ΤΜΗΜΑ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
Α.Τ.Ε.Ι ΣΕΡΡΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ
ΑΚΑΔΗΜ. ΕΤΟΣ 2008-2009
Σέρρες 26 Ιουνίου 2009
Διδάσκων: Απ. Κουιρουκίδης

# ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
# ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

**Θέμα 1ο** (1 μον.)
Να βρεθούν με βάση τον ορισμό οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης $z = f(x, y) = ln(1 + 2x + 3y)$ στο σημείο $P_0(0, 0)$.

Με βάση τον ορισμό θα έχουμε ότι $x_0 = 0,\ y_0 = 0$, οπότε

$$\begin{aligned} f_x^{'}(P_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln(1 + 2(0 + \Delta x) + 3(0)) - ln(1)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln(1 + 2\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2}{(1+2\Delta x)}}{1} = 2 \end{aligned}$$

Ομοίως

$$\begin{aligned} f_y^{'}(P_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{ln(1 + 2(0) + 3(0 + \Delta y)) - ln(1)}{\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{ln(1 + 3\Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{3}{(1+3\Delta 3)}}{1} = 3 \end{aligned}$$

**Θέμα 2ο** (1.5 μον.)
Να γραφεί το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης στο σημείο $P_0(1,1)$, για την συνάρτηση $z = f(x,y) = 1/\sqrt{1+x^2+2y^2}$.

Θα έχουμε $h = (x-x_0) = (x-1)$, $k = (y-y_0) = (y-1)$, και οι παράγωγοι μέχρι δεύτερης τάξης για την συνάρτηση $z = f(x,y) = 1/\sqrt{1+x^2+2y^2} = (1+x^2+2y^2)^{-1/2}$ θα είναι

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{2}(1+x^2+2y^2)^{-1/2-1}\frac{\partial}{\partial x}(1+x^2+2y^2) = \\
&= -x(1+x^2+2y^2)^{-3/2} \\
f_y(x,y) &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{2}(1+x^2+2y^2)^{-1/2-1}\frac{\partial}{\partial y}(1+x^2+2y^2) = \\
&= -2y(1+x^2+2y^2)^{-3/2} \\
f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -(1+x^2+2y^2)^{-3/2}\frac{\partial}{\partial x}(x) - x\frac{\partial}{\partial x}(1+x^2+2y^2)^{-3/2} = \\
&= -(1+x^2+2y^2)^{-3/2} + \frac{3x^2}{(1+x^2+2y^2)^{5/2}} \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -x\frac{\partial}{\partial y}(1+x^2+2y^2)^{-3/2} = \frac{6xy}{(1+x^2+2y^2)^{5/2}} \\
f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -(1+x^2+2y^2)^{-3/2}\frac{\partial}{\partial y}(2y) - 2y\frac{\partial}{\partial y}(1+x^2+2y^2)^{-3/2} = \\
&= -2(1+x^2+2y^2)^{-3/2} + \frac{12y^2}{(1+x^2+2y^2)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

Υπολογίζουμε τις αριθμητικές τιμές και έχουμε $f(P_0) = \frac{1}{2}$, $f_x(P_0) = \frac{-1}{8}$, $f_y(P_0) = \frac{-2}{8}$, $f_{xx}(P_0) = \frac{-1}{32}$, $f_{xy}(P_0) = \frac{3}{16}$, $f_{yy}(P_0) = \frac{1}{8}$. Άρα το πολυώνυμο Taylor θα είναι

$$f_T(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}[(x-1) + 2(y-1)] + \frac{1}{2}[-\frac{1}{32}(x-1)^2 + \frac{3}{8}(x-1)(y-1) + \frac{1}{8}(y-1)^2]$$

**Θέμα 3ο** (1.5 μον.)
Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $z = f(x,y) = x^3 + y^2 - 3xy$.

Προσδιορίζουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία, από την επίλυση του συστήματος

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 3x^2 - 3y = 0$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2y - 3x = 0$$

Άρα έχουμε $2y = 3x$, $x^2 = y$. Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία είναι τα $P_0(0,0)$, $P_1(3/2, 9/4)$. Επιπλέον ισχύει

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = 6x \\ B &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = -3 \\ C &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 2 \\ \Delta &= B^2 - AC = (9 - 12x) \end{aligned}$$

Άρα θα έχουμε
1) $P_0(0,0)$. Εδώ $\Delta > 0$ και άρα έχουμε **σαγματικό σημείο**.
2) $P_1(3/2, 9/4)$. Εδώ $\Delta < 0$ και $A > 0$ οπότε έχουμε **τοπικό ελάχιστο**.

