο μίας συνάρτησης στο άπειρο, μελετάμε το ισοδύναμο όριο

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y) = \lim_{(w,z)\to(0,0)} f(\frac{1}{w}, \frac{1}{z}) \tag{2.3.2}$$

Παράδειγμα 2.7: Το παρακάτω όριο

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2+2}{x^2+y^2} &= \lim_{(w,z)\to(0,0)} \frac{1/w^2+1/z^2+2}{1/w^2+1/z^2} = \\ &= 1 + 2\lim_{(w,z)\to(0,0)} \frac{w^2z^2}{w^2+z^2} = 1 + 2\cdot 0 = 1\end{aligned}$$

Διαδοχικά Όρια. Τα διαδοχικά όρια αναφέρονται σε συγκεκριμένες διαδρομές προσέγγισης του οριακού σημείου P_0, δηλ. πρώτα παράλληλα ως πρός ένα άξονα και κατόπιν ως πρός τον άλλο. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{y\to y_0}[\lim_{x\to x_0} f(x,y)] \\ k_2 &= \lim_{x\to x_0}[\lim_{y\to y_0} f(x,y)] \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Ισχύουν γενικά τα ακόλουθα:

1. Αν υπάρχει το k και υπάρχουν *επίσης* και τα $k_1,\ k_2$ τότε $k = k_1 = k_2$ (Άσκηση 7).
2. Απο μόνο του το k δεν εγγυάται την ύπαρξη των $k_1,\ k_2$ (Άσκηση 8).
3. Όταν τα διαδοχικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα ($k_1 = k_2$) δεν σημαίνει ότι απαραίτητα υπάρχει και το όριο k (Άσκηση 9).
4. Όταν $k_1 \neq k_2$ τότε το k δεν υπάρχει (Άσκηση 10).
5. Μπορεί να υπάρχει ένα από τα $k_1,\ k_2$ και το k, χωρίς να υπάρχει το άλλο διαδοχικό όριο (Άσκηση 11).

Το όριο του αθροίσματος, διαφοράς, γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων καθώς και τα όρια των ρίζων, ακολουθούν σε γενικές γραμμές τους ίδιους κανόνες με αυτά των συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Εδώ θα κλείσουμε την ενότητα με κάποιες πιό ενδιαφέρουσες ιδιότητες

Ι1. Αν ισχύουν $|f(x,y) - k| \leq |g(x,y)|$ και $\lim_{P\to P_0} g(x,y) = 0$ τότε θα έχουμε και $\lim_{P\to P_0} f(x,y) = k$.

Ι2. Το γινόμενο μηδενικής συνάρτησης επί φραγμένη είναι μηδενική. Αν $f(x,y) = g(x,y)h(x,y)$, $|g(x,y)| \leq M$ (φραγμένη) και $\lim_{P\to P_0} h(x,y) = 0$ τότε θα είναι και $\lim_{P\to P_0} f(x,y) = 0$ (Άσκηση 12).

Ι3. Αν $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ και ισχύουν ταυτόχρονα ότι $\lim_{P\to P_0} f(x,y) = k$ και $\lim_{P\to P_0} h(x,y) = k$ τότε θα είναι και $\lim_{P\to P_0} g(x,y) = k$ (Άσκηση 13).

2.4 Συνέχεια, Ομοιόμορφη Συνέχεια

Μία συνάρτηση είναι *συνεχής* σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού του αν το όριο της στο σημείο αυτό συμπίπτει με την αριθμητική της τιμή, δηλ.

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y) = k = f(x_0,y_0) \tag{2.4.1}$$

Ισχύουν τα παρακάτω:

Α. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο P_0 τότε υπάρχει περιοχή του σημείου αυτού στην οποία η f είναι φραγμένη.

Β. Αν η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο τόπο τότε είναι φραγμένη.

Αν μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο τότε λέγεται ασυνεχής. Οι πιθανές περιπτώσεις είναι: 1. να μήν υπάρχει το όριο, 2. η αριθμητική τιμή της συνάρτησης να είναι διαφορετική του ορίου και 3. να μην ορίζεται η συνάρτηση στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα 2.8: Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} (1+x^2)\left(\frac{siny}{y}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ \lambda & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

να είναι συνεχής. Εύκολα βρίσκουμε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 = \lambda$.

Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός τόπου τότε λέμε ότι είναι συνεχής στον τόπο αυτόν. Η έννοια της συνέχειας είναι τοπική έννοια, δηλ. αναφέρεται συνήθως σε ένα σημείο. Η έννοια της *ομοιόμορφης συνέχειας* έχει καθολικό χαρακτήρα στα πλαίσια ενός τόπου.

Αν P_0 τυχαίο σημείο του $D[f]$ τότε γενικά στον ορισμό της συνέχειας έχουμε $|f(P) - f(P_0)| < \epsilon$ εάν επιλέξουμε $d(P,P_0) < \delta$ όπου γενικά το $\delta = \delta(P_0, \epsilon)$. Παρατηρούμε ότι ο "ρυθμός" προσέγγισης της οριακής τιμής εξαρτάται από το σημείο P_0. Αν τώρα ισχύει $\delta = \delta(\epsilon)$, *ανεξαρτήτως* του σημείου P_0 λέμε ότι η συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής στον τόπο D.

Ισοδύναμος είναι και ο ορισμός:
Η $f(x,y)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στον $D \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε $\forall P_1, P_2 \in D$ με $d(P_1,P_2) < \delta$ να έχουμε $|f(P_1) - f(P_2)| < \epsilon$.

2.5 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τις τιμές των παρακάτω συναρτήσεων στα εξής σημεία: $f_1(x,y) = 2x^2y + x + y^3$ στα $(1,0)$, $(-2,1)$, $(1,\frac{1}{2})$ και $f_2(x,y) = xlny + e^{-xy}$ στα $(1,1)$, $(0,\frac{1}{2})$, $(-1,2)$. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$z = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$$

   έχει σταθερή τιμή πάνω στον κύκλο ακτίνας R. Υπολογίστε την.

2. Βρείτε τις ισοσταθμικές καμπύλες και τις καμπύλες του $x,y-$προφίλ για την $z = 2x + 3y$. Το ίδιο για το ελλειψοειδές, τον κώνο, το ελλειπτικό και υπερβολικό παραβολοειδές, όπως αυτά δίνονται στο προηγούμενο κεφάλαιο.

3. Να βρεθούν και να σχεδιαστούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων $z = f(x,y)$:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{x-y}} + \frac{1}{\sqrt{x+y}} + 2 \\ z &= \sqrt{cos(x^2+y^2)} \\ z &= 3y^2 - 9x + 5ln(x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= x/(y^2-4x) \\
z &= \sqrt{x^2+y^2-4}\, ln(16-x^2-y^2) \\
z &= (x^2-y^2)^{1/2}+(x^2-y^2-1)^{1/2} \\
z &= ln(x+y) \\
z &= ln(x^2+y) \\
z &= Arccos(xy)
\end{aligned}$$

4. Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι $\lim_{(x,y)\to(1,2)}[x^2-2x+y]=1$, και επίσης $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ για τις $f_1(x,y)=(x^3+y^3)/(x^2+y^2)$, $f_2(x,y)=(2x^3-y^3)/(x^2+y^2)$ και $f_3(x,y)=(x^4+y^4)/(x^2+y^2)$.

5. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια στην αρχή $O(0,0)$ για τις παρακάτω συναρτήσεις, δείχνοντας ότι εξαρτώνται από την διαδρομή.

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{xy+y^3}{x^2+y^2},\ \ f_2=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, \\
f_3 &= \frac{xy^3}{x^2+y^6},\ \ f_2=\frac{x^2y^4}{(x^2+y^4)^3},
\end{aligned}$$

6. Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=0$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $sin(u)\simeq u-u^3/6$ και με κατάλληλη αντικατάσταση ότι

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2+1}=2$$

7. Δείξτε ότι $k=k_1=k_2$ για την $f(x,y)=2x+3y$ και $P_0(1,2)$.

8. Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι $k=0$ για την $f(x,y)=xsin(1/y)+ysin(1/x)$ στο $P_0(0,0)$ ενώ κανένα από τα διαδοχικά όρια δεν υπάρχει λόγω της ανυπαρξίας του ορίου $\lim_{x\to 0} sin(1/x)$!.

9. Δείξτε ότι αν $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)$ τότε $k_1=k_2=0$ στο σημείο $P_0(0,0)$ αλλά το όριο k δεν υπάρχει.

10. Για την

$$f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$$

δείξτε ότι $k_1=-1$, $k_2=1$ και άρα το όριο k δεν υπάρχει.

11. Για την $f(x,y) = xsin(1/y)$ δείξτε με βάση τον ορισμό ότι $k = 0,\ k_1 = 0$, αλλά ότι το k_2 δεν υπάρχει.

12. Δείξτε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} sin(x^2+y^2)\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = 0.$$

13. Αν $1 \leq f(x,y) \leq sin(x+y)/(x+y)$ δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

14. Μελετήστε την συνέχεια των συναρτήσεων

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{sinxsiny} & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

15. Ομοίως την συνέχεια της

$$f(x,y) = \begin{cases} (1+y^2)\frac{sinxcosx}{2x} & (x,y) \neq (0,0) \\ \lambda & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

16. Ομοίως την συνέχεια της

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

17. Μελετήστε την ομοιόμορφη συνέχεια των παρακάτω συναρτήσεων $z = f(x,y)$ στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$: $z = x^2+y^2$, $z = x+2y+y^2$, $z = x^2+xy$, $z = x+2y$, $z = x+y^2$.

18. Δείξτε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3 - x^2 + x - 2xy + 2y - 1}{x-1} = 0$$

Κεφάλαιο 3

Παραγώγιση

3.1 Μερικές Παράγωγοι

Η έννοια της παραγώγου, όπως την γνωρίζουμε από τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, γενικεύεται και για συναρτήσεις δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών μέσω της έννοιας της *μερικής παραγώγου*. Αν $P_0(x_0, y_0)$ είναι σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $f(x, y)$ τότε οι μερικές παράγωγοι της f ως πρός x, y στο σημείο αυτό, ορίζονται ως οι αριθμοί

$$\begin{aligned} f'_x(P_0) = f'_x(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ f'_y(P_0) = f'_y(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Δηλαδή κατά την παραγώγιση ως πρός μία μεταβλητή, κρατάμε σταθερή την άλλη (ή τις άλλες). Η μερική παράγωγος $f'_x(P_0)$ μας δίνει την κλίση της εφαπτόμενης στο σημείο P_0, της καμπύλης που προκύπτει ως τομή της $z = f(x, y)$ με το επίπεδο $y = y_0$. Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και για την $f'_y(P_0)$ σε σχέση με το επίπεδο $x = x_0$. Αν ορίζονται οι παράγωγοι σε κάθε σημείο ενός τόπου D, τότε έχουμε τις συναρτήσεις των μερικών παραγώγων πρώτης τάξης που συμβολίζονται και ως

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ f'_y(x, y) &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Οι ανώτερης τάξης μερικές παράγωγοι λαμβάνονται απ' ευθείας με διαδοχικές παραγωγίσεις. Ετσι οι δεύτερης τάξης παράγωγοι είναι οι $f_{xx} = (\partial^2 f/\partial x^2)$, $f_{yy} = (\partial^2 f/\partial y^2)$ καθώς και οι μικτές $f_{xy} = (\partial^2 f/\partial y \partial x)$ και $f_{yx} = (\partial^2 f/\partial x \partial y)$. Ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα (Schwarz): Αν σε κάποιο τόπο D υπάρχουν και είναι συνεχείς οι f_x, f_y, f_{yx} τότε το ίδιο ισχύει και για την f_{xy} και έχουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{3.1.3}$$

Παράδειγμα 2.1: Με βάση τον ορισμό βρείτε τις παραγώγους πρώτης τάξης της $f(x, y) = sin(xy)$ στο σημείο $P_0(0, \pi/2)$. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} f'_x(P_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, \pi/2) - f(0, \pi/2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin(\frac{\pi}{2}\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\pi}{2} \\ f'_y(P_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \pi/2 + \Delta y) - f(0, \pi/2)}{\Delta y} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.2: Βρείτε τις παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης για την $f(x, y) = e^{-2x} siny$. Θα έχουμε $(\partial f/\partial x) = -2e^{-2x} siny$ και $(\partial f/\partial y) =$

$e^{-2x}cosy$ για τις παραγώγους πρώτης τάξης ενώ $(\partial^2 f/\partial x^2) = 4e^{-2x}siny$, $(\partial^2 f/\partial x\partial y) = -2e^{-2x}cosy$ και $(\partial^2 f/\partial y^2) = -e^{-2x}siny$ για τις παραγώγους δεύτερης τάξης.

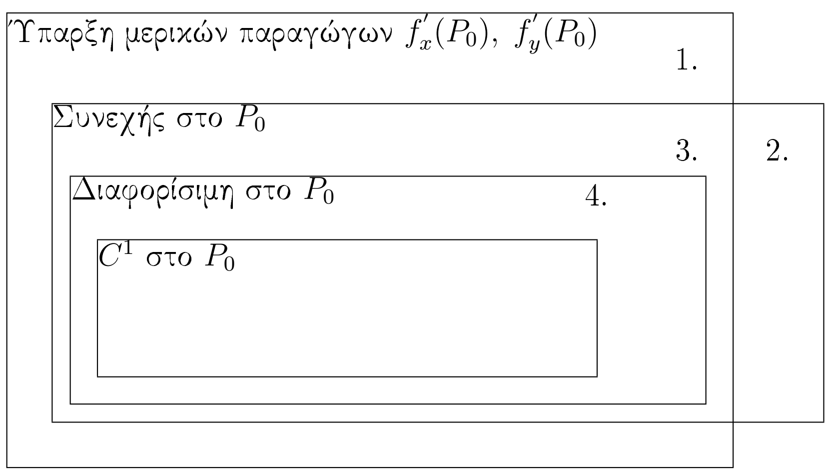
Εντελώς ανάλογα ορίζονται και οι παράγωγοι για συναρτήσεις τριών ή περισσότερων μεταβλητών. Οι συνηθισμένοι κανόνες παραγώγισης που ισχύουν στις συναρτήσεις μίας μεταβλητής έχουν εφαρμογή και εδώ. Ο πλέον σημαντικός που μας διευκολύνει στις πράξεις είναι ο κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης. Αν $f(x,y) = g[h(x,y)]$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{dg(u)}{du}\right)_{u=h(x,y)} \frac{\partial h}{\partial x} \tag{3.1.4}$$

και ομοίως ως πρός y.

Παράδειγμα 2.3: Αν $f(x,y) = ln(x^2+y^2)$ τότε $(\partial f/\partial x) = 2x/(x^2+y^2)$ και ομοίως ως πρός y.

Για συναρτήσεις μίας μεταβλητής η ύπαρξη της παραγώγου $f^{'}(x_0)$ σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού τους εξασφαλίζει και την συνέχεια της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Αυτό παύει να ισχύει γενικά για τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Το ακόλουθο διάγραμμα παρουσιάζει την σχέση συνέχειας και παραγωγισιμότητας για συναρτήσεις δύο μεταβλητών,



Σχήμα 3.1: Σχέση συνέχειας και παραγωγισιμότητας

όπου οι έννοιες της διαφορισιμότητας και της C^1-διαφορισιμότητας θα οριστούν αμέσως παρακάτω. Σαν παράδειγμα του στοιχείου 1. στο Σχήμα 3.1, δηλ. συνάρτησης για την οποία υπάρχουν οι πρώτες μερικές παράγωγοι χωρίς να είναι συνεχής σε ένα σημείο, θεωρούμε την συνάρτηση

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Λόγω της ανυπαρξίας του ορίου στην αρχή, η συνάρτηση δεν είναι συνεχής αλλά μπορείτε νε δείξετε ότι οι μερικές της παράγωγοι ως προς x, y υπάρχουν (Άσκηση 4). Ένα παράδειγμα του στοιχείου 2. είναι η συνάρτηση της Άσκησης 5, όπου μπορείτε να δείξετε ότι ενώ είναι συνεχής, στερείται μερικών παραγώγων πρώτης τάξης.

Για την κατανόηση της έννοιας της διαφορισιμότητας θεωρούμε την συνάρτηση μίας μεταβλητής $f(x)$. Η ύπαρξη της παραγώγου στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της σε συνδιασμό με το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης $f(x) = f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+(1/2)f^{''}(x_0)(x-x_0)^2$ εγγυώνται ότι η ευθεία $Y-f(x_0) = f^{'}(x_0)(x-x_0)$ εφάπτεται της συνάρτησης στο σημείο $P_0(x_0, f(x_0))$. Αυτό διασφαλίζεται όταν

$$\lim_{x \to x_0} \frac{Y - f(x)}{|x - x_0|}$$

Αυτή η απαίτηση γενικεύεται και στις συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $z = f(P) = f(x, y)$ είναι *διαφορίσιμη* στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ όταν ισχύει

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - Z(P)}{|P - P_0|} \tag{3.1.6}$$

όπου το *επίπεδο* $Z(P) = f(P_0) + f_x^{'}(P_0)(x - x_0) + f_y^{'}(y - y_0)$ θα είναι τότε *εφαπτόμενο* της συνάρτησης στο σημείο P_0 και $|P-P_0| = d(P, P_0)$. Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη και με την ύπαρξη των παραγώγων δεύτερης τάξης της $f(x, y)$.

Παράδειγμα 2.4: Αν $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ και $P_0(1, 1)$ τότε το επίπεδο όπως δίνεται από την παραπάνω σχέση είναι το $Z = 2x + 2y - 2$ και είναι πράγματι εφαπτόμενο της f διότι

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - Z(P)}{|P - P_0|} = \lim_{(x,y) \to (1,1)} \frac{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = 0$$

Τέλος μία συνάρτηση θα είναι C^1-*διαφορίσιμη* εάν οι πρώτες μερικές της παράγωγοι (ως συναρτήσεις πλέον) υπάρχουν και είναι συνεχείς στον τόπο D. Ένα παράδειγμα συνάρτησης όπως το στοιχείο 3. που είναι συνεχής αλλά όχι διαφορίσιμη δίνεται στην Άσκηση 6, ενώ ένα παράδειγμα συνάρτησης όπως το στοιχείο 4. που είναι διαφορίσιμη αλλά όχι C^1 δίνεται στην Άσκηση 7. Συχνότερα θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις C^1 που πληρούν όλες τις "καλές" συνθήκες ομαλότητας και συνέχειας ως πρός την διαφορισιμότητα.

3.2 Αρμονικές και Ομογενείς Συναρτήσεις

Μία συνάρτηση $f(x,y)$ λέγεται αρμονική αν ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{3.2.1}$$

Αντίστοιχα στις τρείς διαστάσεις η συνάρτηση $w = F(x,y,z)$ θα λέγεται αρμονική αν ικανοποιεί την

$$F_{xx} + F_{yy} + F_{zz} = 0 \tag{3.2.2}$$

Γνωστή αρμονική συνάρτηση στις τρείς διαστάσεις είναι η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού απουσία φορτίων, $\phi = 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (αποδείξτε το).

Παράδειγμα 2.5: Για την $z = f(x,y) = ln(x^2+y^2)$ έχουμε ότι $f_{xx} = (-2x^2+2y^2)/(x^2+y^2)^2$ και όμοια σχέση για την f_{yy} όποτε διαπιστώνουμε ότι είναι αρμονική συνάρτηση στις δύο διαστάσεις.

Μία συνάρτηση θα λέγεται *ομογενής βαθμού* m εάν ισχύει

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y) \tag{3.2.3}$$

όπου m ακέραιος. Ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα (Euler): Για μία ομογενή συνάρτηση βαθμού m

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = mf \tag{3.2.4}$$

Παράδειγμα 2.6: Η $z = x^2 + xy + y^2$ είναι ομογενής δευτέρου βαθμού διότι $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2 = \lambda^2 f(x,y)$.

3.3 Σύνθετες και Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

Έστω $z = f(x,y)$ μία συνάρτηση και $x = g(r,s),\ y = h(r,s)$ ένας μετασχηματισμός που στην ουσία μας πηγαίνει από το ζεύγος των παλαιών μεταβλητών (x,y) στις καινούργιες (r,s). Τότε θα έχουμε γενικά $z = f[g(r,s), h(r,s)] = F(r,s)$ και άν θέλουμε τις μερικές παραγώγους της f ως πρός τις καινούργιες μεταβλητές τότε ζητάμε να παραγωγίσουμε την προκύπτουσα σύνθετη συνάρτηση. Θα είναι τότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial s} \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Αφού υπολογίσουμε όλες τις μερικές παραγώγους, πρέπει τελικά το αποτέλεσμα να το εκφράσουμε ως πρός (r,s).

