ΚΕΦ 5ο: ΟΙ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΓΘΣ

Α. Οι Γενική Θεωρία Σχετικότητας αποτελείται από ένα σύνολο αρχών.

1. ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Ένας ελεύθερος παρατηρητής που κινείται υπό την επίδραση ενός βαρυτικού πεδίου δεν μπορεί με κανένα πείραμα να διακρίνει εάν επιταχύνεται λόγω του βαρυτικού πεδίου ή λόγω κάποιας άλλης επιτάχυνσης που ασκείται σε αυτόν (ισοδυναμία βαρύτητας με επιτάχυνση). Η αρχή αυτή ισοδυναμεί με την παραδοχή ότι η βαρυτική μάζα ισούται με τη μάζα αδράνειας.

2. ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΣΥΝΑΛΛΟΙΩΤΟΥ (ΑΡΧΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ)

Οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι για όλους τους παρατηρητές. Η μαθηματική έκφραση αυτής της αρχής είναι ότι όλες οι εξισώσεις της φυσικής μπορούν να γραφούν σε συναλλοίωτη τανυστική μορφή, ενώ η παράγωγος που διατηρείται συναλλοίωτη είναι η συναλλοίωτη παράγωγος.

3. ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΗΣ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ

Για να γράψουμε ένα φυσικό νόμο στη ΓΘΣ γενικεύουμε τον αντίστοιχο νόμο στο όριο της ΕΘΣ, χρησιμοποιώντας μόνο τους ελάχιστα απαραίτητους όρους που σχετίζονται με τη βαρύτητα

Παράδειγμα: Αν ένας νόμος γράφεται $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0$ στην ΕΘΣ, τότε η γενίκευσή του είναι απλά

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$$

(η βαρύτητα εισέρχεται μόνο στη συναλλοίωτη παράγωγο μέσω των συμβόλων Christoffel).

Άλλες πιο περίπλοκες γενικεύσεις, οι οποίες καταλήγουν στο ίδιο όριο της ΕΘΣ εν απουσία βαρύτητας, όπως π.χ.

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + g^{\beta\varepsilon} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} T^{\gamma\delta}{}_{;\varepsilon}=0$$

δεν προτιμώνται.

4. ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΣ

Η ΓΘΣ πρέπει να καταλήγει στις γνωστές εξισώσεις της ΕΘΣ ή της Νευτώνειας Θεωρίας για ασθενή βαρυτικά πεδία ή χαμηλές ταχύτητες και ασθενή βαρυτικά πεδία, αντίστοιχως. Δηλαδή:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{ΓΘΣ}} \arrow[r, "\frac{M}{R} \ll 1 \text{ και } \upsilon \ll 1"'] \arrow[d, "\frac{M}{R} \to 0"'] & \boxed{\text{Νευτώνεια Βαρύτητα}} \\
\boxed{\text{ΕΘΣ}} &
\end{tikzcd}$$

5. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ EINSTEIN

Η γενίκευση της εξίσωσης Poisson της Νευτώνειας Θεωρίας ($\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$) είναι η

$$\boxed{G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}}$$

όπου $T_{\alpha\beta}$ είναι ο τανυστής ενέργειας-ορμής.

B. ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ-ΟΡΜΗΣ

Ο τανυστής ενέργειας-ορμής είναι η γενίκευση της Νευτώνειας πυκνότητας μάζας ρ. Στη ΓΘΣ κάθε μορφή ενέργειας καμπυλώνει το χώρο. Οπότε, π.χ. για ένα ιδανικό ρευστό συνολικής πυκνότητας ενέργειας ε και πίεσης P ο τανυστής $T_{\alpha\beta}$ γράφεται

$$\boxed{T^{\alpha\beta} = (\varepsilon + P)\, u^\alpha u^\beta + P g^{\alpha\beta}}$$

όπου u^α η 4-ταχύτητα του ρευστού.
(η ολική πυκνότητα ενέργειας ε είναι το άθροισμα της πυκνότητας μάζας ρ (επί c^2) και όλων των άλλων ενεργειών που μπορεί να έχει ένα ρευστό (θερμική ενέργεια, ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ των ατόμων κλπ.)).