**Θέμα 4ο** (1.5 μον.)
Να υπολογιστεί το $I = \int\int_D x^2y^2dxdy$, όπου ο πεπερασμένος τόπος $D$ περιορίζεται από τις καμπύλες $y = 2x^2$, $y = 2$, $x = 0$ με $x > 0$.

Σχεδιάζοντας τον τόπο, διαπιστώνουμε ότι το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=1} x^2dx \int_{y=2x^2}^{y=2} y^2dy = \frac{8}{3}\int_0^1 x^2dx[1-x^6] = \frac{8}{3}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^9}{9}\right]_{x=0}^1 = \\ &= \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{16}{27} \end{aligned}$$

**Θέμα 5ο** (2 μον.)
Να υπολογιστεί το $I = \int\int_D (x+y)dxdy$, όπου ο πεπερασμένος τόπος $D$ περιορίζεται από τις ευθείες $y=0,\ y=1,\ x+y=2,\ x=0$.

Ο τόπος είναι το τραπέζιο που σχηματίζεται από τα σημεία $P_0(0,0),\ P_1(2,0),\ P_2(1,1),\ P_3(0,1)$. Άρα το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με έναν από τους δύο ακόλουθους τρόπους

$$I_1 = \int_{x=0}^{x=1} dx \int_{y=0}^{y=1} (x+y)dy + \int_{x=1}^{x=2} dx \int_{y=0}^{y=2-x} (x+y)dy$$

$$I_2 = \int_{y=0}^{y=1} dy \int_{x=0}^{x=2-y} (x+y)dx$$

και είναι φανερό ότι συμφέρει ο δεύτερος τρόπος οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=0}^{x=2-y} = \int_0^1 dy \left[\frac{(2-y)^2}{2} + y(2-y)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 dy(4-y^2) = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

**Θέμα 6ο** (2.5 μον.)
Να επαληθευτεί το θεώρημα Green, για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I_C = \oint_C [-y^3 dx + x^3 dy]$ όπου ο κλειστός τόπος $D$ περιορίζεται από τις καμπύλες $y = x, \;\; y = \sqrt{x}$.

Υπολογίζουμε πρώτα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = I_1 + I_2$ όπου το $I_1$ αναφέρεται στην καμπύλη $y = x$ με παραμετροποίηση $\{x = t, \; y = t, \; 0 \leq t \leq 1\}$, το $I_2$ αναφέρεται στην καμπύλη $y = \sqrt{x}$ με παραμετροποίηση $\{y = t, \; x = t^2, \; 0 \leq t \leq 1\}$.

Λαμβάνουμε δεξιόστροφη φορά διαγραφής του τόπου. Εύκολα βρίσκουμε ότι ισχύει $I_1 = 0$, και

$$I_2 = \int_1^0 [-t^3 2t + t^6] dt = \left[ -\frac{2t^5}{5} + \frac{t^7}{7} \right]_1^0 = \frac{9}{35}$$

Άρα $I = I_1 + I_2 = 9/35$ . Θέλουμε αυτή η τιμή να ισούται με την τιμή του ολοκληρώματος

$$\begin{aligned} I_D &= \int \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int \int_D 3(x^2 + y^2) dx dy = \\ &= 3 \int_{x=0}^1 dx \int_{y=x}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dy = 3 \int_{x=0}^1 dx \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x}^{\sqrt{x}} = \\ &= 3 \int_0^1 dx [x^{5/2} + \frac{x^{3/2}}{3} - x^3 - \frac{x^3}{3}] = \frac{9}{35} \end{aligned}$$

Άρα ισχύει το θεώρημα.