Παράδειγμα 2.7: Αν $z = Arctan(x/y)$ και $x = rsins,\ y = coss$ τότε

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{(1/y)}{1+(x/y)^2} sins - \frac{x/y^2}{1+(x/y)^2} \cdot 0 = \frac{sinscoss}{r^2 sin^2 s + cos^2 s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{(1/y)}{1+(x/y)^2} rcoss + \frac{x/y^2}{1+(x/y)^2} sins = \frac{r}{r^2 sin^2 s + cos^2 s}$$

Αν τώρα $x = g(t),\ y = h(t)$ δηλ. έχουμε μετάβαση σε μία μεταβλητή, τότε η *ολική* παράγωγος

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} \tag{3.3.2}$$

Παράδειγμα 2.8: Αν $z = (x/y)$ και $x = e^t,\ y = lnt$, τότε

$$dz/dt = (1/y)e^t - (x/y^2)(1/t) = \frac{e^t}{lnt} - \frac{e^t}{t(lnt)^2}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε μία σχέση της μορφής $F(x, y) = 0$. Αυτή ορίζει υπό προυποθέσεις συνάρτηση μίας μεταβλητής $y = f(x)$ ακόμα και αν δεν μπορεί να επιλυθεί *ρητά* (εκπεφρασμένα) ως πρός y. Τότε λέμε ότι έχουμε μία *πεπλεγμένη* συνάρτηση. Η προυπόθεση για να εκφράζει η $F(x, y) = 0$ μία πεπλεγμένη συνάρτηση, στην γειτονιά ενός σημείου P_0, είναι $F_y^{'}(P_0) \neq 0$.

Μπορούμε τώρα να λάβουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $y = f(x)$ ως (Άσκηση 12)

$$\begin{aligned} y^{'}(x) &= -\frac{F_x}{F_y} \\ y^{''}(x) &= -\frac{(F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2)}{F_y^3} \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

όπου εφεξής παραλείπουμε τον τόνο πάνω από τις μερικές παραγώγους για απλοποίηση του συμβολισμού και θεωρούμε ότι στο δεξιό μέλος των σχέσεων αυτών το y εκφράζεται ως πρός το x μέσω της $F(x, y) = 0$.

Παράδειγμα 2.9: Έστω $F(x, y) = xe^y - ye^x = 0$. Είναι φανερό ότι αυτή η σχέση δεν μπορεί να επιλυθεί ρητά ως πρός y. Αλλά θα έχουμε $y^{'} = (e^y - ye^x)/(e^x - xe^y)$. Υπολογίστε σαν άσκηση την δεύτερη παράγωγο.

Ομοίως αν έχουμε μία σχέση $F(x, y, z) = 0$ αυτή θα ορίζει μία πεπλεγμένη συνάρτηση $z = z(x, y)$ εάν ισχύει $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Για να ισχύει αυτό, δηλ. ακριβέστερα για να μπορούμε να πούμε ότι ορίζεται μία συνάρτηση δύο μεταβλητών υπό πεπλεγμένη μορφή στην περιοχή $\Pi(P_0(x_0, y_0, z_0), \delta)$ του σημείου P_0 θα πρέπει οι F, F_z να είναι συνεχείς στην περιοχή αυτή και να έχουμε $F(P_0) = 0,\ F_z(P_0) \neq 0$.

3.4 Ιακωβιανές, Διαφορικά

Αν έχουμε μετάβαση από ενα ζεύγος μεταβλητών (x, y) σε ένα άλλο (u, v), μέσω του μετασχηματισμού $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$ τότε ορίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα και την αντίστοιχη ορίζουσά του ως

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x, & u_y \\ v_x, & v_y \end{vmatrix} \tag{3.4.1}$$

Άν η ορίζουσα αυτή είναι διάφορη του μηδενός στην περιοχή σημείου P_0, τότε υπάρχει και ο αντίστροφος μετασχηματισμός και ισχύει

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = 1 \tag{3.4.2}$$

Μία βασική ιδιότητα των ιακωβιανών οριζουσών είναι ότι συνδέουν τα *στοιχειώδη εμβαδά* στις αντίστοιχες συντεταγμένες, δηλ.

$$dudv = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} dxdy \tag{3.4.3}$$

Παράδειγμα 2.10: Αν έχουμε $x = rcos\theta,\ y = rsin\theta$ τότε παίρνουμε την γνωστή σχέση που συνδέει τα στοιχειώδη εμβαδά των καρτεσιανών με τις πολικές συντεταγμένες

$$dxdy = \begin{vmatrix} cos\theta, & -rsin\theta \\ sin\theta, & rcos\theta \end{vmatrix} drd\theta = rdrd\theta$$

Αντίστοιχες εφαρμογές στις τρείς διαστάσεις υπάρχουν στις ασκήσεις στο τέλος του κεφαλαίου.

Μια άλλη χρήσιμη ιδιότητα της ιακωβιανής είναι ότι όταν αυτή μηδενίζεται ταυτοτικά σε κάποιο τόπο, τότε οι συναρτήσεις u, v δεν είναι στην πραγματικότητα ανεξάρτητες αλλά υπάρχει μεταξύ τους εξάρτηση (συναρτησιακή σχέση).

Παράδειγμα 2.11: Έστω $u = (x+y)/(1-xy),\ v = Arctanx + Arctany$. Τότε $D(u, v)/D(x, y) = 0$ πράγμα που σημαίνει ότι δεν είναι ανεξάρτητες οι νέες μεταβλητές. Πραγματικά εύκολα βρίσκουμε ότι ισχύει η συναρτησιακή σχέση $u = tanv$.

Ερχόμαστε τώρα να μελετήσουμε την έννοια του διαφορικού. Έστω ότι $\Delta x = dx,\ \Delta y = dy$ είναι μικρές (απειροστές) αυξήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών (x, y) γύρω από το σημείο $P_0(x_0, y_0)$. Ορίζουμε το *διαφορικό* της συνάρτησης $f(x, y)$ ως

$$df = dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} dy \tag{3.4.4}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε το διαφορικό για προσεγγιστικές εκτιμήσεις των τιμών μίας συνάρτησης. Πράγματι αν ορίσουμε $\Delta f := f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$ τότε λόγω και του Θεωρήματος Taylor που θα δούμε παρακάτω μ-πορούμε να λαβουμε προσεγγιστικά $\Delta f \simeq df$ και άρα να εκτιμήσουμε το $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.

Παράδειγμα 2.12: Εκτιμήστε το $I = [(1.01)^2+(4.97)^2+1]^{1/3}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $z = f(x,y) = [x^2+y^2+1]^{1/3}$ και επιλέγουμε $P_0(1,5)$ με $\Delta x = 0.01,\ \Delta y = -0.03$. Τότε η ζητούμενη τιμή $I = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \simeq f(x_0,y_0)+df$. Αλλά $f(P_0) = 3$, $(\partial f/\partial x)_0 = 2/27$ και $(\partial f/\partial y)_0 = 10/27$. Άρα θα είναι $I \simeq 3 + (2/27)0.01 - (10/27)0.03 = 2.99$. Για σύγκριση, με το επιστημονικό κομπιουτεράκι βρίσκουμε $I = 2.9896$.

Μπορούμε τώρα να θέσουμε και το αντίστροφο πρόβλημα, σε ότι αφορά το διαφορικό. Αν μας δοθεί μία σχέση της μορφής $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ είναι δυνατόν να παριστάνει το διαφορικό κάποιας συνάρτησης $f(x,y)$ και αν ναι ποιάς; Ικανή και αναγκαία συνθήκη γι΄ αυτό είναι να ισχύει

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \tag{3.4.5}$$

και η ζητούμενη συνάρτηση δίνεται από την

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,u)du + C \tag{3.4.6}$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά.

Παράδειγμα 2.13: Έστω η παράσταση $(e^x cosy - e^y sinx)dx + (e^y cox - e^x siny)dy$. Αυτή είναι το διαφορικό μίας συνάρτησης διότι $(\partial P/\partial y) = -e^x siny - e^y sinx = (\partial Q/\partial x)$ και εφαρμόζοντας την σχέση της Εξ. (3.4.6) βρίσκουμε ότι $f(x,y) = e^x cosy + e^y cosx + C$.

3.5 Πολυώνυμο Taylor

Με το διαφορικό καταφέραμε να προσεγγίσουμε τις τιμές της συνάρτησης σε ένα σημείο $P(x,y)$ από υπολογισμούς σε ένα "κοντινό" σημείο $P_0(x_0,y_0)$. Το πολυώνυμο Taylor επεκτείνει αυτή τη μέθοδο.

Θεώρημα (Taylor): Αν η $f(x,y)$ έχει παραγώγους μέχρι τάξης n συνεχείς στην περιοχή ενός σημείου $P_0(x_0,y_0)$ και υπάρχει και η παράγωγος τάξης $(n+1)$ στην ίδια περιοχή, τότε

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) &+ (h\partial_x + k\partial_y)f(x_0,y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!}(h\partial_x + k\partial_y)^2 f(x_0,y_0) + \end{aligned}$$

$$+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \quad \frac{1}{n!}(h\partial_x + k\partial_y)^n f(x_0, y_0) + R_{n+1} \qquad (3.5.1)$$

όπου το υπόλοιπο $R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(h\partial_x + k\partial_y)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ υπολογίζεται σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο των $P_0(x_0, y_0)$ και $P(x = x_0 + h, y = y_0 + k)$ οπότε $0 < |\theta| < 1$. Ανάλογα με την ακρίβεια που επιθυμούμε στον υπολογισμό της τιμής $f(x, y)$ κρατάμε όρους μέχρι κάποιας τάξης n. Συνήθως $\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$ οπότε έχουμε την *σειρά* Taylor, ενώ αν $P_0(x_0, y_0) = (0, 0)$ έχουμε την σειρά Mac-Laurin.

Στα αναπτύγματα Taylor χρησιμοποιούμε το διώνυμο του Νεύτωνα

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) A^k B^{n-k}, \quad \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (3.5.2)$$

Ως παράδειγμα, αν θέλουμε να κρατήσουμε όρους μέχρι δεύτερης τάξης θα έχουμε

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad &+ \quad (hf_x(P_0) + kf_y(P_0)) + \\ &+ \quad \frac{1}{2}(h^2 f_{xx}(P_0) + 2hkf_{xy}(P_0) + k^2 f_{yy}(P_0)) + \\ &+ \quad \mathcal{O}(h^3, k^3) \qquad (3.5.3) \end{aligned}$$

όπου $h = (x - x_0)$, $k = (y - y_0)$ και ο τελευταίος όρος δηλώνει ότι παραλείπουμε όρους τρίτης τάξης ως πρός h, k. Αυτό γίνεται είτε διότι $0 < |h|, |k| < 1$ είτε διότι κρίνουμε ότι είναι ικανοποιητική η ακρίβεια που λαμβάνουμε με όρους μέχρι και δεύτερης τάξης.

Παράδειγμα 2.14: Αν $f(x, y) = 1/\sqrt{1 + x + y}$ και $P_0(0, 0)$ βρείτε το πολυώνυμο Mac-Laurin δεύτερης τάξης για την συνάρτηση αυτή. Επειδή $f_x = f_y = -1/2(1 + x + y)^{3/2}$ και $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 3/4(1 + x + y)^{5/2}$ αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\begin{aligned} f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + x + y}} \quad &= \quad 1 - \frac{1}{2}(x + y) + \frac{3}{8}(x^2 + 2xy + y^2) + \\ &+ \quad \mathcal{O}(x^3, y^3) \end{aligned}$$

Η προσέγγιση μιας οποιασδήποτε συνάρτησης με ένα πολυώνυμο είναι πολύ χρήσιμη, διότι τα πολυώνυμα είναι γνωστές συναρτήσεις που εύκολα μπορούμε να χειριστούμε σε πράξεις. Αυτό είναι το πλεονέκτημα που μας προσφέρει το ανάπτυγμα Taylor.

3.6 Παραγώγιση Ολοκληρώματος

Αν μας δίνεται η συνάρτηση μίας μεταβλητής

$$F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,t)dt \tag{3.6.1}$$

δηλ. υπό την μορφή ολοκληρώματος, τότε μπορούμε να την παραγωγίσουμε σύμφωνα με τον κανόνα Leibniz και

$$F^{'}(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt + f[x,\phi_2(x)]\phi_2^{'}(x) - f[x,\phi_1(x)]\phi_1^{'}(x) \tag{3.6.2}$$

Σαν ειδική περίπτωση, θέτοντας $\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = x$ και $f(x,t) = f(t)$ λαμβάνουμε το θεμελειώδες θεώρημα ολοκλήρωσης για συναρτήσεις μίας μεταβλητής
$F^{'}(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$.

Παράδειγμα 2.15: Παραγωγίστε την $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{sin(xt)}{t}dt$. Το ολοκλήρωμα αυτό δεν μπορεί να υπολογιστεί ρητά ώστε να πάρουμε μετά την παράγωγό του. Ομως εφαρμόζοντας τον κανόνα Leibniz έχουμε

$$\begin{aligned} F^{'}(x) &= \int_x^{x^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{sin(xt)}{t}\right)dt + \frac{sin(x^3)}{x^2}(x^2)^{'} - \frac{sin(x^2)}{x}(x)^{'} = \\ &= \int_x^{x^2} cos(xt)dt + \frac{2sin(x^3)}{x} - \frac{sin(x^2)}{x} = \\ &= \frac{3sin(x^3) - 2sin(x^2)}{x} \end{aligned}$$

3.7 Ακρότατα, Ακρότατα υπό συνθήκη

Αν η συνάρτηση $z = f(x, y)$ έχει τοπικό μέγιστο στο $P_0(x_0, y_0)$ τότε λόγω συνέχειας υπάρχει περιοχή $\Pi(P_0, \delta)$ ώστε για κάθε σημείο $P \in \Pi(P_0, \delta)$ να έχουμε $f(P) \leq f(P_0)$. Θα είναι $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \leq 0$ όπου είναι $0 < |h|,\ |k| < \delta$. Έστω τώρα ότι κινούμαστε κατά μήκος του $y = y_0$. Κάνοντας χρήση του αναπτύγματος Taylor έχουμε $f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(P_0)h + (1/2)f_{xx}(P_0)h^2 < 0$. Επειδή θέλουμε η ποσότητα αυτή να είναι σταθερά αρνητική, ανεξαρτήτως του προσήμου του h υποχρεούμαστε να λάβουμε $f_x(P_0) = 0$. Σε ανάλογο συμπέρασμα καταλήγουμε αν κινηθούμε κατά μήκος της ευθείας $x = x_0$. Παρατηρούμε συνεπώς ότι η *αναγκαία συνθήκη* για να έχουμε ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) σε ένα σημείο P_0 είναι

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} = 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \tag{3.7.1}$$

Η συνθήκη αυτή είναι αναγκαία αλλά όχι και *ικανή*. Δηλαδή το σύνολο των λύσεων της (που καλούνται *κρίσιμα σημεία*) περιέχει και σημεία που δέν είναι ακρότατα. Για να προσδιορίσουμε μία ικανή συνθήκη πρέπει να κρατήσουμε και όρους δεύτερης τάξης στο ανάπτυγμα Taylor. Αν P_0 είναι ένα κρίσιμο σημείο τότε

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= \frac{1}{2}[Ah^2 + 2Bhk + Ck^2] \\ A := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_0},\ B := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{P_0}&\ C := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{P_0} \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

Αν $A = B = C = 0$ τότε δεν μπορούμε να αποφασίσουμε και πρέπει να διερευνήσουμε άν το σημείο P_0 είναι σημείο ακροτάτου ή όχι είτε πηγαίνοντας σε όρους τρίτης τάξης, είτε με την βοήθεια γραφικής παράστασης. Αν $A = B = 0$ και $C \neq 0$ τότε αν το $C > 0$ έχουμε σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ αν $C < 0$ έχουμε σημείο τοπικού μεγίστου. Αν $A = 0$ ενώ $B \neq 0$ δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για την φύση του σημείου P_0.

Έστω τώρα ότι $A \neq 0$. Τότε (αποδείξτε το)

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= \frac{1}{2A}[(Ah + Bk)^2 - k^2\Delta], \\ \Delta : &= (B^2 - AC) \end{aligned} \tag{3.7.3}$$

Αν $B = C = 0$ τότε το πρόσημο της διαφοράς $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ καθορίζεται απο αυτό του A σε πλήρη αναλογία με την περίπτωση του $C \neq 0$ παραπάνω και θα έχουμε τοπικό ελάχιστο αν $A > 0$ ενώ θα έχουμε τοπικό μέγιστο αν $A < 0$.
Γενικά θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα που φαίνονται στον πίνακα 3.1.

Περίπτωση	Συμπέρασμα
$\Delta < 0$ και $A > 0 (C > 0)$	Τοπικό Ελάχιστο
$\Delta < 0$ και $A < 0 (C < 0)$	Τοπικό Μέγιστο
$\Delta > 0$	Σαγματικό σημείο
$\Delta = 0$	Απροσδιόριστο

Πίνακας 3.1: Χαρακτηρισμός ακροτάτων.

Οταν λέμε *σαγματικό σημείο*, εννοούμε ότι εάν κινηθούμε κατά κάποια κατεύθυνση θα βρούμε ότι έχουμε σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ κατά άλλη θα βρούμε ότι έχουμε σημείο τοπικού ελαχίστου. Πραγματικά για h, k τέτοια ώστε $Ah+Bk = 0$, δηλ. κινούμενοι κατά μήκος της ευθείας $A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0$ θα ισχύει $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) < 0$ (λόγω της Εξ. (3.7.3)) οπότε έχουμε τοπικό μέγιστο. Ομως για h, k τέτοια ώστε $k = 0$, δηλ. κατά μήκος της ευθείας $y = y_0$ έχουμε $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) > 0$ δηλ. τοπικό ελάχιστο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα σαγματικού σημείου είναι το $O(0,0)$ στην γραφική παράσταση της $z = x^2 - y^2$ (κάντε την στον υπολογιστή σας).

Παράδειγμα 2.16: Έστω $z = 2x - x^2 - y^2 - 4y - 4$. Τα κρίσιμα σημεία είναι αυτά για τα οποία $f_x = 2 - 2x = 0$ και $f_y = -2y - 4 = 0$ δηλ. μόνο το σημείο $P(1, -2)$. Επίσης $A = -2$, $B = 0$, $C = -2$. Άρα $\Delta = -2 < 0$ και $A < 0$ και έχουμε σημείο τοπικού μεγίστου.

Παράδειγμα 2.17: Αν $z = x^2 - y^2$ τότε για τα κρίσιμα σημεία είναι $f_x = 2x = 0$, $f_y = -2y = 0$. Άρα έχουμε το $P_0(0,0)$. Επίσης $A = 2$, $B = 0$, $C = -2$ οπότε $\Delta = 4 > 0$. Είναι λοιπόν σαγματικό σημείο.

Παράδειγμα 2.18: Αν $z = x^2 + y^2$ τότε για τα κρίσιμα σημεία είναι $f_x = 2x = 0$, $f_y = 2y = 0$. Άρα έχουμε το $P_0(0,0)$. Επίσης $A = 2$, $B = 0$, $C = 2$ οπότε $\Delta = -4 < 0$ και $A = 2 > 0$. Είναι λοιπόν σημείο τοπικού ελαχίστου.

Ερχόμαστε τώρα στην περίπτωση που ζητάμε ακρότατες τιμές μίας συνάρτησης $z = f(x, y)$ υπό την επιπλέον συνθήκη $\phi(x, y) = 0$, δηλ. σε ποιό σημείο της καμπύλης του επιπέδου που περιγράφεται από αυτήν την εξίσωση έχουμε ακρότατο. Σχηματίζουμε την συνάρτηση $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$ όπου λ είναι ο λεγόμενος πολλαπλασιαστής Lagrange. Προσδιορίζουμε τώρα τα ακρότατα από τις

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{P_0} = 0 \tag{3.7.4}$$

Σχηματίζουμε επίσης την ορίζουσα

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F_{xx}, & F_{xy}, & \phi_x \\ F_{xy}, & F_{yy}, & \phi_y \\ \phi_x, & \phi_y, & 0 \end{vmatrix}_{P_0} \tag{3.7.5}$$

Εάν $\Delta_1 < 0$ έχουμε τοπικό ελάχιστο ενώ εάν $\Delta_1 > 0$ έχουμε τοπικό μέγιστο στο σημείο P_0.

Παράδειγμα 2.19: Βρείτε τα ακρότατα της $z = x + y$ πάνω στον κύκλο $x^2+y^2 = 1$. Εδώ σχηματίζουμε την συνάρτηση $F(x, y) = x+y+\lambda(x^2+y^2-1)$. Τα ακρότατα είναι ανάμεσα στα σημεία όπου $F_x = 1 + 2\lambda x = 0$, $F_y = 1 + 2\lambda y = 0$ και $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Επιλύοντας αυτό το σύστημα βρίσκουμε τις λύσεις $P_0(x_0, y_0, \lambda_0) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ και $P_1(x_1, y_1, \lambda_1) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$. Επίσης υπολογίζοντας τους όρους της ορίζουσας βρίσκουμε ότι $(\Delta_1)_{P_0} = 4\sqrt{2} > 0$ οπότε έχουμε τοπικό μέγιστο ενώ $(\Delta_1)_{P_1} = -4\sqrt{2} < 0$ άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο. Μπορείτε να αναζητήσετε και απ΄ ευθείας τα σημεία πάνω στον μοναδιαίο κύκλο που το άθροισμα των συντεταγμένων τους είναι μέγιστο ή ελάχιστο.

Παράδειγμα 2.20: Βρείτε την ελάχιστη απόσταση ανάμεσα στην ευθεία $y + x = 2$ και το σημείο $O(0, 0)$. Ζητάμε την ελάχιστη τιμή της $z = d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2}$ με την συνθήκη $y+x-2 = 0$. Άρα $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}+\lambda(x+y-2)$ και από τις $F_x = 2x + \lambda = 0$, $F_y = 2y + \lambda = 0$, $F_\lambda = x + y - 2 = 0$ προκύπτει ότι το ζητούμενο σημείο είναι $P_0(x_0, y_0, \lambda_0) = (1, 1, -2)$. Επίσης $(\Delta_1)_{P_0} = -\sqrt{2} < 0$ που σημαίνει ότι όντως πρόκειται για ελάχιστο με $d_{min} = \sqrt{2}$.

3.8 Ασκήσεις

1. Βρείτε με βάση τον ορισμό τις παραγώγους πρώτης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων στο υποδεικνυόμενο σημείο.

$$z = ln(x^2 + y^2),\ P_0(1, 0),$$
$$z = cos(xy),\ P_0(0, \frac{\pi}{2}),$$
$$z = \frac{x - y}{x + y},\ P_0(0, 1),$$
$$z = xe^y,\ P_0(1, -1).$$

2. Βρείτε τις παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων:

$$z = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y},\ \ z = \frac{x - y}{x + y},\ \ z = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$z = (e^{x+2y} + y^2)^{1/2}, \ \ z = x^y, \ z = Arctan(\frac{y}{x}),$$
$$w = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \ \ w = ln(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$z = xsin(x + y) + ycos(x + y).$$

3. Δείξτε ότι η $F(x, y) = (x - y)\phi(x + y)$ επαληθεύει την εξίσωση $(x - y)(F_x - F_y) - 2F = 0$, όπου ϕ είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση. Ομοίως δείξτε ότι η $F(x, y) = y^2 + xyln(xy)$ ικανοποιεί την $yF_{xy} - xF_{xx} - F_x = 0$.

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση της Εξ. (3.1.5) δέν είναι συνεχής στην αρχή $O(0, 0)$, λόγω του ότι το όριο δεν υπάρχει, αλλά παρ΄ όλα αυτά οι μερικές παράγωγοι ως πρός x, y υπάρχουν (με βάση τον ορισμό).

5. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = g(x) + g(y), \ \ g(t) = \begin{cases} tsin(1/t), & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στην αρχή $O(0, 0)$ (με βάση τον ορισμό της συνέχειας) αλλά δεν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι ως πρός x, y.

6. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & P \neq (0, 0) \\ 0 & P = (0, 0) \end{cases}$$

είναι συνεχής στην αρχή αλλά το όριο της Εξ. (3.1.6) δεν υπάρχει, δηλ. δεν είναι διαφορίσιμη.

7. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}), & P \neq (0, 0) \\ 0 & P = (0, 0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στην αρχή, αλλά οι μερικές της παράγωγοι ως πρός x, y δεν είναι συνεχείς συναρτήσεις εκεί, δηλ. δεν είναι C^1.

8. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = Arctan(y/x)$ είναι αρμονική συνάρτηση. Το ίδιο και για την συνάρτηση δυναμικού $f(x, y, z) = (1/r) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

9. Βρείτε την συνθήκη ώστε η συνάρτηση $f(x, y) = sin(mx)sinh(ny)$ να είναι αρμονική στις δύο διαστάσεις. Εδώ m, n είναι ακέραιοι και $sinhy = (e^y - e^{-y})/2$.

10. Αποδείξτε το Θεώρημα του Euler της Εξ. (3.2.4), παραγωγίζοντας την Εξ. (3.2.3) ως πρός λ. Δείξτε ότι είναι ομογενείς οι παρακάτω συναρτήσεις

$$z = x^3 + 3x^2y + 2y^3, \quad z = (x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{2xy}}$$

Δείξτε ότι μία ομογενής συνάρτηση βαθμού m όπως αυτή της Εξ. (3.2.3) ικανοποιεί την $x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = m(m-1)f$.

11. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους ως πρός r, s των παρακάτω συναρτήσεων:

$$z = Arctan(x/y), \quad x = rsins, \ y = rcoss$$
$$z = x^2 + xy, \quad x = rcoss, \ y = rsins$$
$$z = x^y, \ x = rs, \ y = r/s$$

Επίσης την ολική παράγωγο ως πρός t για τις συναρτήσεις:

$$z = ln(x^2+y^2), \quad x = sint, \ y = cost$$
$$z = x/y, \quad x = e^t, \ y = lnt$$
$$z = e^{x-2y}, \quad x = sint, \ y = t^3$$

12. Βρείτε την $y^{'}(x)$ και την $y^{''}(x)$ για τις συναρτήσεις που ορίζονται υπό την πεπλεγμένη μορφή $F(x,y) = 0$, όπου

$$x^2 + y^2 - 3xy = a, \quad xtany + ytanx = b$$
$$e^{xy} - x - 2y = 0, \quad xy^2 + 4xy^3 + 2 = 0,$$
$$sin(xy) - e^{xy} - xy = 0$$

Αποδείξτε την Εξ. (3.3.3).

13. Αποδείξτε την Εξ. (3.4.2). Αν $(x,y) \rightarrow (u,v) \rightarrow (r,s)$ είναι μία σειρά μετασχηματισμών δείξτε ότι

$$\frac{D(x,y)}{D(r,s)} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\frac{D(u,v)}{D(r,s)}$$

14. Βρείτε τις ιακωβιανές ορίζουσες για τους μετασχηματισμούς από τις καρτεσιανές στις κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες αντίστοιχα. Επαληθεύστε τις σχέσεις μετασχηματισμού των στοιχειωδών όγκων.

15. Δείξτε ότι οι μεταβλητές

$$u = u(x,y) = Arcsinx + Arcsiny, \quad v = v(x,y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και βρείτε την σχέση που τις συνδέει.

16. Εξετάστε αν είναι ανεξάρτητες οι παρακάτω μεταβλητές και αν όχι βρείτε την σχέση που τις συνδέει.

$$\begin{aligned} u &= 3x + 4y - z \\ v &= 2x - y + 3z \\ w &= 6x + 8y - 2z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= x + y + z \\ f_2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ f_3 &= xy + yz + zx \end{aligned}$$

17. Βρείτε το ολικό διαφορικό για τις συναρτήσεις $z = tan(y/x)$, $z = xy$, $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$.

18. Υπολογίστε προσεγγιστικά και με την βοήθεια του ολικού διαφορικού τις τιμές

$$\begin{aligned} (1.04)^{2.02}, \quad \sqrt{27} \cdot \sqrt[3]{1021} \\ f(1.98, 0.015), \quad f(x, y) = e^{x^2 sin(xy)} \end{aligned}$$

19. Εξετάστε αν οι πρακάτω σχέσεις είναι τέλεια διαφορικά κάποιων συναρτήσεων $f(x, y)$ και αν ναι βρείτε τις.

$$\begin{aligned} (e^y + ye^x)dx + (xe^y + e^x)dy \\ (e^x cosy - e^y sinx)dx + (e^y cosx - e^x siny)dy \\ (2xy + y^2)dx + (2xy + x^2)dy \\ (y + \frac{1}{x})dx + (x + \frac{1}{y})dy \end{aligned}$$

20. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor τρίτης τάξης για τις παρακάτω συναρτήσεις, στα αντίστοιχα σημεία.

$$\begin{aligned} f(x, y) = \frac{1}{1 + x + y}, \quad P_0(0, 0) \\ f(x, y) = ln(1 + x^2 + y^2), \quad P_0(0, 0) \\ f(x, y) = \frac{x - y}{1 + y^2}, \quad P_0(1, 2) \\ f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \quad P_0(1, 1) \end{aligned}$$

21. Παραγωγίστε με βάση τον κανόνα Leibniz το ολοκλήρωμα

$$f(x) = \int_0^{x^2} Arctan(\frac{t}{x})dt$$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα με βάση την $\int Arctan(x/a) = xArctan(x/a) - (a/2)ln(x^2 + y^2)$ και μετά παραγωγίστε για να καταλήξετε στην ίδια σχέση.

22. Παραγωγίζοντας την σχέση $\int_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a}ln(1+ab)$ ως πρός a υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^b \frac{xdx}{(1+ax)^2}$.

23. Υπολογίστε με παραγώγιση ως πρός την παράμετρο a το ολοκλήρωμα

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{Arctan(ax)}{x(1+x^2)}$$

λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $I(0) = 0$.

24. Βρείτε το είδος των κρίσιμων σημείων και τα ακρότατα για τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned}
z &= 2x - x^2 - y^2 - 4y - 4, \\
z &= 3xy - x^2y - xy^2, \\
z &= xyln(x+y), \\
z &= x^3 + y^3 - 9xy + 1, \\
z &= sinx + siny + sin(x+y) \\
z &= x^2 + y^2 - y(x+a), \quad (a > 0) \\
z &= x^4 + y^4 - 4xy + 1
\end{aligned}$$

25. Βρείτε το μέγιστο της παράστασης $V = xyz$ υπό την συνθήκη $x + y + z = c, \quad (c > 0)$.

26. Βρείτε το μέγιστο της παράστασης $F = xy^2z^3$ υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 + z^2 = \delta^2, \quad (\delta > 0)$.

27. Βρείτε τα ακρότατα των σνυαρτήσεων υπό τις αντίστοιχες συνθήκες

$$\begin{aligned}
z &= x + y, \quad x^2 + y^2 = 1 \\
z &= 6 - 4x - 3y, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\
z &= xy, \quad x + y = 1
\end{aligned}$$

28. Βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου $P_0(0,0)$ από την ευθεία $x + y = a, \quad (a > 0)$.

29. Βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου $P_0(3, 1, 2)$ από το επίπεδο $z = 2x + 4y$.

30. Βρείτε την ελάχιστη απόσταση της ευθείας $y = x - 2$ από την παραβολή $y = x^2$.

Κεφάλαιο 4

Ολοκληρώματα

4.1 Διπλά Ολοκληρώματα

Έστω D ένας κλειστός και φραγμένος τόπος στο επίπεδο. Θα μελετήσουμε το διπλό ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης που ορίζεται σε ένα τέτοιο τόπο για να αποφύγουμε την εισαγωγή γενικευμένων ολοκληρωμάτων που είναι εκτός του σκοπού των σημειώσεων αυτών. Έστω ακόμα $f(x, y)$ συνάρτηση ορισμένη και φραγμένη στον τόπο D. Μπορούμε να χωρίσουμε τον τόπο σε μικρά ορθογώνια τμήματα με ευθείες παράλληλες προς τους άξονες Ox, Oy. Αν $\{D_k/k = 1, ..., n\}$ είναι τα ορθογώνια αυτά και $|D_k|$ το εμβαδόν ενός τέτοιου κομματιού λαμβάνουμε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)|D_k| = \lim_{|D|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)|D_k|. \tag{4.1.1}$$

Εδώ $P_k(x_k, y_k)$ είναι τυχαίο σημείο που ανήκει στο ορθογώνιο D_k και $|D| = max\{|D_k|/k = 1, ..., n\}$. Αν υπάρχει το όριο αυτό, ανεξαρτήτως του τρόπου με τον οποίο επιλέγουμε τα μικρά αυτά ορθογώνια, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι *ολοκληρώσιμη* στον τόπο D και το όριο αυτό το συμβολίζουμε με

$$I = \int\int_D f(x, y)dxdy \tag{4.1.2}$$

Η πλέον ενδιαφέρουσα κατηγορία συναρτήσεων που είναι ολοκληρώσιμες είναι οι συνεχείς συναρτήσεις, με τις οποίες θα ασχοληθούμε εδώ. Υπενθυμίζουμε ότι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό και φραγμένο τόπο, όπως ο D, είναι και *φραγμένη* σ' αυτόν. Το τελευταίο φυσικά σημαίνει ότι υπάρχει σταθερά $M \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|f(x, y)| \leq M$.

Η γεωμετρική σημασία του διπλού ολοκληρώματος είναι άμεση. Αν χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέσουμε ότι στον τόπο D, η $f(x, y) \geq 0$ τότε το διπλό ολοκλήρωμα ισούται αριθμητικά με τον όγκο (σε κυβικές μονάδες που ορίζονται από τις μονάδες των τριών ορθοκανονικών αξόνων) κάτω από την γραφική παράσταση της f
δηλ. $V_f = \int\int_D f(x, y)dxdy$. Επίσης αν $f(x, y) = 1$ τότε λαμβάνουμε αριθμητικά το εμβαδόν του τόπου, $E_D = \int\int_D dxdy$.

Οι στοιχειώδεις ιδιότητες του ολοκληρώματος συνάρτησης μίας μεταβλητής, διατηρούνται και εδώ βασικά αμετάβλητες. Δύο πιό σημαντικές ιδιότητες είναι οι ακολουθες:

$$\left|\int\int_D f(x, y)dxdy\right| \leq \int\int_D |f(x, y)|dxdy$$

$$m|D| \leq \int\int_D f(x, y)dxdy \leq M|D| \tag{4.1.3}$$

όπου m, M η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της συνάρτησης αντίστοιχα και $|D|$ το εμβαδόν του τόπου.

Για να γράψουμε ένα αλγόριθμο υπολογισμού του διπλού ολοκληρώματος θα θεωρήσουμε εφ' εξής *κανονικούς τόπους*. Ενας τόπος θα είναι κανονικός αν κάθε ευθεία παράλληλη πρός τους άξονες Ox, Oy τέμνει το σύνορο του τόπου σε δύο το πολύ σημεία. Κάθε τόπος μπορεί να αναλυθεί σε ένωση κανονικών τόπων. Ένας κανονικός τόπος μπορεί να γραφεί κατά τους ακόλουθους δύο τρόπους:

$$\begin{aligned} a \leq & \ x \ \leq b \\ \phi_1(x) \leq & \ y \ \leq \phi_2(x) \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

ή

$$\begin{aligned} c \leq & \ y \ \leq d \\ g_1(y) \leq & \ x \ \leq g_2(y) \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Τότε το διπλό ολοκήρωμα υπολογίζεται με ένα από τους ακόλουθους δύο ισοδύναμους τρόπους

$$I = \int_{x=a}^{b} dx \int_{y=\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy f(x,y) = \int_{y=c}^{d} dy \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} dx f(x,y) \tag{4.1.6}$$

Παράδειγμα 4.1: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int\int_D (x+y)dxdy$ στον τόπο που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$, $y = \frac{1}{3}(4-x^2)$ και $x = 2$. Ο τόπος D μπορεί να γραφεί ώς $1 \leq x \leq 2$ και $\frac{1}{3}(4-x^2) \leq y \leq x^2$. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=1}^{2} dx \left[\int_{y=\frac{1}{3}(4-x^2)}^{x^2} (x+y)dy \right] = \int_{x=1}^{2} dx \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=\frac{1}{3}(4-x^2)}^{x^2} = \\ &= \int_{1}^{2} dx \left[\frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{9}x^4 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{8}{9} \right] \simeq 5.88 \end{aligned}$$

Είδαμε παραπάνω δύο βασικές εφαρμογές του διπλού ολοκληρώματος. Την χρήση του στον υπολογισμό όγκου και επιφάνειας. Επιπλέον αυτών μπορούμε να υπολογίσουμε και το εμβαδόν της επιφάνειας $z = f(x,y)$ που προβάλλεται πάνω στον τόπο D. Δίνεται από την σχέση

$$E_f = \int\int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy \tag{4.1.8}$$

Παράδειγμα 4.2: Υπολογίστε την επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας R. Θεωρούμε το πάνω ημισφαίριο που παριστάνεται από την συνάρτηση $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Τότε $(\partial f/\partial x) = -x/\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ και παρομοίως για την μερική παράγωγο ως πρός y. Τότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\begin{aligned} E_f &= \int\int_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}rdrd\theta = \\ &= 2\pi\int_0^{R^2}\frac{Rdu}{2\sqrt{R^2-u}} = 2\pi R^2 \end{aligned}$$

όπου ο τόπος D που ολοκληρώσαμε είναι ο κύκλος ακτίνας R στο επίπεδο Oxy. Άρα το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας ισούται με $4\pi R^2$. Εδώ στην ουσία συναντήσαμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα γιατί η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν είναι συνεχής στον κλειστό τόπο, αλλά παρ' όλα αυτά, είδαμε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει.

4.2 Τριπλά Ολοκληρώματα

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και το τριπλό ολοκλήρωμα. Εάν $w = f(x,y,z)$ είναι συνάρτηση ορισμένη και φραγμένη στον κλειστό και φραγμένο τόπο $V \subset \mathbb{R}^3$ τότε ορίζουμε

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)|\Delta V_k| = \\ &= \lim_{|\Delta V|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)|\Delta V_k| \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Εδώ χωρίσαμε τον τόπο V σε τμήματα $\{\Delta V_k/k = 1,...,n\}$ με επίπεδα παράλληλα πρός τα συντεταγμένα επίπεδα Oxy, Oyz, Ozx και το σημείο $P_k(x_k,y_k,z_k)$ είναι οποιοδήποτε σημείο του κομματιού ΔV_k. Επιπλέον κάνουμε αυτή την *διαμέριση* του τόπου V λεπτότερη παίρνοντας το όριο $n\to\infty$ ή ισοδύναμα $|\Delta V|\to 0$ όπου
$|\Delta V| = max\{|\Delta V_k|/k = 1,...,n\}$.

Εάν μία συνάρτηση $f(x,y,z)$ είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο τόπο είναι και ολοκληρώσιμη, και αποτελεί την πλέον χρήσιμη κλάση συναρτήσεων. Οπως και στην περίπτωση του διπλού ολοκληρώματος ένας κανονικός τόπος V μπορεί να γραφεί ώς

$$\begin{aligned} a \leq &\ x \leq b \\ g_1(x) \leq &\ y \leq g_2(x) \\ \phi_1(x,y) \leq &\ z \leq \phi_2(x,y) \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

και τότε ο αλγόριθμος για τον υπολογισμό του τριπλού ολοκληρώματος σε ένα τέτοιο τόπο είναι

$$I = \int_{x=a}^{b} dx \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{z=\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} dz\ f(x,y,z) \tag{4.2.3}$$

Σε κάθε διαδοχική ολοκλήρωση οι υπόλοιπες μεταβλητές θεωρούνται σταθερές και
ξεκινάμε από την $z-$ολοκλήρωση.

Εάν επιλέξουμε $f(x,y,z) = 1$ τότε το τριπλό ολοκλήρωμα συμπίπτει αριθμητικά με τον *όγκο* του τόπου V, όπως εύκολα μπορούμε να αντιληφθούμε.

Παράδειγμα 4.3: Υπολογίστε τον όγκο του τετραέδρου που ορίζεται από τα συντεταγμένα επίπεδα Oxy, Oyz και Ozx και το επίπεδο με εξίσωση $x + y + z = 1$. Εδώ ο τόπος V μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq & x & \leq 1 \\ 0 \leq & y & \leq 1-x \\ 0 \leq & z & \leq 1-x-y \end{array}$$

όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε. Άρα ο ζητούμενος όγκος είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{1} dx \int_{y=0}^{1-x} dy \int_{z=0}^{1-x-y} dz = \int_{x=0}^{1} dx \int_{y=0}^{1-x} dy(1-x-y) = \\ &= \int_{x=0}^{1} dx \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} = \int_{x=0}^{1} dx \left[(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1} dx(1-x)^2 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

4.3 Αλλαγή Μεταβλητών σε Πολλαπλά Ολοκληρώματα

Πολλές φορές ο υπολογισμός ενός πολλαπλού ολοκληρώματος είναι δύσκολος σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων (x,y,z). Ενδέχεται όμως αν το μετατρέψουμε σε ένα ολοκλήρωμα ως πρός κάποιες νέες μεταβλητές, να υπολογίζεται πολύ ευκολότερα. Η μετατροπή αυτή γίνεται μέσω των Ιακωβιανών οριζουσών. Έστω

$$I = \int\int_D f(x,y)dxdy \tag{4.3.1}$$

και $x = x(u,v), \;\; y = y(u,v)$ ο μετασχηματισμός που μας πάει από τον τόπο D στον οποίο ορίζεται το ολοκλήρωμα, σε ένα άλλο τόπο D' του επιπέδου (u,v). Μπορούμε τότε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα ως

$$I = \int\int_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\frac{D(x,y)}{D(u,v)}dudv = \int\int_{D'} F(u,v)dudv \tag{4.3.2}$$

όπου η νέα συνάρτηση προκύπτει από τον μετασχηματισμό όλων των συναρτήσεων του πρώτου ολοκληρώματος στο επίπεδο (u,v).

Ομοίως εάν

$$I = \int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz \tag{4.3.3}$$

είναι ένα τριπλό ολοκλήρωμα και $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ και $z = z(u,v,w)$ ένας μετασχηματισμός που μας πάει από τον τόπο V σε ένα τόπο $V^{'}$, τότε

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_{V'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}dudvdw = \\ &= \int\int\int_{V'} F(u,v,w)dudvdw \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Παράδειγμα 4.4: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int\int_D (x^2+y^2)dxdy$ όπου ο τόπος D είναι ο κύκλος ακτίνας R. Εδώ απλοποιούνται τα πράγματα αν πάμε στις συντεταγμένες (r,θ) όπου $x = rcos\theta$, $y = rsin\theta$. Τότε ο νεός τόπος $D^{'}$ θα είναι ο
$D^{'} : 0 \leq r \leq R,\;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Συνεπώς θα έχουμε

$$I = \int\int_{D'} r^2 \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}drd\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r^3 drd\theta = \frac{\pi R^4}{2}$$

4.4 Εφαρμογές: Κέντρα Μάζας και Ροπές Αδράνειας

Εκτός από τις καθαρά γεωμετρικές εφαρμογές των πολλαπλών ολοκληρωμάτων που είδαμε παραπάνω, υπάρχουν και σημαντικές εφαρμογές που προέρχονται από την Φυσική. Έστω D ένας επίπεδος τόπος, που προσομοιάζει ένα υλικό επίπεδο αντικείμενο με επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\sigma(x,y)$ (σε οποιεσδήποτε μονάδες, έστω gr/cm^2). Τότε η συνολική του μάζα και την θέση του κέντρου μάζας του $(\bar{x},\bar{y})$ δίνονται από τις

$$\begin{aligned} M &= \int\int_D \sigma(x,y)dxdy \\ \bar{x} &= \frac{1}{M}\int\int_D x\sigma(x,y)dxdy \\ \bar{y} &= \frac{1}{M}\int\int_D y\sigma(x,y)dxdy \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Επίσης οι ροπές αδράνειας του ως πρός τον άξονα Oz και τους άξονες Ox και Oy δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} I_0 &= \int\int_D (x^2+y^2)\sigma(x,y)dxdy \\ I_x &= \int\int_D y^2\sigma(x,y)dxdy \end{aligned}$$

$$I_y = \int\int_D x^2\sigma(x,y)dxdy \tag{4.4.2}$$

Παράδειγμα 4.5: Υπολογίστε τη θέση του κέντρου μάζας και τις ροπές αδράνειας για ένα ορθογώνιο μάζας M με πλευρές a, b. Υποθέτουμε ομογενή κατανομή μάζας, οπότε θα έχουμε $\sigma(x,y) = M/ab$. Τότε για το κέντρο μάζας έχουμε

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{M}\int\int_D x\frac{M}{ab}dxdy = \frac{1}{ab}\int_0^a xdx\int_0^b dy = \frac{a}{2}\\ \bar{y} &= \frac{1}{M}\int\int_D x\frac{M}{ab}dxdy = \frac{1}{ab}\int_0^a dx\int_0^b ydy = \frac{b}{2}\end{aligned}$$

Για την ροπή αδράνειας θα έχουμε

$$I_x = \int\int_D \frac{M}{ab}y^2dxdy = \frac{M}{ab}\int_0^a dx\int_0^b y^2dy = \frac{1}{3}Mb^2$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι $I_y = \frac{1}{3}Ma^2$ και $I_0 = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$.

Για την περίπτωση σωμάτων στον χώρο, που η πυκνότητα μάζας τους δίνεται από την $\rho(x,y,z)$ (σε οποιεσδήποτε μονάδες, έστω gr/cm^3) θα έχουμε τις αντίστοιχες γενικεύσεις

$$\begin{aligned}M &= \int\int\int_V \rho(x,y,z)dxdydz\\ \bar{x} &= \frac{1}{M}\int\int\int_V x\rho(x,y,z)dxdydz\\ \bar{y} &= \frac{1}{M}\int\int\int_V y\rho(x,y,z)dxdydz\\ \bar{z} &= \frac{1}{M}\int\int\int_V z\rho(x,y,z)dxdydz\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Η ροπή αδράνειας ως πρός τον άξονα Oz θα δίνεται από την

$$I_z = \int\int\int_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz \tag{4.4.4}$$

και από αντίστοιχες σχέσεις για τους άλλους δύο άξονες, με κυκλική εναλλαγή των ανεξάρτητων μεταβλητών (x,y,z).

Παράδειγμα 4.6: Υπολογίστε την ροπή αδράνειας μίας σφαίρας ακτίνας R και μάζας M ως πρός τον άξονα Oz. Υποθέτοντας ομογενή σφαίρα θα έχουμε $\rho(x,y,z) = \bar{\rho} = 3M/4\pi R^3$. Τότε

$$I_z = \bar{\rho}\int\int(x^2+y^2)dxdy\int_{z=-\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}^{z=+\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\bar{\rho}\int\int (x^2+y^2)\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}dxdy = \\
&= 4\pi\bar{\rho}\int_0^R r^2\sqrt{R^2-r^2}rdr = \\
&= 2\pi\bar{\rho}\int_0^{R^2} u\sqrt{R^2-u}du = \frac{2}{5}MR^2
\end{aligned}$$

4.5 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα στους αντίστοιχους τόπους D.

$$\int\int_D (x^2+2y)dxdy, \quad D=\{(x,y)/0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$$

$$\int\int_D \frac{x^2}{y^2}dxdy, \quad D=\{(x,y)/1\le x\le 2,\ \frac{1}{x}\le y\le x\}$$

$$\int\int_D xydxdy, \quad D=\{(x,y)/y^2\le x,\ x^2\le y\}$$

$$\int\int_D e^x dxdy, \quad D=\{(x,y)/0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$$

$$\int\int_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy, \quad D=\{(x,y)/x^2+y^2\le R^2\}$$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int\int_D (a-x-y)dxdy,$$

στον τόπο D που περιορίζεται από τις καμπύλες $3x+y=a$, $\frac{3}{2}x+y=a$ και $y=0$.

3. Ομοίως το

$$I=\int\int_D dxdy,$$

στον τόπο που περιορίζεται από τις καμπύλες $x+y=a$ και $x^2+y^2=a^2$.

4. Να υπολογίσετε το

$$I=\int_3^4 dx\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$$

5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int\int\int_V xyzdxdydz$$

όπου ο τόπος V περιορίζεται από τα συντεταγμένα επίπεδα Oxy, Oyz, Ozx και το επίπεδο $x + y + z = 1$.

6. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int\int\int_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$$

εντός της σφαίρας ακτίνας R.

7. Να υπολογίσετε το

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdydz}{\sqrt{x + y + z + 1}}$$

8. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από το συντεταγμένο επίπεδο Oxy, τον κύλινδρο $x^2+y^2 = a^2$ και το παραβολοειδές $z = x^2+y^2$.

9. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού ανάμεσα στα επίπεδα $y = 0$, $z = 0$, $y = x$ και τον κύλινδρο $x^2 + z^2 = a^2$.

10. Ομοίως τον όγκο που περιορίζεται από τα επίπεδα $x+y+z = a$, $3x+y = a$, $\frac{3}{2}x + y = a$ και τα συνεταγμένα επίπεδα $y = 0$, $z = 0$.

11. Υπολογίστε με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών το

$$I = \int\int_D (x^2 + y^2)dxdy$$

όπου ο τόπος D περιορίζεται από τις καμπύλες $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$ και $xy = 4$.

12. Υπολογίστε το ζητούμενο της Άσκησης 9 με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών στο επίπεδο Oxz.

13. Υπολογίστε με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών τους όγκους της σφαίρας και του ελλειψοειδούς.

14. Ομοίως το

$$I = \int\int_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$$

μέσα στον κύκλο $x^2 + y^2 = R^2$.

15. Υπολογίστε το εμβαδόν της έλλειψης.

16. Βρείτε το εμβαδόν που αποκόπτουν τα συντεταγμένα επίπεδα Oxy, Oyz, Ozx από το επίπεδο $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

17. Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας $z = 1 - x^2 - y^2$ πάνω από το επίπεδο Oxy.

18. Βρείτε το εμβαδόν του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 2ax$ μεταξύ του επιπέδου Oxy και του κώνου $z^2 = x^2 + y^2$.

19. Υπολογίστε την ροπή αδράνειας για ράβδο μήκους L και μάζας M που περιστρέφεται γύρω από άξονα κάθετο στο ένα άκρο της.

20. Υπολογίστε την θέση του κέντρου μάζας του τόπου D που περιορίζεται από τις καμπύλες $y^2 \leq 4x$, $y^2 \leq 5 - x$, $y \geq 0$. Υποθέστε ομογενή κατανομή μάζας.

21. Υπολογίστε τις ροπές αδράνειας ενός ορθογωνίου μάζας M και πλευρών a, b ως πρός τους τρείς άξονες.

22. Υπολογίστε τα κέντρα μάζας των τόπων που περιορίζονται από τις ακόλουθες καμπύλες: $D_1 : x + y = a, \;\; x^2 + y^2 = a^2$ και $D_2 : y = x^2, \;\; y = \sqrt{x}$.

23. Υπολογίστε τη θέση του κέντρου μάζας και τις ροπές αδράνειας για κυκλικό τομέα ακτίνας R και γωνίας 2Φ με επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = kr$, όπου k σταθερά και r η ακτινική απόσταση στο επίπεδο.

Κεφάλαιο 5

Διανυσματική Ανάλυση

5.1 Διανυσματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής

Μία σχέση της μορφής

$$\vec{a}(t) = a_1(t)\hat{x} + a_2(t)\hat{y} + a_3(t)\hat{z} = (a_1(t), a_2(t), a_3(t)) \tag{5.1.1}$$

ορίζει για κάθε τιμή της πραγματικής μεταβλητής $t \in [a, b]$ ένα διάνυσμα στον χώρο. Ορίζεται έτσι μία διανυσματική συνάρτηση μίας μεταβλητής. Καθώς το t μεταβάλλεται, γενικά το άκρο του διανύσματος διαγράφει στον χώρο μία καμπύλη C. Μπορούμε να εφαρμόσουμε όλες τις γνωστές πράξεις που αφορούν σε συναρτήσεις μίας μεταβλητής, επίσης και σε μία διανυσματική συνάρτηση. Έτσι μπορούμε να προσθέσουμε και να αφαιρέσουμε δύο τέτοιες συναρτήσεις, καθώς και να παραγωγίσουμε και να ολοκληρώσουμε διανυσματικές συναρτήσεις. Ως παράδειγμα

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{da_1(t)}{dt}\hat{x} + \frac{da_2(t)}{dt}\hat{y} + \frac{da_3(t)}{dt}\hat{z} \tag{5.1.2}$$

Το διάνυσμα $\vec{v}(t)$ έχει την ιδότητα να είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο της καμπύλης C και ονομάζεται *διάνυσμα της ταχύτητας*. Επειδή το στοιχειώδες μήκος της καμπύλης, όπως αυτό μετριέται με βάση κάποιο αυθαίρετο σημείο εκκίνησης, είναι

$$ds = \sqrt{\left(\frac{da_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_3}{dt}\right)^2}dt \tag{5.1.3}$$

προκύπτει ότι

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{d\vec{a}}{ds}\frac{ds(t)}{dt} = \hat{v}(s)\frac{ds(t)}{dt} \tag{5.1.4}$$

όπου το $\hat{v}(s) = d\vec{a}/ds$ είναι το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα (διανυσματικό πεδίο) σε τυχαίο σημείο της καμπύλης και $\frac{ds(t)}{dt}$ είναι το *μέτρο της ταχύτητας*.

Παράδειγμα 5.1: Έστω κινητό πάνω σε κύκλο ακτίνας R που περιφέρεται με γωνιακή ταχύτητα ω. Τότε η διανυσματική συνάρτηση που παρακολουθεί το κινητό σε κάθε σημείο της τροχιάς του είναι

$$\vec{a}(t) = Rcos(\omega t)\hat{x} + Rsin(\omega t)\hat{y}$$

όπου εδώ η παράμετρός μας t είναι ο χρόνος, και $\theta = \omega t$ η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα του κύκλου που παρακολουθεί το κινητό με τον άξονα x. Τότε η ταχύτητα είναι

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} = -R\omega sin(\omega t)\hat{x} + R\omega cos(\omega t)\hat{y}$$

Το μέτρο της ταχύτητας είναι $|\vec{v}(t)| = (ds(t)/dt) = R\omega$ όπως αυτό προκύπτει από την παραπάνω σχέση. Πράγματι αυτό επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι το μήκος του τόξου πάνω σε κύκλο ακτίνας R είναι $s = R\theta = R\omega t$ οπότε $(ds/dt) = R\omega$. Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα, όπως προκύπτει από την ίδια σχέση είναι

$$\hat{v}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = -sin(\omega t)\hat{x} + cos(\omega t)\hat{y}$$

και με αντικατάσταση προκύπτει άμεσα ότι ικανοποιείται η Εξ. (5.1.4).

Το διάνυσμα

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{a}(t)}{dt^2} \tag{5.1.5}$$

ονομάζεται *διάνυσμα επιτάχυνσης*. Σχετικό με τα διανυσματικά πεδία μίας καμπύλης C, είναι το *τρίακμο Frenet* (Παράρτημα ΙΙ).

Παράδειγμα 5.2: Έστω $\vec{a}(t) = 2cost\hat{x} + 2sint\hat{y} + 3t\hat{z}$. Βρείτε τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης καθώς και τα μέτρα τους. Θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= -2sint\hat{x} + 2cost\hat{y} + 3\hat{z} \\
\vec{\gamma}(t) &= -2cost\hat{x} + 2sint\hat{y} \\
|\vec{v}(t)| &= \sqrt{13} \\
|\vec{\gamma}(t)| &= 2
\end{aligned}$$

5.2 Διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Όπως και προηγουμένως μία σχέση της μορφής

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{x} + Q(x,y)\hat{y} \tag{5.2.1}$$

όπου οι ανεξάρτητες μεταβλητές (x, y) ορίζονται σε κάποιο τόπο $D \subset \mathbb{R}^2$ ορίζει μία διανυσματική συνάρτηση δύο μεταβλητών στο επίπεδο. Επίσης η σχέση

$$\vec{V}(x,y,z) = V_1(x,y,z)\hat{x} + V_2(x,y,z)\hat{y} + V_3(x,y,z)\hat{z} \tag{5.2.2}$$

ορίζει μία διανυσματική συνάρτηση στον τρισδιάστατο χώρο όπου οι ανεξάρτητες μεταβλητές ορίζονται γενικά σε κάποιο τόπο $V \subset \mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα 5.3: Το ηλεκτρικό πεδίο ενός σημειακού φορτίου Q που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων δίνεται από την σχέση

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{Q}{r^3}\vec{r} = \frac{Q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left[x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}\right]$$

Αυτή είναι μία διανυσματική συνάρτηση τριών μεταβλητών στον χώρο. Εδώ έχουμε

$$V_1(x,y,z) = \frac{Qx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

και παρόμοιες σχέσεις για τις υπόλοιπες δύο συντεταγμένες συναρτήσεις ισχύουν.

Αν σε κάθε σημείο ενός διανυσματικού πεδίου, κινηθούμε κατά μήκος του διανύσματος, όπως ορίζεται σε εκείνη τη θέση, διαγράφουμε γενικά στον χώρο μία καμπύλη. Αυτή την καμπύλη την ονομάζουμε *δυναμική γραμμή* του διανυσματικού πεδίου. Αντίστροφα κάθε σημείο του πεδίου ορισμού ενός διανυσματικού πεδίου περνάει μία δυναμική γραμμή, με την ιδιότητα σε κάθε σημείο της, το διάνυσμα του πεδίου να είναι εφαπτόμενο σ′ αυτήν.

5.3 Κλίση, Απόκλιση, Στροφή

Έχοντας ορίσει τα διανυσματικά πεδία στον χώρο, όπως και τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, μπορούμε να μελετήσουμε την διαφόρισή τους γενικά. Αυτή γίνεται με την εισαγωγή του *τελεστή ανάδελτα*

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{5.3.1}$$

Γενικά ένας τελεστής στα μαθηματικά δεν έχει από μόνος του νόημα. Ανάλογα όμως σε ποιό μαθηματικό αντικείμενο δρά παράγει και κάποιο αποτέλεσμα και τότε έχουμε σαν εξαγόμενο ενα άλλο αντικείμενο. Αν λοιπόν $w = f(x,y,z)$ είναι μία συνάρτηση τριών μεταβλητών τότε *η κλίση* της ορίζεται ως

$$\nabla f = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\hat{z} \tag{5.3.2}$$

και έτσι η δράση του τελεστή ανάδελτα πάνω σε συναρτήσεις, παράγει (μας δίνει) διανυσματικά πεδία στον χώρο. Η κλίση μίας αριθμητικής συνάρτησης έχει πολλές εφαρμογές. Αν $f(x,y,z) = 0$ είναι μία επιφάνεια στον χώρο των τριών διαστάσεων, τότε το

$$\hat{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \tag{5.3.2}$$

είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο πάνω στην επιφάνεια αυτή.

Παράδειγμα 5.4: Έστω $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2 = 0$ η επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας R. Τότε $\nabla f = x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$ και

$$\begin{aligned}\hat{n} &= \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \\ &= \frac{1}{R}[x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}] = \hat{r}\end{aligned}$$

Επιβεβαιώνουμε δηλαδή ότι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο πάνω στην σφαίρα συμπίπτει με το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα $\hat{r}$.

Επειδή η κλίση είναι κάθετη σε μία επιφάνεια, θα είναι και κάθετη στο *εφαπτόμενο επίπεδό* της, σε κάποιο σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Παίρνοντας λοιπόν το εσωτερικό γινομενο της κλίσης με κατάλληλο διάνυσμα έχουμε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της $f(x, y, z) = 0$ στο παραπάνω σημείο. Αυτή δεν είναι άλλη από την

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0 \qquad (5.3.2)$$

Παράδειγμα 5.5: Αν θεωρήσουμε την επιφάνεια της σφαίρας όπως παραπάνω, τότε στο σημείο της $P_0(0, 0, R)$ η σχέση για το εφαπτόμενο επίπεδο της γράφεται

$$2R(z - R) = 0$$

δηλ. $z = R$.

Η τελευταία σημαντική ιδιότητα της κλίσης είναι ότι μας δίνει την *κατα κατεύθυνση παράγωγο* μίας συνάρτησης. Έστω $w = f(x, y, z)$ μία συνάρτηση και έστω μία διεύθυνση στο χώρο που προσδιορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{t}$. Τότε αν s είναι μία στοιχειώδης μετατόπιση κατά μήκος αυτής της διεύθυνσης θα έχουμε

$$\frac{df}{ds} = (\nabla f) \cdot \hat{t} \qquad (5.3.2)$$

Παράδειγμα 5.6: Έστω $g(x, y) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ η συνάρτηση της ακτινικής απόστασης στο επίπεδο. Τότε

$$\nabla g = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Τότε κατά μήκος της ακτινικής διεύθυνσης $\hat{t} = \hat{r} = (x\hat{x} + y\hat{y})/\sqrt{x^2 + y^2}$ θα έχουμε

$$(\nabla g) \cdot \hat{t} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = 1 = \frac{dg(r)}{dr}$$

που είναι ορθό διότι $g = r$. Κατά μήκος της εφαπτομενικής διεύθυνσης $\hat{t} = (-y\hat{x} + x\hat{y})/\sqrt{x^2 + y^2}$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}(\nabla g) \cdot \hat{t} &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \\ &= 0 = \frac{dg(s)}{ds}\end{aligned}$$

που είναι ακριβές διότι κατά την εφαπτομενική διεύθυνση η συνάρτηση g παραμένει σταθερή!

Ερχόμαστε τώρα στην δεύτερη χρήση του τελεστή ανάδελτα. Σύμφωνα με αυτήν ο τελεστής δρά πάνω σε διανυσματικό πεδίο και παράγει συνάρτηση. Αν έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο όπως αυτό της Εξ. (5.2.2) τότε *η απόκλισή* του ορίζεται ως

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \tag{5.3.2}$$

Η ουσιαστική σημασία της απόκλισης ενός διανυσματικού πεδίου είναι η ακόλουθη: Εάν σε ένα σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ του πεδίου ορισμού του έχουμε $(\nabla \cdot \vec{V})_{P_0} = 0$ τότε λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο (που μπορεί να περιγράφει το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού για παράδειγμα) είναι ασυμπίεστο. Αυτό σημαίνει ότι στο σημείο εκείνο δεν υπάρχει ούτε *πηγή* (από την οποία να ξεκινούν) αλλά ούτε και *καταβόθρα* στην οποία να καταλήγουν δυναμικές γραμμές του πεδίου.

Παράδειγμα 5.7: Ας θεωρήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο ενός σημειακού φορτίου, όπως αυτό φαίνεται στο Παράδειγμα 5.3. Τότε η απόκλισή του είναι

$$\nabla \cdot \vec{E} = Q \left[\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right] = 0$$

Αυτή η σχέση ισχύει για όλα τα σημεία του χώρου εκτός της αρχής $O(0,0,0)$ όπου βρίσκεται το φορτίο. Άρα πουθενά δεν υπάρχουν πηγές των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών (ή καταβόθρες) εκτός από την αρχή. Αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε αν θυμηθούμε και την πρώτη εξίσωση του Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

Στα σημεία που υπάρχει πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου, η απόκλιση του ηλεκτρικού πεδίου είναι μή-μηδενική και έχουμε κατάληξη ή αφετηρία δυναμικών γραμμών.

Ερχόμαστε τώρα στην τρίτη χρήση του τελεστή ανάδελτα, η οποία ονομάζεται *στροφή* διανυσματικού πεδίου. Από ένα διανυσματικό πεδίο, όπως αυτό της Εξ. (5.2.2) παράγεται ένα άλλο σύμφωνα με την σχέση

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{x}, & \hat{y}, & \hat{z} \\ \partial_x, & \partial_y, & \partial_z \\ V_1, & V_2, & V_3 \end{vmatrix} &= \hat{x}\left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right) + \\ &+ \hat{y}\left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right) + \\ &+ \hat{z}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Η σημασία της στροφής είναι η ακόλουθη: Αν σε ένα σημείο P_0 η στροφή είναι μηδέν σημαίνει ότι το πεδίο είναι εκεί *αστρόβιλο*, δηλ. δέν υπάρχει δυναμική γραμμή του πεδίου που να περιστρέφεται και να είναι κλειστή, γύρω από αυτό το σημείο.

Παράδειγμα 5.8: Έστω $\vec{V} = x\hat{x} + y\hat{y}$ το διανυσματικό πεδίο του διανύσματος θέσης στο επίπεδο (σχεδιάστε το!). Θα έχουμε

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{x}, & \hat{y}, & \hat{z} \\ \partial_x, & \partial_y, & \partial_z \\ x, & y, & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}\frac{\partial y}{\partial z} - \hat{y}\frac{\partial x}{\partial z} + \hat{z}0 = 0$$

Το πεδίο αυτό είναι αστρόβιλο παντού. Σε οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου και να σταθείτε δεν θα βρείτε δυναμική γραμμή που να περιφέρεται και να είναι κλειστή περί το σημείο αυτό!

Παράδειγμα 5.9: Έστω $\vec{V} = -y\hat{x} + x\hat{y}$ διανυσματικό πεδίο στο επίπεδο (σχεδιάστε το!). Θα έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{x}, & \hat{y}, & \hat{z} \\ \partial_x, & \partial_y, & \partial_z \\ -y, & x, & 0 \end{vmatrix} &= \hat{x}0 + \hat{y}0 + \\ &+ \hat{z}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right) = 2\hat{z} \neq 0 \end{aligned}$$

Αυτό το πεδίο έχει στροβολισμό. Σε οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου και αν σταθείτε υπάρχει δυναμική γραμμή που είναι κλειστή και περιφέρεται γύρω από το σημείο αυτό!

Τέλος για μία συνάρτηση $w = f(x, y, z)$ μπορούμε να ορίσουμε την *Λαπλασιανή* της ως

$$\nabla \cdot (\nabla f) := \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{5.3.3}$$

Αυτή η συνάρτηση προκύπτει σε προβλήματα δυναμικού, στη Φυσική.

5.4 Επικαμπύλια και Επιεπιφάνεια Ολοκληρώματα

Έστω η καμπύλη C που ορίζεται απο το διανυσματικό πεδίο της Εξ. (5.1.1). Έστω επίσης το διανυσματικό πεδίο της Εξ. (5.2.2). Ορίζουμε ως *επικαμπύλιο ολοκλήρωμα* του δεύτερου διανυσματικού πεδίου επάνω στην καμπύλη C από το σημείο $A(a_1(t_1), a_2(t_1), a_3(t_1))$ (που αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου $t = t_1$) έως το σημείο $B(a_1(t_2), a_2(t_2), a_3(t_2))$ (που αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου $t = t_2$) την ποσότητα

$$\begin{aligned} I_C &= \oint_A^B \vec{V} \cdot d\vec{a} = \int_{t_1}^{t_2} \left[V_1(a_1(t), a_2(t), a_3(t)) \frac{da_1}{dt} + \right. \\ &+ \left. V_2(a_1(t), a_2(t), a_3(t)) \frac{da_2}{dt} + V_3(a_1(t), a_2(t), a_3(t)) \frac{da_3}{dt} \right] dt \quad (5.4.1) \end{aligned}$$

Παρατηρώντας την σχέση αυτή αντιλαμβανόμαστε αμέσως ότι σε κάθε σημείο λαμβάνουμε το εσωτερικό γινόμενο του διανυσματικού πεδίου $\vec{V}$ (υπολογισμένου στο σημείο εκείνο) με το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης C (που αντιστοιχεί επίσης στο σημείο εκείνο) και αθροίζουμε όλες τις συνεισφορές. Εάν το $\vec{V}$ είναι πεδίο δυνάμεων που ασκείται πάνω σε κινητό σώμα, που κινείται κατά μήκος της καμπύλης C τότε το I_C δεν είναι τίποτε άλλο από το *έργο* της δύναμης επάνω στο κινητό!

Για τον υπολογισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος πρέπει να μας δίνεται το πεδίο $\vec{V}(x, y, z)$ και η καμπύλη στον χώρο. Επειδή μία καμπύλη στο χώρο μπορεί να δοθεί γενικά ώς τομή δύο επιφανειών (δηλ. $G_1(x, y, z) = 0,\ G_2(x, y, z) = 0$) θα πρέπει να την γράψουμε πρώτα σε κατάλληλη παραμετρική μορφή (όπως αυτή της Εξ. (5.1.1)) και μετά το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε απλό ολοκλήρωμα ως πρός την μεταβλητή t.

Παράδειγμα 5.10: Έστω το διανυσματικό πεδίο $\vec{V}(x^2 - 2xy, 2xy + y^2)$ και η καμπύλη C που είναι η παραβολή $y = x^2$ στο επίπεδο. Να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του παραπάνω διανυσματικού πεδίου από το σημείο $A(0, 0)$ έως το $B(1, 1)$. Για την καμπύλη αυτή μπορούμε εύκολα να γράψουμε την παραμετρική της μορφή ως (t, t^2) με αρχικό σημείο το Α (που αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου $t = 0$) και τελικό σημείο το Β (που αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου $t = 1$). Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} I_C &= \int_0^1 \left[(t^2 - 2t^3) \frac{dt}{dt} + (2t^3 + t^4) \frac{d(t^2)}{dt} \right] dt = \\ &= \int_0^1 \left[(t^2 - 2t^3) + 2t(2t^3 + t^4) \right] dt = \frac{29}{30} \end{aligned}$$

Ερχόμαστε τώρα στην μελέτη των επιεπιφάνειων ολοκληρωμάτων. Αυτά είναι στην ουσία διπλά ολοκληρώματα συναρτήσεων που ορίζονται πάνω σε μία επιφάνεια παρά σε ένα υποσύνολο του επιπέδου Oxy. Θα θεωρήσουμε μόνο ομαλές επιφάνειες
$S:\ F(x, y, z) = 0$ που σημαίνει ότι πάντα μπορούμε να επιλύσουμε ως πρός z και να τις γράψουμε στην μορφή $z = f(x, y)/(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Επιπλέον για μία τέτοια επιφάνεια θεωρούμε ότι οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη στον άξονα Oz τέμνει την επιφάνεια σε το πολύ δύο σημεία. Το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης $w = g(x, y, z)$ ορίζεται ως το όριο

$$I = \int\int_S g(x, y, z) dS = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \quad (5.4.2)$$

όπου λαμβάνουμε μικρά τμήματα της επιφάνειας, ΔS_i και αθροίζουμε το γινόμενό τους με την τιμή της συνάρτησης σε σημείο εντός του κομματιού.

Το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα μπορούμε πάντα (για τις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν) να το μετετρέψουμε σε διπλό ολοκλήρωμα πάνω στον τόπο D για κατάλληλη συνάρτηση $z = f(x, y)$ και να το υπολογίσουμε. Θα είναι

$$\begin{aligned} I &= \int\int_S g(x,y,z)dS = \\ &= \int\int_D g(x,y,z=f(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy \quad (5.4.3) \end{aligned}$$

Εάν λάβουμε $g(x, y, z) = 1$ τότε από την Εξ. (5.4.2) έχουμε το εμβαδόν της επιφάνειας S, σχέση η οποία μας είναι ήδη γνωστή.

Το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα μπορεί να οριστεί και για ένα διανυσματικό πεδίο όπως αυτό της Εξ.(5.2.2), οπότε στην περίπτωση αυτή μας δίνει την λεγόμενη *ροή* του πεδίου αυτού που διέρχεται από την επιφάνεια. Αν και πάλι η επιφάνεια είναι η $S : \; F(x, y, z) = 0$ και μπορεί να γραφεί στην μορφή $z = f(x, y)/(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ (τουλάχιστον ένα κομμάτι της) τότε το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο είναι το

$$\hat{n} = \pm\frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \pm\frac{z_x\hat{x}+z_y\hat{y}-\hat{z}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}. \quad (5.4.4)$$

Προκειμένου για κλειστή επιφάνεια το πρόσημο επιλέγεται ώστε το κάθετο διάνυσμα να είναι προς τα έξω του περικλειομένου όγκου. Ορίζουμε τότε το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα του $\vec{V}(x, y, z)$ ως

$$\begin{aligned} I &= \int\int_S \vec{V}\cdot\hat{n}dS = \\ &= \pm\int\int_D \left[z_x V_1(x,y,z) + z_y V_2(x,y,z) - V_3(x,y,z)\right] dxdy \quad (5.4.4) \end{aligned}$$

όπου $z = f(x, y)$ (Άσκηση 15, 16).

5.5 Τα Θεωρήματα Green και Gauss

Το θεώρημα Green στο επίπεδο συνδέει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\hat{x} + Q(x, y)\hat{y}$ με το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα της στροφής του. Θεωρούμε ότι η καμπύλη C είναι κλειστή καμπύλη που δεν τέμνει τον εαυτό της και περικλείει ένα τόπο D που είναι συναφής, κανονικός και χωρίς τρύπες. Τότε

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\int_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{z} dxdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \qquad (5.5.1)$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα λαμβάνεται με την δεξιόστροφη φορά (κανόνας του δεξιού χεριού με τον αντίχειρα στην θετική $z-$διεύθυνση).

Παράδειγμα 5.11: Έστω το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = -y\hat{x} + x\hat{y}$ στο επίπεδο. Να επαληθεύσουμε το θεώρημα Green για τον κύκλο ακτίνας R. Η παραμετρική μορφή της καμπύλης αυτής (από την οποία μπορεί άμεσα να γραφεί και η διανυσματική παραμετρική της έκφραση) είναι $x(t) = Rcost, \quad y(t) = Rsint$. Τότε η σχέση υπολογισμού του επικαμπυλίου ολοκληρώματος Εξ. (5.4.1) γίνεται

$$I_C = \int_{t=0}^{2\pi} [-Rsint \cdot (-Rsint) + Rcost \cdot (Rcost)] = 2\pi R^2$$

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε και το δεξιό μέλος της Εξ. (5.5.1). θα είναι

$$I_D = \int\int_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dxdy = \int\int_D 2dxdy = 2\pi R^2$$

επειδή το εμβαδόν του κύκλου είναι πR^2. Άρα επιβεβαιώσαμε ότι ισχύει το θεώρημα Green.

Το θεώρημα Gauss αφορά ένα τόπο $V \subset \mathbb{R}^3$ που περιορίζεται από μία κλειστή επιφάνεια S την οποία λαμβάνουμε να είναι ομαλή, όπως αυτή που χρησιμοποιήσαμε στον ορισμό του επιεπιφάνειου ολοκληρώματος. Τότε η ροή ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ μέσω της επιφάνειας αυτής ισούται με το τριπλό ολοκλήρωμα της απόκλισης του πεδίου στον τόπο V

$$\int\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int\int\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV \qquad (5.5.2)$$

Παράδειγμα 5.12: Έστω το πεδίο $\vec{V}(x, y, z) = E\hat{z}$ όπου E είναι σταθερά. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ροή (επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα) που διέρχεται από το άνω ημισφαίριο ακτίνας R. Η εξίσωση της σφαίρας είναι $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ και το άνω ημισφαίριο γράφεται ως $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Τότε το κάθετο μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο θα είναι το

$$\begin{aligned} \hat{n}_1 &= \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \\ &= \frac{1}{R}[x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}] \end{aligned}$$

Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\int_S \vec{V} \cdot \hat{n} dS = \int\int_D \frac{Ez}{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy = \\ &= \pi R^2 E \end{aligned}$$

όπου ο τόπος D στο επίπεδο Oxy είναι ο κύκλος ακτίνας R. Αν τώρα υπολογίζαμε το ίδιο ολοκλήρωμα για το κάτω ημισφαίριο, όπου το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $\hat{n}_2 = -\hat{n}_1$ θα είχαμε ως αποτέλεσμα $I_2 = -I_1$. Συνεπώς η συνολική ροή $I = I_1 + I_2 = 0$. Αυτό είναι αναμενόμενο αποτέλεσμα διότι σύμφωνα και με το θεώρημα Gauss η ροή ισούται με το τριπλό ολοκλήρωμα, μέσα στον όγκο της σφαίρας, της απόκλισης του πεδίου. Αλλά $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. Το διανυσματικό αυτό πεδίο είναι ίδιο με ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, του οποίου η ροή μέσα από κλειστή επιφάνεια ισούται με μηδέν.

Παράδειγμα 5.13: Έστω τώρα το ηλεκτρικό πεδίο του παραδείγματος 5.3. Τότε η ροή του μέσα από την ίδια επιφάνεια (της σφαίρας ακτίνας R) θα είναι

$$\begin{aligned} I &= \int\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{R^3}[x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}] \cdot \frac{1}{R}[x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}] dS = \\ &= \int\int_S \frac{Q}{R^4} R^2 dS = 4\pi Q \end{aligned}$$

διότι πάνω στην σφαίρα έχουμε $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Επίσης από τον πρώτο νόμο του Maxwell έχουμε ότι η απόκλιση του ηλεκτρικού πεδίου ισούται με την πυκνότητα φορτίου, δηλ. $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$. Ολοκληρώνοντας την σχέση αυτή για την περίπτωση του σημειακού φορτίου που το έχουμε τοποθετήσει στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων, στον χώρο της σφαίρας έχουμε

$$I = \int\int\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \int\int\int_V 4\pi\rho dV = 4\pi Q$$

Συνεπώς επειδή τα δεξιά μέλη των δύο παραπάνω σχέσεων είναι ίσα, έχουμε ακόμα μία επιβεβαίωση του θεωρήματος Gauss.

Παράδειγμα 5.14: Με χρήση του θεωρήματος Green στο επίπεδο θα εξάγουμε από τον τρίτο νόμο του Maxwell, τον κανόνα του Ampere, ή αντίστροφα η γνώση αυτής της ισοδυναμίας θα μας δώσει μία ακόμα επιβεβαίωση του θεωρήματος. Η τρίτη εξίσωση του Maxwell συνδέει το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ με την πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$ μέσω της σχέσης

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

όπου μ_0 είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού. Θεωρώντας στο επίπεδο ένα κύκλο ακτίνας R ($C: \ x^2 + y^2 = R^2$) εφαρμόζουμε το θεώρημα Green, για ένα κατακόρυφο ρευματοφόρο αγωγό που διέρχεται από το κέντρο του και διαρέεται από ρεύμα I. Έχουμε

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int\int_D (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{z} dxdy = \int\int_D \mu_0 \vec{J} \cdot \hat{z} dxdy$$

Υπολογίζοντας όμως και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$B 2\pi R = \mu_0 J_z \pi R^2 \Longrightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}$$

που είναι ο νόμος του Ampere.

5.6 Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η ταχύτητα, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα και η επιτάχυνση για τα παρακάτω διανυσματικά πεδία $\vec{r}(t)$:

$$(1+e^{-t}, t^2-2t, t+sint)$$
$$(Rcost, Rsint, Ct),$$
$$(acost, bsint, Ct),$$
$$(e^{-t}cost, e^{-t}sint, e^{-t})$$
$$(1+2t-3t^2, 2-3t^2, 1-t+2t^2)$$

2. Να βρεθούν η κλίση ∇f, η απόκλιση $\nabla\cdot\vec{V}$, η στροφή $\nabla\times\vec{V}$, η Λαπλασιανή $\nabla^2 f$, η απόκλιση $\nabla\cdot(f\vec{V})$ και η στροφή $\nabla\times(f\vec{V})$ για τα παρακάτω ζεύγη

$$f = xy+yz+zx, \qquad \vec{V}(x, y^2, xz)$$
$$f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \vec{V}(x, y, z)$$
$$f = x^2yz, \qquad \vec{V}(xy, x^2, y+z)$$

3. Να βρεθεί η κατά κατεύθυνση παράγωγος για την συνάρτηση $z = f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$ στο σημείο $P(1, 2)$ και κατά την κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία 60^o με τον θετικό $x-$άξονα.

4. Ομοίως να βρεθεί η κατά κατεύθυνση παράγωγος για την $u = xy+yz+zx$ στο σημείο $M(1, 1, 2)$ και κατά την διεύθυνση που συναντάμε το σημείο $N(-11, 4, 6)$.

5. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_{AGB} e^{xy}[y^2dx + (1+xy)dy]$$

όπου AGB τυχαία καμπύλη που συνδέει το $A(1, 0)$, $B(2, 0)$ και το τυχαίο σημείο G του άνω ημιεπιπέδου.

6. Επαληθεύστε το θεώρημα Green για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C [(2xy - x^2)dx + (x+y^2)dy]$$

όπου C η κλειστή καμπύλη που περιβάλλει τον τόπο D που περικλείεται από τις $y = x^2, \ \ x = y^2$.

7. Υπολογίστε το

$$I = \int_C [(3x^2 - 6y)dx + (2y^2 + 3x)dy]$$

όπου η καμπύλη C συνδέει τα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,1)$ κατά μήκος α) της $y = x^2$, β) της ευθείας που ενώνει τα σημεία και γ) της τεθλασμένης $OBCA$ με $B(1,0)$ και $C(0,1)$.

8. Επαληθεύστε το θεώρημα Green για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C [(x+y)dx + (-x+y)dy]$$

όπου C το τετράγωνο που ορίζεται από τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ και $C(1,1)$.

9. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I \int_{AB} (x^3 + xy)ds$$

όπου η καμπύλη AB είναι η $y = x^2$ με $A(0,0)$ και $B(2,4)$. Υπενθυμίζουμε ότι για μία συνάρτηση $y = f(x)$ το στοιχειώδες μήκος πάνω στην γραφική της παράσταση δίνεται από την $ds = \sqrt{1 + (f')^2}dx$.

10. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα κατά μήκος των υποδεικνυόμενων καμπυλών:

$$I_1 = \int_{AB} (x+y)dx$$

με $A(0,1)$, $B(0,-1)$ πάνω στον κύκλο $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ και $0 \le x \le 1$.

$$I_2 = \int_C xy(x^2dx + y^2dy)$$

πάνω στο πρώτο τεταρτημόριο της έλλειψης με ημιάξονες a, b.

11. Με την βοήθεια του θεωρήματος Green υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C (e^{xy} + 2xcosy)dx + (e^{xy} - x^2 siny)dy$$

πάνω στον κύκλο ακτίνας R.

12. Ομοίως για το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$$

πάνω στην έλλειψη με ημιάξονες a, b και πάνω στον κύκλο $x^2 + y^2 = ax$.

13. Αποδείξτε το θεώρημα Green για το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C (x^3 - x^2 y)dx + xy^2 dy$$

και η καμπύλη C περιορίζει τον τόπο D που περιβάλλεται από τους κύκλους $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 16$.

14. Βρείτε το εμβαδόν του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ που περιορίζεται από τις σχέσεις $x \geq 0$, $y \geq 0$ και $0 \leq z \leq 1$. Υπολογίστε το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα πάνω στο ίδιο τμήμα της επιφάνειας, του διανυσματικού πεδίου $\vec{V}(0, 0, -1)$.

15. Υπολογίστε το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα για το πεδίο $\vec{V}(xy, -x^2, x + z)$ πάνω στην επιφάνεια (επίπεδο) $2x + 2y + z - 6 = 0$ που περιορίζεται από τις σχέσεις $x, y, z \geq 0$.

16. Ομοίως για το πεδίο $\vec{V}(x, z, -y)$ για το άνω και κάτω ημισφαίριο της μοναδιαίας σφαίρας. Ποιά η συνολική ροή του πεδίου μέσα από την κλειστή επιφάνεια·

17. Με την βοήθεια του θεωρήματος Gauss υπολογίστε το επιπειφάνειο ολοκλήρωμα για το $\vec{V}(x^2, y^2, z^2)$ πάνω στην σφαίρα ακτίνας R.

18. Το ίδιο για το $\vec{V}(x^3, x^2 y, x^2 z)$ πάνω στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = a^2$, και τα επίπεδα $z = 0$, $z = b$.

Κεφάλαιο 6

Διαφορικές Εξισώσεις

6.1 Εισαγωγή στις Διαφορικές εξισώσεις

Σε μελέτες που αφορούν βιολογικούς πληθυσμούς, δημογραφικά προβλήματα ή άλλου είδους διακριτά μετρήσιμα μεγέθη συνήθως προσομοιάζουμε τον πληθυσμό σε κάποια χρονική στιγμή με μία συνάρτηση $N(t)$. Έστω λοιπόν ότι παρατηρήσαμε πως ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι ανάλογος με τον ήδη υπάρχοντα. Τότε μέσα σε ένα χρονικό διάστημα Δt έχουμε

$$N(t+\Delta t) - N(t) = \Delta N = kN(t)\Delta t$$

όπου k είναι μία δεδομένη σταθερά. Διαιρώντας με Δt και λαμβάνοντας το όριο $\Delta t \to 0$ έχουμε

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $N(t)$ ικανοποιεί μία εξίσωση που περιλαμβάνει εκτός από την ίδια την συνάρτηση και παραγώγους της. Αυτή είναι μία *συνήθης διαφορική εξίσωση* (Σ.Δ.Ε).

Μπορούμε να δείξουμε ότι η $N(t) = Ce^{kt}$ είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης, απλά βρίσκοντας την παράγωγο και αντικαθιστώντας. Παρατηρούμε ότι αυτή η λύση εξαρτάται από μία *αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης*, την C. Αποτελεί λοιπόν αυτή η λύση την *γενική λύση* της Σ.Δ.Ε. Από αυτή την μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων μπορούμε να επιλέξουμε μία *μερική λύση* η οποία να ικανοποιεί συγκεκριμένες *αρχικές συνθήκες*. Αν δηλαδή την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ ο πληθυσμός ισούται με συγκεκριμένη, δοσμένη τιμή $N(t = 0) = C = N_0$ =δεδομένη, τότε λαμβάνουμε την μερική λύση που ικανοποιεί τα ζητούμενα του προβλήματός μας και είναι

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

Ας εξετάσουμε και ένα δεύτερο παράδειγμα. Σώμα εκτοξεύεται από το έδαφος, κατακόρυφα πρός τα πάνω με αρχική ταχύτητα u_0. Επιζητούμε να μελετήσουμε την κίνησή του. Θα πρέπει να καταστρώσουμε την Δ.Ε. που ικανοποιεί η κίνηση του σώματος και να την επιλύσουμε. Γνωρίζουμε ότι ισχύει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα,
Μάζα × Επιτάχυνση=Δύναμη. Αλλά η επιτάχυνση είναι η παράγωγος της συνάρτησης της ταχύτητας $u(t)$, και η δύναμη δεν είναι άλλη από το βάρος του σώματος $-mg$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Άρα η Δ.Ε. της κίνησης του σώματος είναι

$$m\frac{du(t)}{dt} = -mg \Longrightarrow \frac{du(t)}{dt} = -g \tag{6.1.0}$$

Το να επιλύσουμε μία Δ.Ε. σημαίνει να την ολοκληρώσουμε. Εδώ η ολοκλήρωση δίνει

$$u(t) = C_1 - gt$$

όπου C_1 είναι η αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης, που χαρακτηρίζει την οικογένεια της γενικής λύσης για την Δ.Ε. Όμως γνωρίζουμε ότι $u(t = 0) = C_1 = u_0$, άρα η λύση που αναζητούμε είναι $u(t) = u_0 - gt$ και ο χρόνος κίνησης, ή ανόδου προκύπτει όταν μηδενιστεί η ταχύτητα, δηλ. $t_{max} = (u_0/g)$.

Γνωρίζουμε όμως ότι και η ταχύτητα είναι η παράγωγος της συνάρτησης της θέσης

$$u(t) = \frac{dz(t)}{dt} = u_0 - gt$$

Αυτή είναι επίσης μία Δ.Ε. που ικανοποιεί η συνάρτηση της θέσης του σώματός μας. Ολοκληρώνοντας έχουμε την γενική λύση ως $z(t) = C_2 + u_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ όπου C_2 είναι η αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης που χαρακτηρίζει αυτή την οικογένεια της γενικής λύσης. Επειδή όμως για $t = 0$ έχουμε $z(t = 0) = 0$ (αρχική συνθήκη) θα έχουμε $C_2 = 0$. Η ζητούμενη μερική λύση είναι $z(t) = u_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ και το μέγιστο ύψος ανόδου προκύπτει για $t = t_{max}$ δηλ.

$$z_{max} = \frac{u_0^2}{2g}$$

Ερχόμαστε τώρα να δώσουμε ένα ορισμό. Μία σχέση της μορφής

$$F(x, y, y^{'}, ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (6.1.1)$$

ονομάζεται συνήθης διαφορική εξίσωση για την άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$. Ο ακέραιος n που είναι η τάξη της μέγιστης παραγώγου που εμφανίζεται, καλείται *τάξη* της Δ.Ε. Η γενική λύση της Σ.Δ.Ε. δίνεται σε συνάρτηση με n το πλήθος αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης, ως

$$y = y(x; C_1, ..., C_n) \qquad (6.1.2)$$

Πραγματικά παραγωγίζοντας την σχέση αυτή n φορές καταλήγουμε στις $n-$το πλήθος σχέσεις

$$\begin{aligned} y^{'} &= y^{'}(x; C_1, ..., C_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)} &= y^{(n)}(x; C_1, ..., C_n) \end{aligned}$$

Αυτές τις σχέσεις μπορούμε (κατ΄ αρχήν τουλάχιστον) να τις επιλύσουμε ως πρός τις σταθερές

$$C_i = C_i(x, y, y^{'}, ..., y^{(n)}), \quad (i = 1, 2, ...n)$$

Αντικαθιστώντας τις στην γενική λύση, Εξ. (6.1.2) προκύπτει πράγματι μία σχέση της μορφής της Εξ. (6.1.1). Για να επιλέξουμε μία συγκεκριμένη λύση πρέπει να καθορίσουμε αρχικές συνθήκες. Για μία Δ.Ε. τάξης n χρειάζεται να καθορίσουμε για κάποια αρχική τιμή $x = x_0$ τις τιμές της συνάρτησης και των παραγώγων της μέχρι τάξης $(n-1)$. Δηλαδή πρέπει να καθορίσουμε τους n το πλήθος αριθμούς $y_0, y_0^{'}, ..., y_0^{(n-1)}$. Τότε

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y(x_0; C_1, ..., C_n) = y_0 \\ y^{'}(x_0) &= y^{'}(x_0; C_1, ..., C_n) = y_0^{'} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y^{(n-1)}(x_0; C_1, ..., C_n) = y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

Τότε έχοντας προκαθορίσει τους n αριθμούς στα δεξιά μέλη αυτών των εξισώσεων μπορούμε να τις επιλύσουμε ως πρός $C_i = C_i(x_0, y_0, ..., y_0^{(n-1)}),\ \ i = 1, ..., n$. Αντικατάσταση στην Εξ. (6.1.2) έχουμε την ζητούμενη μερική λύση $y = y(x; x_0, y_0, ..., y_0^{(n-1)})$.

Εφαρμογή 1. Έστω μία Δ.Ε. πρώτης τάξης. Η γενική της μορφή είναι $F(x, y, y^{'}) = 0$. Η γενική της λύση είναι της μορφής $y = y(x; C)$ και εξαρτάται από μία αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης. Για να επιλέξουμε από την γενική λύση την μερική λύση που μας ενδιαφέρει πρέπει να καθορίσουμε την αρχική συνθήκη, π.χ. $y(x_0) = y_0$ =δοσμένο. Δηλαδή ζητάμε την μερική λύση που διέρχεται από συγκεκριμένο σημείο του επιπέδου $P_0(x_0, y_0)$. Τότε θα έχουμε $y(x_0; C) = y_0$, σχέση την οποία πρέπει να επιλύσουμε ως πρός $C = C(x_0, y_0)$ και η μερική λύση που αναζητούμε θα είναι η $y = y(x; x_0, y_0)$.

Παράδειγμα 6.1: Έστω η Δ.Ε. $y^{'} = x + 1$. Τότε με ολοκλήρωση λαμβάνουμε την γενική λύση $y = \frac{1}{2}x^2 + x + C$. Αν θέλουμε την μερική λύση που περνάει από το σημείο $P_0(0, 1)$ τότε $C = 1$, οπότε θα έχουμε $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

Εφαρμογή 2. Έστω μία Δ.Ε. δεύτερης τάξης. Η γενική της μορφή είναι $F(x, y, y^{'}, y^{''}) = 0$. Η γενική της λύση είναι της μορφής $y = y(x; C_1, C_2)$ και εξαρτάται από δύο αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης. Για να επιλέξουμε μία μερική λύση πρέπει να καθορίσουμε αρχική συνθήκη, π.χ. $y(x_0) = y_0$ =δοσμένο και $y^{'}(x_0) = y_0^{'}$ = δοσμένο. Άρα πρέπει να καθορίσουμε το σημείο του επιπέδου $P_0(x_0, y_0)$ από το οποίο διέρχεται η μερική λύση, καθώς και την τιμή της παραγώγου της (κλίση) στο σημείο αυτό. Τότε θα έχουμε γενικά $C_i = C_i(x_0, y_0, y_0^{'}),\ \ i = 1, 2$ και άρα η μερική λύση θα είναι της μορφής $y = y(x; x_0, y_0, y_0^{'})$.

Παράδειγμα 6.2: Έστω η Δ.Ε. δεύτερης τάξης $y^{''} - 3y^{'} + 2y = 0$. Η γενική της λύση είναι της μορφής $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$ όπως μπορείτε εύκολα να διαπιστώσετε με απ΄ ευθείας αντικατάσταση στην Δ.Ε. Τώρα αν ζητήσουμε την μερική λύση που διέρχεται από την αρχή $O(0, 0)$ και σχηματίζει γωνία 45^o με τον $x-$άξονα θα έχουμε $C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 + 2C_2 = 1$. Επιλύοντας το σύστημα αυτό έχουμε $C_1 = -1, \ \ C_2 = 1$ και άρα η μερική λύση είναι $y(x) = -e^x + e^{2x}$.

6.2 Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζομένων Μεταβλητών

Μία Δ.Ε. πρώτης θα λέμε ότι είναι χωριζομένων μεταβλητών όταν είναι της μορφής

$$y' = \frac{dy}{dx} = F_1(x)F_2(y) \tag{6.2.1}$$

Τότε αυτή μπορεί να γραφεί

$$\frac{dy}{F_2(y)} = F_1(x)dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{F_2(y)} = \int F_1(x)dx + C$$

και με ολοκλήρωση έχουμε την γενική λύση $G_2(y) = G_1(x) + C$. Σημειώνουμε ότι μπορεί η λύση να εμφανίζεται σε πεπλεγμένη μορφή, δηλ. μπορεί να μήν είναι δυνατή η ρητή επίλυση της ως πρός $y = y(x; C)$.

Παράδειγμα 6.3: Έστω η Δ.Ε. $y' = xy$. Τότε

$$\frac{dy}{y} = xdx \Longrightarrow ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C \Longrightarrow y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x^2}$$

όπου C_1 η αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης. Αν θέλουμε την μερική λύση που διέρχεται από το $P_0(0,1)$ τότε βρίσκουμε $C_1 = 1$, δηλ. $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$.

Παράδειγμα 6.4: Έστω η Δ.Ε. $y' = (1 + \frac{1}{x})/(1 + \frac{1}{y})$. Αυτή είναι χωριζομένων μεταβλητών και γράφεται

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

Ολοκληρώνοντας θα έχουμε την γενική λύση υπό την μορφή $y + ln|y| = x + ln|x| + C$, όπου C αυθαίρετη σταθερά. Παρατηρούμε εδώ ότι η λύση είναι υπό πεπλεγμένη μορφή και δεν είναι δυνατή η ρητή της επίλυση ούτε ως πρός y, ούτε ως πρός x.

6.3 Ομογενείς Δ.Ε. πρώτης τάξης

Ονομάζουμε ομογενή Δ.Ε. πρώτης τάξης κάθε εξίσωση της μορφής

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{F(x,y)}{G(x,y)} \tag{6.3.1}$$

όπου οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} F(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^\nu F(x,y) \\ G(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^\nu G(x,y) \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

είναι ομογενείς βαθμού ν. Αν $F(x,y) = F(x)$ και $G(x,y) = G(y)$ τότε μεταπίπτουμε σε Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών, όπως προηγουμένως. Για να βρούμε την γενική λύση κάνουμε την αντικατάσταση $y(x) = x\omega(x)$ και η Δ.Ε. ως πρός την καινούργια συνάρτηση $\omega(x)$ γίνεται (αποδείξτε το)

$$x\frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{F(1,\omega)}{G(1,\omega)} - \omega \tag{6.3.3}$$

Αυτή είναι πλέον Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται σύμφωνα με τα προηγούμενα.

Παράδειγμα 6.4: Έστω η ομογενής Δ.Ε. $x^2y' = x^2+y^2+3xy$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x\omega$ και εκτελώντας τις πράξεις (πρόκειται για ομογενή Δ.Ε. βαθμού ομογένειας 2) βρίσκουμε

$$x\frac{d\omega}{dx} = 1 + \omega^2 + 2\omega = (1+\omega)^2 \Longrightarrow \frac{d\omega}{(1+\omega)^2} = \frac{dx}{x}$$

Κάνοντας την ολοκλήρωση θα έχουμε $\omega(x) = -1 - \frac{1}{ln|Cx|}$ όπου C η αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης. Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$y(x) = x\omega(x) = -x\left(1 + \frac{1}{ln|Cx|}\right)$$

6.4 Γραμμικές Δ.Ε. πρώτης τάξης

Η γενική μορφή της γραμμικής Δ.Ε. πρώτης τάξης είναι της μορφής

$$\frac{dy(x)}{dx} + P(x)y(x) = Q(x) \tag{6.4.1}$$

Επιχειρούμε να βρούμε την γενική λύση κάνοντας την αντικατάσταση $y(x) = z(x)e^{-\int Pdx}$ όπου $z(x)$ είναι η καινούργια συνάρτηση. Με παραγώγιση και αντικατάσταση στην Δ.Ε. έχουμε (αποδείξτε το)

$$z' = Qe^{\int Pdx} \Longrightarrow z = [C + \int Qe^{\int Pdx}dx]$$

Συνεπώς η γενική λύση της γραμμικής Δ.Ε. που εξαρτάται από την αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης C είναι

$$y(x) = \left[C + \int Qe^{\int Pdx}dx\right]e^{-\int Pdx} \tag{6.4.2}$$

Παράδειγμα 6.5: Έστω η Δ.Ε. $xy' - y - x^2 = 0$. Αυτή είναι γραμμική με $P(x) = -1/x$ και $Q(x) = x$. Άρα $\int Pdx = -ln|x|$ και η γενική λύση είναι

$$y = [C + \int xe^{-ln|x|}dx]e^{ln|x|} = [C + \int dx]x = Cx + x^2$$

Η μερική λύση που διέρχεται από το σημείο $P_0(1,2)$ θα δίνεται από την $y = x + x^2$ (για $C = 1$).

6.5 Γραμμικές Δ.Ε. δεύτερης τάξης

Έστω η Δ.Ε. δεύτερης τάξης

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{6.5.1}$$

Αυτή είναι η γενική μορφή της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, που θα μελετήσουμε εδώ. Αν $f(x) = 0$ έχουμε την ομογενή εξίσωση. Η γενική λύση αυτής της Δ.Ε. αποτελείται από το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς, με μία συγκεκριμένη (μερική) λύση για την πλήρη (μή-ομογενή).

Έστω η ομογενής Δ.Ε. Σχηματίζουμε το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* που αντιστοιχεί σ΄ αυτήν, το οποίο είναι

$$\Pi(\rho) = \rho^2 + a_1\rho + a_2 = 0 \tag{6.5.2}$$

και αναζητούμε τις ρίζες του. Αν Δ είναι η διακρίνουσά του έχουμε τις περιπτώσεις:

α) $\Delta > 0$. Τότε υπάρχουν δύο πραγματικές ρίζες και μάλιστα $\rho_1 \neq \rho_2$. Τότε η γενική λύση θα είναι

$$y(x) = C_1 e^{\rho_1 x} + C_2 e^{\rho_2 x} \tag{6.5.3}$$

β) $\Delta = 0$. Τότε υπάρχει μία πραγματική διπλή ρίζα ρ και η γενική λύση θα είναι

$$y(x) = C_1 e^{\rho x} + C_2 x e^{\rho x} \tag{6.5.4}$$

γ) $\Delta < 0$. Τότε υπάρχουν οι μιγαδικές συζυγείς ρίζες $\rho_{1,2} = R \pm iI$ όπου R το παραγματικό μέρος και I το φανταστικό μέρος των δύο ριζών. Τότε η γενική λύση θα είναι

$$y(x) = C_1 e^{Rx} cos(Ix) + C_2 e^{Rx} sin(Ix) \tag{6.5.5}$$

Για να βρούμε τώρα μία μερική λύση για την πλήρη (μή-ομογενή) εξίσωση, συνήθως δοκιμάζουμε μία λύση ανάλογα με την μορφή της $f(x)$.

Παράδειγμα 6.6: Έστω η Δ.Ε. $y'' - 3y' + 2y = x$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο για την ομογενή Δ.Ε. είναι $\Pi(\rho) = \rho^2 - 3\rho + 2 = 0$ και έχει ρίζες $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 2$. Άρα η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Παρατηρούμε ότι $f(x) = x$. Για να προσδιορίσουμε μία μερική λύση για την πλήρη (μή-ομογενή) εξίσωση, δοκιμάζουμε να αντικαταστήσουμε στην Δ.Ε. μία λύση της μορφής $y(x) = ax + b$. Βρίσκουμε τότε ότι πρέπει $a = \frac{1}{2}$ και $b = \frac{3}{4}$. Άρα η γενική λύση για την δοσμένη εξίσωση είναι

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

6.6 Αριθμητική λύση Δ.Ε. πρώτης τάξης

Έστω η Δ.Ε. $y^{'}(x) = F(x,y) = 1/(x^2+y^2+1)$. Αυτή όπως και η συντριπτική πλειοψηφία των Δ.Ε. που μπορούμε να γράψουμε *δεν* εμπίπτει σε καμία από τις κατηγορίες εκείνες που μπορούμε να έχουμε την γενική λύση της, υπό αναλυτική μορφή (όπως παραπάνω). Εάν θέλουμε να έχουμε μία εικόνα για την συμπεριφορά της λύσης σε δοσμένο διάστημα της ανεξάρτητης μεταβλητής x, τότε πρέπει να καταφύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους επίλυσης. Έστω λοιπόν ότι ζητάμε την μερική λύση της παραπάνω εξίσωσης που διέρχεται από το σημείο $P_0(0,0)$ και θέλουμε να την μελετήσουμε και παραστήσουμε γραφικά στο διάστημα $0 \le x \le 5$.

Η μέθοδος συνίσταται στο να διακριτοποιήσουμε το διάστημα αυτό χωρίζοντας το σε μικρά κομμάτια και να αντικαταστήσουμε την Δ.Ε. με μία εξίσωση διαφορών. Αν λοιπόν χωρίσουμε το διάστημα αυτό σε $N = 100$ ισομήκη κομμάτια τότε τότε το καθένα θα έχει στοιχειώδες μήκος

$$h = \frac{(x_f - x_0)}{N} = \frac{5-0}{100} = 0.05 \tag{6.6.1}$$

και τα σημεία του πεδίου ορισμού στα οποία θα υπολογίσουμε τις τιμές της συνάρτησης και των παραγώγων της θα είναι τα

$$x_k = x_0 + (k-1)h, \qquad (k = 1, ..., N+1) \tag{6.6.2}$$

με $x_{N+1} = x_f$. Με τις αριθμητικές μεθόδους λοιπόν σχηματίζουμε μία εξίσωση διαφορών, από την οποία μέσω αναδρομικής εφαρμογής, ξεκινώντας από τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε τις τιμές της ζητούμενης συνάρτησης στα παραπάνω σημεία

$$y_k = y(x_k), \qquad (k = 1, ..., N+1) \tag{6.6.3}$$

Η πλέον απλή μέθοδος είναι του **Euler**, όπου η παράγωγος στην θέση $x = x_k$ προσεγγίζεται από την

$$y_k^{'} := y^{'}(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \tag{6.6.4}$$

Άρα αντικαθιστώντας στην παραπάνω Δ.Ε. έχουμε την αναδρομική σχέση

$$y_{k+1} = y_k + hF(x_k, y_k), \qquad (k = 0, ..., N) \tag{6.6.5}$$

Είναι φανερά τα παρακάτω:

- Όσο μικρότερο είναι το βήμα h τόσο πιό ακριβής είναι η μέθοδος.
- Όσο πιό μεγάλη είναι η τιμή της παραγώγου σε ένα σημείο, $y_k^{'} = F(x_k, y_k)$ τόσο μικρότερο θα πρέπει να είναι το βήμα (στην περίπτωση που έχουμε προβλέψει για μεταβλητό βήμα) έτσι ώστε να αποφύγουμε μεγάλα σφάλματα.

- Ο υπολογισμός του επόμενου σημείου για την άγνωστη συνάρτησή μας (x_{k+1}, y_{k+1}) στηρίζεται αποκλειστικά στο προηγούμενο (x_k, y_k), και βρίσκεται αν κινηθούμε κατά μηκος της εφαπτομένης στο τελευταίο σημείο, κατά οριζόντιο διάστημα h.

Ένας αλγόριθμος γραμμένος σε ψευδοκώδικα, που θα μπορούσε να υλοποιηθεί σε κάποια ανώτερη γλώσσα προγραμματισμού (π.χ. Fortran, $C++$) είναι ο ακόλουθος:

Δημιούργησε δύο πίνακες $x(N), y(N)$
Δημίουργησε αρχείο για αποθήκευση τιμών (x_k, y_k)
Καθόρισε αρχικές τιμές $x(1) = x_0$, $y(1) = y_0$
Κάνε από $k = 0$ έως $N - 1$ με βήμα 1
$y(k+1) = y(k) + h * F(x(k), y(k))$
Γράψε στο αρχείο το ζεύγος $(x(k), y(k))$
Συνέχισε
Κλείσε το αρχείο
Τέλος

Πίνακας 6.1: Ψευδοκώδικας για την μέθοδο Euler

Μία βελτίωση της μεθόδου Euler είναι η μέθοδος **Runge-Kutta** δεύτερης τάξης, όπου η Εξ. (6.6.5) αντικαθίσταται από την

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\left(\frac{K_1 + K_2}{2}\right) \\ K_1 &= f(x_k, y_k) \\ K_2 &= f(x_k + h, x_k + hK_1) \end{aligned} \tag{6.6.6}$$

Στην μέθοδο αυτή η τιμή της κλίσης στην αρχή του διαστήματος $(x_k, x_{k+1} = x_k + h)$ υπολογίζεται αρχικά. Κατόπιν η τιμή της κλίσης στο δεξιό άκρο του διαστήματος υπολογίζεται και τελικά για την πρόβλεψη της τιμής $y_{k+1} = y(x_{k+1})$ χρησιμοποιούμε ώς κλίση τον *μέσο όρο* των δύο προηγουμένως υπολογισμένων τιμών.

6.7 Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους

Έστω η συνάρτηση δύο μεταβλητών $z = z(x,y) = x^3 f(y/x)$, όπου f είναι αυθαίρετη συνάρτηση του υποδεικνυόμενου ορίσματος. Θα έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 f(\frac{y}{x}) - xyf'(\frac{y}{x})\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 f'(\frac{y}{x})\end{aligned}$$

Παρατηρούμε συνεπώς ότι η συνάρτηση z ικανοποιεί την σχέση

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3z$$

Η σχέση αυτή αποτελεί παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους
(Δ.Ε.Μ.Π) την οποία ικανοποιεί η συνάρτηση που προαναφέραμε. Παρατηρούμε ότι η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου είναι 1, και κατ΄ αναλογία με τις συνήθεις Δ.Ε. την ονομάζουμε *τάξη* της Δ.Ε.Μ.Π. Η συνάρτηση που εξετάσαμε αποτελεί την γενική λύση της εξίσωσης και εξαρτάται από μία αυθαίρετη συνάρτηση, κατά πλήρη αναλογία με τις συνήθεις εξισώσεις όπου έχουμε τις αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης.

Γενικά μία Δ.Ε.Μ.Π πρώτης τάξης είναι της μορφής

$$F(x,y,z,p,q) = 0 \tag{6.7.1}$$

όπου $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ και $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Ομοίως μία σχέση της μορφής

$$G(x,y,z,p,q,r,s,t) = 0 \tag{6.7.2}$$

αποτελεί την γενική μορφή μίας Δ.Ε.Μ.Π. δεύτερης τάξης. Εδώ $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ και $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Η γενική λύση μίας Δ.Ε.Μ.Π τάξης n εξαρτάται από n στο πλήθος αυθαίρετες συναρτήσεις ολοκλήρωσης, κατά πλήρη αναλογία με τις συνήθεις Δ.Ε., όπου έχουμε αυθαίρετες σταθερές. Για να επιλέξουμε μία μερική λύση πρέπει να καθορίσουμε, στην περίπτωση Δ.Ε.Μ.Π, τις λεγόμενες *συνοριακές συνθήκες*.

Παράδειγμα 6.7: Έστω η Δ.Ε.Μ.Π. $(\partial^2 z/\partial x \partial y) = 0$. Η γενική λύση της είναι $z = f(x) + g(y)$ όπου f, g είναι αυθαίρετες συναρτήσεις των αντίστοιχων ορισμάτων, όπως εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε.

Ερχόμαστε τώρα στις γραμμικές Δ.Ε.Μ.Π. πρώτης τάξης. Μία τέτοια εξίσωση μπορεί να γραφεί ως

$$P(x,y,z)p + Q(x,y,z)q = R(x,y,z) \tag{6.7.3}$$

Η γενική λύση της δίνεται από την

$$\begin{aligned}F(c_1,c_2) &= 0\\ u(x,y,z) &= c_1\\ v(x,y,z) &= c_2\end{aligned} \tag{6.7.4}$$

όπου οι συναρτήσεις u, v είναι οι γενικές λύσεις των εξισώσεων

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{6.7.5}$$

Παράδειγμα 6.8: Έστω η Δ.Ε.Μ.Π. $-xyp + x^2q = yz$. Θα έχουμε

$$\frac{dx}{-xy} = \frac{dy}{x^2} = \frac{dz}{yz}$$

Η πρώτη από τις δύο εξισώσεις γράφεται $xdx + ydy = 0$ και άρα ολοκληρώνοντας θα έχουμε $u(x,y,z) = x^2 + y^2 = c_1$. Η ισότητα του πρώτου και τρίτου όρου δίνουν $zdx + xdz = 0$ και ολοκληρώνοντας έχουμε $v(x,y,z) = xy = c_2$. Άρα η γενική λύση είναι

$$F(xz, x^2 + y^2) = 0 \Longrightarrow z = \frac{1}{x}F(x^2 + y^2)$$

Μπορείτε να το επιβεβαιώσετε με απ΄ ευθείας αντικατάσταση.

Θα κλείσουμε αυτή την σύντομη ενότητα με τις γραμμικές Δ.Ε.Μ.Π. δεύτερης τάξης, οι οποίες εμπίπτουν σε μία από τις τρείς παρακάτω γενικές κατηγορίες:

1. Ελλειπτικού τύπου: Αν $w = w(x,y,z)$ είναι μία συνάρτηση τριών μεταβλητων τότε η γενική μορφή μίας Δ.Ε.Μ.Π. αυτού του τύπου δίνεται από την (εξίσωση Laplace)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \tag{6.7.6}$$

Παράδειγμα συνάρτησης η οποία ικανοποιεί τέτοια εξίσωση, αποτελούν οι συναρτήσεις δυναμικού, όπως το ηλεκτρικό δυναμικό ενός σημειακού φορτίου $w = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Παραβολικού τύπου: Αν $w = w(x,y,z,t)$ είναι μία συνάρτηση των υποδεικνυόμενων μεταβλητών, τότε η γενική μορφή αυτού του τύπου Δ.Ε.Μ.Π. δίνεται από την (εξίσωση θερμότητας)

$$k(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}) = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (k > 0). \tag{6.7.7}$$

Αν περιοριστούμε στις δύο μεταβλητές $z = f(x,t)$ τότε έχουμε την εξίσωση

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (k > 0)$$

Αν η $f(x,t)$ περιγράφει την κατανομή θερμοκρασίας σε μία διάσταση x, τότε αυτή η εξίσωση αποτελεί την εξίσωση διάχυσης (μετάδοσης) θερμότητας. Μία λύση της (όπως μπορείτε να διαπιστώσετε) είναι η

$$f(x,t) = e^{-km^2t}(C_1 cos(mx) + C_2 sin(mx))$$

3. Υπερβολικού τύπου: Στις τρείς διαστάσεις η γενική μορφή της Δ.Ε.Μ.Π αυτού του τύπου δίνεται από την (εξίσωση κύματος)

$$(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{6.7.8}$$

όπου c είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Γνωστές λύσεις της είναι το *επίπεδο κύμα*

$$\begin{aligned} w &= Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \\ \vec{k} &= (k_x, k_y, k_z), \\ \vec{r} &= (x, y, z) \end{aligned} \tag{6.7.9}$$

όπου $\vec{k}$ είναι το κυματικό διάνυσμα, ω η κυκλική συχνότητα, και A το πλάτος του κύματος. Επίσης i είναι η φανταστική μονάδα (δές επόμενο κεφάλαιο) και $\omega = c|\vec{k}|$. Άλλη γνωστή λύση είναι το *σφαιρικό κύμα*

$$w = \frac{A}{r}e^{i(\omega t - |\vec{k}|r)}. \tag{6.7.10}$$

με $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Αν περιοριστούμε στην μία διάσταση x, τότε η εξίσωση κύματος

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \tag{6.7.11}$$

έχει γενική λύση την

$$z = F_1(x - ct) + F_2(x + ct) \tag{6.7.12}$$

και παριστάνει δύο κυμάνσεις που διαδίδονται κατά τις δύο διευθύνσεις ($\pm x$) με ταχύτητα c.

6.8 Ασκήσεις

1. Ένα σώμα μάζας m είναι προσδεδεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς k (η μεταβολή του μήκους του είναι ανάλογη της εφαρμοζόμενης δύναμης $F = -kx$). Γράψτε την Δ.Ε. της κίνησης του σώματος και δείξτε ότι αυτό εκτελεί αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $\omega^2 = k/m$.

2. Να γενικεύσετε το προηγούμενο πρόβλημα στην περίπτωση που υπάρχει τριβή επάνω στο σώμα, ανάλογη της ταχύτητάς του, $F_T = -bu$, όπου F_T η δύναμη τριβής πάνω στο σώμα, u η ταχύτητά του και b σταθερά. Σε πόσο χρόνο το πλάτος της ταλάντωσης υποδιπλασιάζεται;

3. Σε ένα πληθυσμό που αρχικά είχε $N_0 = 10$ άτομα, είχαμε την αύξηση στα $N_2 = 14$ άτομα σε δύο χρόνια. Σε ποιόν αριθμό θα φτάσει ο πληθυσμός σε τέσσερα χρόνια εάν η αύξησή του κάθε στιγμή είναι ανάλογη του ήδη υπάρχοντα πληθυσμού;

4. Λογιστική Εξίσωση: Σε ένα πληθυσμό οι γεννήσεις κατά άτομο είναι (Γεννήσεις$/N) = 2 - 2N$, όπου N η τιμή του πληθυσμού την δεδομένη χρονική στιγμή. Επίσης οι θάνατοι δίνονται από την σχέση (Θάνατοι$/N) = 1 + N$. Ποιός θα είναι ο πληθυσμός σε συνάρτηση του χρόνου αν αρχικά $N = N_0 =$δεδομένο. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση για διάφορες, επιλεγμένες αρχικές συνθήκες.

5. Να λυθεί η Δ.Ε. $x(1 - y^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$.

6. Να λυθεί η Δ.Ε. $y' = (x^3 + y^3)/xy^2$.

7. Να βρεθεί η λύση της Δ.Ε.

$$y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y - 1 = 0, \quad (x > 0)$$

που διέρχεται από το σημείο $P_0(1, 1 + e)$.

8. Να μελετήσετε την φόρτιση πυκνωτή χωρητικότητας C που συνδέεται σε σειρά με αντίσταση R, από πηγή συνεχούς τάσης E. Ποιά η τάση στα άκρα του πυκνωτή σε χρόνο ίσο με $\tau = RC$ (σταθερά χρόνου κυκλώματος RC);

9. Σώμα εκτοξεύεται πρός τα πάνω με αρχική ταχύτητα $u = u_0$ και η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητάς του $R = -au$, όπου a είναι σταθερά. Να βρείτε την συνάρτηση της ταχύτητάς του $u(t)$ και του ύψους $z(t)$ για κάθε χρονική στιγμή. Ποιός ο μέγιστος χρόνος κίνησης (χρόνος ανόδου) και ποιό το μέγιστο ύψος; Ελέγξτε τα αποτελέσματά σας όταν $a \to 0$.

10. Βρείτε την γενική λύση των παρακάτω Δ.Ε. δεύτερης τάξης: $y'' - 6y' + 9y = x^2$, $y'' - 4y' + 3y = 2x$, $y'' - 4y' + 13y = x + x^2$.

11. Η περιεκτικότητα σε CO_2 του αέρα ενός δωματίου όγκου $7200m^3$ είναι 0.2%. Πόσα m^3 καθαρού αέρα πρέπει να μπαίνουν στο δωμάτιο κάθε λεπτό, ώστε η περιεκτικότητά του να γίνει 0.1% σε 15 λεπτά;.

12. Δεξαμενή έχει $300litr$ αλμυρό νερό περιεκτικότητας $0.4Kg/litr$ σε αλάτι. Αλμυρό νερό από άλλη δεξαμενή περιεκτικότητας $0.6Kg/litr$ χύνεται στην πρώτη δεξαμενή με ταχύτητα $u = 10litr/min$, ενώ από άλλο σημείο εκρέει διάλυμα με την ίδια ταχύτητα. Πότε θα υπάρχουν $150kg$ αλάτι μέσα στην δεξαμενή;

13. Ποιά η λύση της

$$y' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

που διέρχεται από το σημείο $P_0(1, -1)$;

14. Πληθυσμός ικανοποιεί την Δ.Ε. $dN/dt = kN(A - lnN)$ όπου k, N είναι δεδομένες σταθερές. Να βρείτε την λύση όταν $N(t = 0) = N_0$ =δεδομένο.

15. Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \\ y' &= \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}} \\ x^2y' &- xy - x^4e^x = 0 \\ xy' &- 2y + x = 0, \quad P_0(1, 0) \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία εξίσωση ζητάμε την λύση που διέρχεται από το υποδεικνυόμενο σημείο.

16. Επιλύστε αριθμητικά με την μέθοδο του Euler την Δ.Ε. $x^2y' - xy - x^4e^x = 0$ με αρχική συνθήκη $P_0(x_0, y_0) = (1, 1)$, μέχρι το σημείο με $x = 2$ και με βήμα $h = 0.1$.

17. Ομοίως την $y' = 2ysinxcosx + e^{-cos^2x}$ με αρχική συνθήκη το σημείο $P_0(x_0, y_0) = (0, 1)$ μέχρι το $x = 10$ και με βήμα $h = 0.2$.

18. Ομοίως με Runge-Kutta την Δ.Ε. $y' = e^{xy} - 1$ με $(x_0, y_0) = (0, 0)$ μέχρι το $x = 5$ και βήμα $h = 0.1$.

19. Επιλύστε και παραστήστε γραφικά τις λύσεις των Δ.Ε. που εμφανίζονται στα προηγούμενα προβλήματα, με τις δύο μεθόδους και συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 7

Μιγαδικοί Αριθμοί

7.1 Εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς

Είναι γνωστό ότι δεν είναι δυνατόν να επιλυθούν όλες οι εξισώσεις μέσα στο σώμα των πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $x^2+1=0$. Χρειάζεται συνεπώς και αυτό αποδείχθηκε ιδιαίτερα ωφέλιμο, να επεκταθεί το σώμα των παραγματικών αριθμών έτσι ώστε να έχουν λύση όλες οι πολυωνυμικές εξισώσεις, στο καινούργιο αυτό σύνολο που ονομάζεται *σώμα των μιγαδικών αριθμών*. Αυτό έγινε με την εισαγωγή της *φανταστικής μονάδας*, η οποία ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση, δηλ.

$$i = \sqrt{-1} \Longrightarrow i^2 = -1 \tag{7.1.1}$$

Άν και η πρώτη εξίσωση δεν έχει νόημα στα πλαίσια των πραγματικών αριθμών, εντούτοις η δεύτερη εξίσωση μπορεί να ληφθεί ως εξίσωση ορισμού της φανταστικής μονάδας. Όλες οι περαιτέρω ιδιότητές της προκύπτουν από αυτόν τον ορισμό. Θα έχουμε π.χ., $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ και γενικότερα

$$\begin{aligned} i^{2n} &= (-1)^n, \\ i^{2n+1} &= (-1)^n i, \quad (n = 0, 1, 2, ...) \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

Παράδειγμα 7.1: Θα έχουμε $i^8 = (-1)^4 = 1$. Ομοίως $i^{586} = -1$ και $i^{587} = -i$.

Όπως είναι γνωστό οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να αντιστοιχιθούν μονοσήμαντα με τα σημεία μίας ευθείας, της λεγόμενης πραγματικής ευθείας. Μπορούμε τότε να επεκτείνουμε το σώμα των πραγματικών αριθμών, αν σε κάθε σημείο του επιπέδου, με καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y), αντιστοιχίσουμε τον αριθμό

$$z = x + iy \Longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{7.1.3}$$

Δημιουργείται συνεπώς μία μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του επιπέδου, με το καινούργιο σύνολο αριθμών, που τους ονομάζουμε *μιγαδικούς αριθμούς* και τους συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$. Θα έχουμε λοιπόν

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy / x, y \in \mathbb{R}\} \tag{7.1.4}$$

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ θα θεωρούνται ίσοι αν

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \tag{7.1.5}$$

δηλ. μόνο όταν ταυτίζονται τα *πραγματικά και φανταστικά μέρη* τους, όπου για τον μιγαδικό $z = x + iy$ ονομάζουμε πραγματικό μέρος το $x = Re(z)$. Ομοίως φανταστικό μέρος του ονομάζεται το $y = Im(z)$.

Παρατηρούμε ότι αν $y = 0$ τότε $z = x$ δηλ. οι πραγματικοί αριθμοί είναι οι μιγαδικοί των οποίων το φανταστικό μέρος μηδενίζεται. Συνεπώς στο καρτεσιανό επίπεδο αντιστοιχούν στα σημεία του οριζόντιου άξονα. Επίσης αν $x = 0$

τότε έχουμε $z = iy$. Οι μιγαδικοί αριθμοί των οποίων το πραγματικό τμήμα μηδενίζεται ονομάζονται *φανταστικοί* αριθμοί και αντιστοιχούν στα σημεία του κατακόρυφου άξονα, στο επίπεδο.

Ο *αντίθετος* ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ είναι ο $(-z) = -x - iy$ και στο επίπεδο αντιστοιχεί στο συμμετρικό σημείο του z, ως πρός την αρχή $O(0, 0)$. Η αρχή $O(0, 0)$ του καρτεσιανού συστήματος αξόνων αντιστοιχεί στο μηδέν ($z = 0 + i0 = 0$). Ο *συζυγής* ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ ορίζεται ως ο μιγαδικός

$$\bar{z} = x - iy \tag{7.1.6}$$

και στο μιγαδικό επίπεδο αντιστοιχεί στο συμμετρικό σημείο του z, ως πρός τον οριζόντιο άξονα x. Τέλος ο αντίθετος του συζυγούς ενός μιγαδικού απεικονίζεται στο συμμετρικό, ως πρός τον άξονα y, σημείο. Τα τέσσερα αυτά σημεία βρίσκονται στις κορυφές ορθογωνίου με κέντρο την αρχή.

Το *μέτρο* του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ ορίζεται ως ο *πραγματικός* αριθμός

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{7.1.7}$$

Παράδειγμα 7.2: Βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $z = 4 + 8i$. Θα έχουμε $|z| = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}$.

Οι πράξεις στο νέο αυτό σύνολο των μιγαδικών αριθμών, ορίζονται ως εξής: Αν έχουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ η πρόσθεση και η αφαίρεση δίνονται από τις

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \tag{7.1.8}$$

Ο πολλαπλασιασμός ορίζεται ως

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned} \tag{7.1.9}$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η σχέση μπορεί να προκύψει άμεσα με εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών και χρήση της Εξ. (7.1.1). Ως παράδειγμα του ορισμού του πολλαπλασιασμού, θα έχουμε την σημαντική ιδιότητα

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{7.1.10}$$

Η διαίρεση ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned} \tag{7.1.11}$$

Η σχέση αυτή προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη του κλάσματος με τον συζυγή του παρονομαστή και εκτελέσουμε τις πράξεις.

Παράδειγμα 7.3: Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 5 + 3i$ και $z_2 = 1 - i$. Θα έχουμε $z_1 + z_2 = 6 + 2i$, $z_1 - z_2 = 4 + 4i$, $z_1z_2 = 8 - 2i$ και $\frac{z_1}{z_2} = 1 + 4i$.

7.2 Πολική και Τριγωνομετρική Μορφή

Αν έχουμε τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ όπως είδαμε μπορούμε να τον ταυτίσουμε με το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου με συντεταγμένες (x, y). Όμως γνωρίζουμε ότι ένα σημείο του επιπέδου μπορεί να καθοριστεί και μέσω των πολικών συντεταγμένων του (r, θ) όπου $x = rcos\theta,\ \ y = rsin\theta$ και $0 \leq r$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Το ζεύγος των μεταβλητών (r, θ) αποτελούν την *πολική μορφή* του μιγαδικού. Προκύπτει προφανώς και η λεγόμενη *τριγωνομετρική* μορφή που είναι

$$z = r(cos\theta + isin\theta) \tag{7.2.1}$$

Θα αποδείξουμε τώρα το θεώρημα De-Moivre που δίνει μία τρίτη μορφή για ένα μιγαδικό αριθμό, την λεγόμενη *εκθετική* του μορφή. Θυμόμαστε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις μπορούν να εκφραστούν υπό την μορφή απειροσειρών ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} e^u &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \\ cosu &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!} \\ sinu &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

Θα έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\theta)^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= cos\theta + isin\theta \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

Με την βοήθεια και της Εξ. (7.2.1) θα έχουμε τελικά τις τρείς ισοδύναμες μορφές ενός μιγαδικού, που είναι

$$z = x + iy = r(cos\theta + isin\theta) = re^{i\theta} \tag{7.2.3}$$

Το r είναι το γνωστό μέτρο του μιγαδικού αριθμού, ενώ η γωνία $0 \leq \theta < 2\pi$ ονομάζεται *πρωτεύον όρισμα* του μιγαδικού και συμβολίζεται με $\theta = Arg(z)$.

Παράδειγμα 7.4: Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + i$. Θα είναι $r = |z| = \sqrt{2}$ και $cos\theta = sin\theta = \sqrt{2}/2$. Άρα $\theta = \pi/4$ οπότε η τριγωνομετρική του μορφή είναι $z = \sqrt{2}[cos(\frac{\pi}{4}) + isin(\frac{\pi}{4})]$ και η πολική του μορφή $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Με την εκθετική μορφή του μιγαδικού απλουστεύνονται οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης των μιγαδικών. Πράγματι θα έχουμε

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned} \tag{7.2.4}$$

Παράδειγμα 7.5: Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 5 + 5i$ και $z_2 = 1 - i$. Βρείτε το πηλίκο και το γινόμενό τους απ' ευθείας και αφού τους μετατρέψετε στην πολική τους μορφή. Θα έχουμε

$$\frac{5+i5}{1-i} = \frac{(5+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 5i$$
$$(5+5i)(1-i) = 10$$
$$z_1 = 5\sqrt{2}[cos(\frac{\pi}{4}) + isin(\frac{\pi}{4})] = 5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$z_2 = \sqrt{2}[cos(-\frac{\pi}{4}) + isin(-\frac{\pi}{4})] = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Αλλά τότε θα έχουμε

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{2}} = 5i$$
$$z_1 z_2 = 10e^{i0} = 10$$

οπότε έχουμε επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων που λάβαμε με την απ' ευθείας μέθοδο.

7.3 Ρίζες Μιγαδικών Αριθμών

Όπως είπαμε στην αρχή του κεφαλαίου, γενικά οι πολυωνυμικές εξισώσεις δεν
μπορούν να επιλυθούν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Όμως μία πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n επιλύεται πλήρως στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών και μάλιστα έχει πάντοτε n στο πλήθος ρίζες. Έστι η πλέον απλή πολυωνυμική εξίσωση είναι η

$$\rho^n = z \tag{7.3.1}$$

όπου $z = x + iy = re^{i\theta}$ είναι δοσμένος μιγαδικός αριθμός. Οι ρίζες αυτής της πολυωνυμικής εξίσωσης βαθμού n μας δίνουν, όπως είναι φανερό, τις λεγόμενες *n-τάξης ρίζϵς* του μιγαδικού. Αυτές δίνονται από την σχέση

$$\begin{aligned} \rho_k &= \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \\ &= \sqrt[n]{r}\left[cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\ sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right] \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

όπου $k = 0, 1, ..., (n-1)$. Έχουμε δηλ. $n-$το πλήθος ρίζες που κατανέμονται ως σημεία στο μιγαδικό επιέπδο πάνω σε κύκλο ακτίνας $\sqrt[n]{r}$. Τα ορίσματά τους αυξάνουν κατά $(2\pi/n)$ από το (θ/n), όπου θ το όρισμα του μιγαδικού αριθμού z.

Παράδειγμα 7.6: Βρείτε την $\sqrt{4+i3}$. Εδώ θα έχουμε $|z| = 5$ και $cos\theta = (4/5)$, $sin\theta = (3/5)$. Άρα $\theta \simeq 36.86^o$ σε μοίρες. Θα έχουμε δύο ρίζες και σύμφωνα με την παραπάνω σχέση

$$\rho_{1,2} = \sqrt{5}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right) + i\ sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right)\right] \quad (k = 0, 1)$$

Άρα οι δύο ρίζες είναι

$$\rho_1 = \sqrt{5}[cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + isin\left(\frac{\theta}{2}\right)] \simeq \sqrt{5}[0.948 + i0.316] \quad (k = 0)$$

$$\rho_2 = \sqrt{5}[cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + isin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)] \simeq \sqrt{5}[-0.948 - i0.316] = -\rho_1 \quad (k = 1)$$

Παράδειγμα 7.7: Βρείτε τις τρίτες ρίζες του $z = 27e^{i120^o}$. Θα είναι $z = 27[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}]$. Οι τρίτες ρίζες θα δίνονται από την σχέση

$$\rho_{1,2,3} = \sqrt[3]{27}e^{i\frac{120^o + 2k\pi}{3}}, \quad (k = 0, 1, 2)$$

Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 3e^{i40^o} \simeq 3[0.766 + i0.642] \\ \rho_2 &= 3e^{i160^o} \simeq 3[-0.939 + i0.342] \\ \rho_3 &= 3e^{i280^o} \simeq 3[0.173 - i0.984] \end{aligned}$$

7.4 Μιγαδικά στρεφόμενα διανύσματα

Όπως είναι ήδη γνωστό ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ αντιστοιχεί μονοσήμαντα στο σημείο του επιπέδου $P(x, y)$ ή ισοδύναμα στο διάνυσμα $\vec{OP}$ με αρχή την αρχή των αξόνων και πέρας το σημείο. Επιπλέον πολλές φορές διάφορα φυσικά μεγέθη μεταβάλλονται με τον χρόνο και μπορεί να αποτελούν την πραγματική ή φανταστική συνιστώσα κάποιου μιγαδικού αριθμού. Μπορούμε τότε να παραστήσουμε και να παρακολουθήσουμε την χρονική εξέλιξη του μεγέθους με ένα *μιγαδικό στρεφόμενο διάνυσμα* στο επίπεδο. Έτσι η στιγμιαία τιμή του μεγέθους θα αντιστοιχεί στην στιγμιαία προβολή του στρεφόμενου διανύσματος πάνω σε κάποιον από τους δύο άξονες.

Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η εναλλασσόμενη ημιτονοειδής τάση που εφαρμόζεται σε ένα κύκλωμα καθώς και η απόκριση του κυκλώματος, δηλ. το εναλλασσόμενο ρεύμα που το διαρέει. Αν ω είναι η συχνότητα της τάσης, μπορούμε να την παραστήσουμε ως τον μιγαδικό

$$V(t) = V_m e^{i\omega t} = V_m[cos(\omega t) + isin(\omega t)]$$

όπου V_m το πλάτος της τάσης σε $Volts$. Τότε η πραγματική εφαρμοζόμενη τάση στο κύκλωμα μπορεί να ληφθεί ως το πραγματικό ή φανταστικό μέρος

$$Re[V_m e^{i\omega t}] = V_m cos(\omega t)$$
$$Im[V_m e^{i\omega t}] = V_m sin(\omega t)$$

του μιγαδικού, στρεφόμενου διανύσματος. Στα γραμμικά ηλεκτρικά κυκλώματα μπορούμε να δουλεύουμε με την εκθετική μορφή του μιγαδικού (που είναι πολύ πιο εύκολη) και ανα πάσα στιγμή να παίρνουμε αποτελέσματα στο πραγματικό άξονα.

Παράδειγμα 7.8: Έστω το κύκλωμα RL, δηλ. ωμική αντίσταση R και πηνίο αυτεπαγωγής L σε σειρά, που τροφοδοτείται με την παραπάνω τάση. Αν $i(t)$ είναι το στιγμιαίο ρεύμα τότε η πτώση τάσης στα άκρα της ωμικής αντίστασης είναι Ri και στα άκρα του πηνίου $L(di/dt)$. Από τον δεύτερο κανόνα του Kirchoff θα έχουμε

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V(t) \Longrightarrow \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{V_m}{L}e^{i\omega t}$$

Η γενική λύση αυτής της Δ.Ε. είναι

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_m}{R + iL\omega}e^{i\omega t}$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά. Ο όρος που περιέχει αυτή την σταθερά αντιστοιχεί σε μεταβατικό όρο (που μηδενίζεται γρήγορα με την πάροδο του χρόνου) και οφείλεται στα φαινόμενα αυτεπαγωγής στο πηνίο. Ο δεύτερος όρος αποτελεί την απόκριση του κυκλώματος στην εφαρμοζόμενη τάση. Παρατηρούμε ότι αν ορίσουμε την *σύνθετη αντίσταση*

$$Z = \frac{V(t)}{i(t)} = R + iL\omega$$

τότε λαμβάνουμε άμεσα την απόκριση (ρεύμα) του κυκλώματος αν διαιρέσουμε την εφαρμοζόμενη (μιγαδική) τάση με την (μιγαδική) σύνθετη αντίσταση. Αυτό αποτελεί σημαντική ευκολία! Η σύνθετη αντίσταση είναι μιγαδικός αριθμός με $Re[Z] = R$, $Im[z] = L\omega$, $|Z| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ και σχηματίζει γωνία ϕ με τον οριζόντιο άξονα, όπου $tan\phi = (L\omega/R) > 0$. Θα έχουμε τότε

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}e^{i(\omega t - \phi)} = I_m e^{i(\omega t - \phi)}$$

Δηλαδή το ρεύμα υστερεί σε φάση της τάσης, σε κύκλωμα RL. Δύο ακραίες περιπτώσεις έχουν ενδιαφέρον.

- Όταν $L = 0$, δηλ. έχουμε μόνο ωμική αντίσταση τότε $\phi = 0$ και άρα στις ωμικές αντιστάσεις η τάση και το ρεύμα είναι σε φάση.

- Όταν τώρα $R = 0$, δηλ. σε καθαρή αυτεπαγωγή προκύπτει $\phi = \pi/2$ οπότε η τάση προηγείται του ρεύματος κατά $\pi/2$.

Το γενικό συμπέρασμα είναι ότι εάν σε γραμμικά ηλεκτρικά κυκλώματα γράψουμε την σύνθετη αντίσταση και την εφαρμοζόμενη τάση σε εκθετική μιγαδική μορφή, τότε η απόκριση του κυκλώματος (το ρεύμα) μπορεί να βρεθεί άμεσα (και εύκολα!) ώς το ωμικό πηλίκο τους. Μπορούμε τότε να πάρουμε και την πραγματική μορφή του ρεύματος, ως το πραγματικό ή το φανταστικό τμήμα του πηλίκου αυτού.

7.5 Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις τιμές i^{258}, i^{4583} και i^{30001}.

2. Να τοποθετήσετε στο καρτεσιανό μιγαδικό επίπεδο τους αριθμούς $2-2i$, $3+i8$, $-5+i3$, $-4-i4$, $5+i0$, $6i$, -4, $-i5$, καθώς και τους αντίθετους και τους συζυγείς τους.

3. Να βρείτε το μέτρο των παραπάνω μιγαδικών αριθμών.

4. Να κάνετε τις πράξεις z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2 και $\frac{z_1}{z_2}$ όπου τα ζεύγη (z_1, z_2) είναι

$$(1+i, 1-i), \quad (-5+i3, -4-i4), \quad (-i5, 4)$$
$$(5+i, -3+i4), \quad (2-i2, 3+i8)$$

5. Βρείτε την τριγωνομετρική και εκθετική μορφή των μιγαδικών $2-i2$, $-1+i\sqrt{3}$, $5+i0$, $6i$, $-12+i16$, $-2+i4$, $-2.5-i2.5\sqrt{3}$.

6. Να μετατρέψετε σε καρτεσιανή μορφή τους αριθμούς $15e^{i\pi/4}$, $5e^{-i2\pi/3}$, $-4e^{i5\pi/6}$, $-2e^{-i\pi/2}$ και $-i8e^{-i3\pi/2}$.

7. Να δείξετε ότι

$$Re[z] = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$$
$$Im[z] = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

8. Να γίνουν οι πράξεις

$$\begin{aligned} z\bar{z}, \quad z &= 3 - i4 \\ z\bar{z}, \quad z &= 10e^{-i40^o} \\ z + \bar{z}, \quad z &= 20e^{i53.1^o} \\ z - \bar{z}, \quad z &= 2 + i8 \\ \frac{z}{\bar{z}}, \quad z &= 9e^{i30^o} \end{aligned}$$

όπου ορισμένες γωνίες δίνονται σε μοίρες.

9. Να βρεθούν οι ρίζες τρίτης, τέταρτης και πέμπτης τάξης της μονάδας.

10. Να βρείτε τις ρίζες $\sqrt{5+i8}$, $\sqrt{150e^{-i60^o}}$, $(6.93 - i4)^{1/3}$, $\sqrt[3]{27e^{i3\pi/2}}$.

11. Να βρείτε τα αθροίσματα και τις διαφορές

$$\begin{aligned} 10e^{i53.1^o} + (4 + i2) \\ 10e^{i90^o} + (8 - i2) \\ (-4 - i6) + (2 + i4) \\ 2.83e^{i45^o} - (2 - i8) \\ (2 - i10) - (1 - i10) \end{aligned}$$

12. Να κάνετε απ΄ ευθείας τις πράξεις. Μετά να μετατρέψετε σε πολική μορφή και να ξανακάνετε τις πράξεις, επαληθεύοντας τα αποτελέσματα.

$$\begin{gathered} (3 - i2)(1 - i4), \quad (2 + i0)(3 - i3), \\ (-1 - i1)(1 + i1), \quad (2 + i2)(2 - i2) \end{gathered}$$

13. Να κάνετε απ΄ ευθείας τις πράξεις. Μετά να μετατρέψετε σε πολική μορφή και να ξανακάνετε τις πράξεις, επαληθεύοντας τα αποτελέσματα.

$$\begin{gathered} \frac{5+i5}{1-i}, \quad \frac{5-10i}{3+i4}, \quad \frac{3+i3}{2+i2}, \\ \frac{4-i8}{2+i2}, \quad \frac{8+i12}{i2} \end{gathered}$$

14. Να αναπαράγετε πλήρως τα αποτελέσματα της παραγράφου 7.4 για ένα κύκλωμα RC σε σειρά. Υπενθυμίζουμε ότι η τάση $V(t)$ στα άκρα ενός πυκνωτή και το ρεύμα που τον διαρέει $i(t)$ συνδέονται με

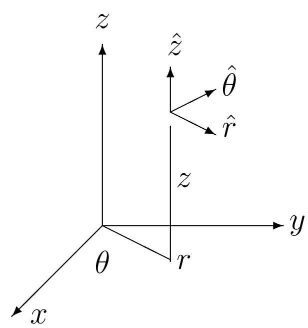
$$i(t) = C\frac{dV(t)}{dt}$$

15. Ομοίως για ένα κύκλωμα RLC σε σειρά.

Παράρτημα Α΄

Καμπυλόγραμμα Συστήματα Συντεταγμένων

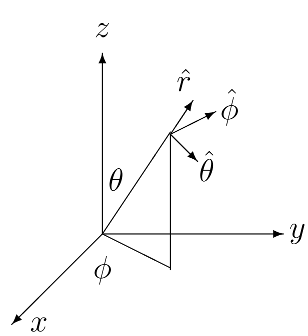
Βλέπουμε παρακάτω μία γραφική απεικόνιση του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων (r, θ, z). Μαζί φαίνονται και τα μοναδιαία διανύσματα $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$, όπως αυτά δίνονται από την Εξ. (1.1.12), σε σχέση με τα μοναδιαία διανύσματα $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.



Σχήμα Α΄.1: Σύστημα Κυλινδρικών Συντεταγμένων

Η στοιχειώδης επιφάνεια επάνω στην παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλινδρου ακτίνας r δίνεται από την $dS = rd\theta dz$, ενώ ο στοιχειώδης όγκος δίνεται από την σχέση
$dV = rdrd\theta dz$.

Βλέπουμε παρακάτω μία γραφική απεικόνιση του συστήματος σφαιρικών συντεταγμένων (r, θ, ϕ). Μαζί φαίνονται και τα μοναδιαία διανύσματα $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$, όπως αυτά δίνονται από την Εξ. (1.1.15), σε σχέση με τα μοναδιαία διανύσματα $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.



Σχήμα Α΄.2: Σύστημα Σφαιρικών Συντεταγμένων. Η απόσταση από την αρχή των καρτεσιανών αξόνων, έως το σημείο που φαίνονται τα μοναδιαία διανύσματα είναι ίση με r.

Η στοιχειώδης επιφάνεια, επάνω στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας r, δίνεται από την $dS = r^2 sin\theta d\theta d\phi$, ενώ ο στοιχειώδης όγκος δίνεται από την σχέση $dV = r^2 sin\theta dr d\theta d\phi$.

Παράρτημα Β΄

Το τρίακμο του Frenet

Ας θεωρήσουμε μία καμπύλη C στον χώρο που περιγράφεται από την διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r} = \vec{r}(u) = (f(u), g(u), h(u)) \tag{Β΄.0.1}$$

όπου $u \in \mathbb{R}$ είναι η πραγματική παράμετρος κατά μήκος της καμπύλης. Τότε τό μήκος της καμπύλης όπως το μετράμε από μία αυθαίρετη αρχή, όπου $u = 0$, δίνεται από την

$$s = \int_0^u ds = \int_0^u \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2 + [h'(u)]^2} du \tag{Β΄.0.2}$$

Αν τώρα επιλέξουμε ώς παράμετρο κατά μήκος της καμπύλης, το ίδιο το μήκος s, θα έχουμε γενικά ότι

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)) \tag{Β΄.0.3}$$

Τότε το *μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα* κατά μήκος της καμπύλης δίνεται από την

$$\mathbf{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \tag{Β΄.0.4}$$

όπου η τελεία δηλώνει παραγώγιση ως πρός s. Αυτό είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα της ταχύτητας που ορίσαμε πρίν. Επίσης το διάνυσμα

$$\mathbf{n} = \frac{\ddot{\vec{r}}}{|\ddot{\vec{r}}|} \tag{Β΄.0.5}$$

ονομάζεται *μοναδιαίο διάνυσμα της πρώτης καθέτου* και είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα της επιτάχυνσης, όπως αυτό ορίστηκε πρίν. Τέλος το *μοναδιαίο διάνυσμα της δεύτερης καθέτου* ορίζεται ως

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \tag{Β΄.0.6}$$

Τα τρία διανύσματα $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ αποτελούν το λεγόμενο *τρίακμο του Frenet*. Το επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ καλείται *εγγύτατο επίπεδο* της καμπύλης C. Ισχύουν οι εξής σχέσεις, καλούμενες και εξισώσεις Frenet,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= \frac{1}{\rho}\mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} &= -\frac{1}{\rho}\mathbf{t} + \frac{1}{\tau}\mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} &= -\frac{1}{\tau}\mathbf{n} \end{aligned} \tag{Β΄.0.7}$$

όπου

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= |\ddot{\vec{r}}| \\ \frac{1}{\tau} &= \dot{\vec{n}} \cdot \mathbf{b} \end{aligned} \tag{Β΄.0.8}$$

είναι η *καμπυλότητα* και η *στρέψη* αντίστοιχα.

Βιβλιογραφία

[1] Χ. Μωυσιάδη, *Ανώτερα Μαθηματικά* Εκδ. Χριστοδουλίδη, Θεσσαλονίκη 2004

[2] Β. Ι. Παπαντωνίου, *Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών* Εκδ. Γαρταγάνη, Θεσσαλονίκη 1986

[3] Λ. Βλάχου, *Διαφορικός Λογισμός Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών* Εκδ. Τζιόλα, Θεσσαλονίκη 2001

[4] Γ. Μ. Γεωργανόπουλου, *Στοιχεία Μαθηματικής Αναλύσεως* Εκδ. Αφοι Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη 1999

[5] Σ. Γ. Παπαϊωάννου, *Αριθμητική Ανάλυση* Εκδ. Τ.Ε.Ι. Σερρών, Σέρρες 2004