Η πυκνότητα ενέργειας που μετρά ένας παρατηρητής με 4-ταχύτητα $u^\alpha_{\pi\alpha\rho}$ είναι

$$\boxed{\varepsilon_{\pi\alpha\rho} = T_{\alpha\beta}\, u^\alpha_{\pi\alpha\rho}\, u^\beta_{\pi\alpha\rho}}$$

Έτσι, για το ίδιο το ρευστό (δηλ. για έναν παρατηρητή που κινείται με την 4-ταχύτητα u^α του ρευστού) ισχύει

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\pi\alpha\rho} &= T_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \\
&= (\varepsilon + P)\, u_\alpha u_\beta u^\alpha u^\beta + P g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \\
&= (\varepsilon + P)(-1)(-1) + P(-1) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Άρα, ε είναι η πυκνότητα ενέργειας ως προς έναν παρατηρητή που κινείται μαζί με το ρευστό.

Μελετώντας τη φυσική σημασία των διαφόρων συνιστωσών του $T_{\alpha\beta}$ βρίσκουμε ότι:

$$T^{ti} = \text{ροή ενέργειας} = \frac{\text{ενέργεια}}{\text{επιφάνεια} \cdot \text{χρόνος}}$$

$$T^{it} = \text{πυκνότητα ορμής} \Leftrightarrow \text{ροή ενέργειας}$$

$$\underset{(i,j\neq t)}{T^{ij}} = \text{τανυστής τάσης} = \frac{i\text{-συνιστώσα της δύναμης ανά μονάδα επιφανείας}}{\text{κάθετα σε επιφάνεια με κάθετο διάνυσμα } // j}$$

Γ. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΟΥ ΤΑΝΥΣΤΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ-ΟΡΜΗΣ

Οι νόμοι διατήρησης της ενέργειας και της ορμής εκφράζονται από τη σχέση

$$\boxed{T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0}$$

(στην ΕΘΣ ισχύε $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$, ενώ στο Νευτώνειο όριο ανάγονται στην εξίσωση συνέχειας και τις εξισώσεις κίνησης Euler).

Δ. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΕΔΙΟΥ ΤΟΥ EINSTEIN

Θέλοντας να γενικεύσουμε την εξίσωση Poisson ($\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$) θα μπορούσαμε να γράψουμε πιο γενικά

$$R_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta} R = \kappa T_{\alpha\beta}$$

όπου λ, κ σταθερές. Εφ' όσον ισχύε $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ θα ισχύει επίσης

$$\left(R^{\alpha\beta} + \lambda g^{\alpha\beta} R\right)_{;\beta} = 0$$

Όμως, από τις ταυτότητες Bianchi, ισχύει η σχέση
$$\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R\right)_{;\beta} = 0$$

Για να είναι οι εξισώσεις πεδίου συμβατές με τις ταυτότητες Bianchi, θα πρέπει αναγκαστικά η τιμή της σταθεράς λ να είναι
$$\lambda = -1/2$$

Επίσης, για να ανάγονται οι εξισώσεις πεδίου στην εξίσωση Poisson στο Νευτώνειο όριο θα πρέπει η σταθερά κ αναγκαστικά να είναι ίση με
$$\kappa = 8\pi G \qquad \text{(όπου θεωρούμε } c=1\text{)}$$

ή
$$\kappa = 8\pi \qquad \text{για } G=c=1.$$

Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις πεδίου
$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

E. ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΗ ΣΤΑΘΕΡΑ

Ακόμη πιο γενικά κι εφόσον $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$, μπορούμε να προσθέσουμε όρους ανάλογους της $g_{\alpha\beta}$ στις εξισώσεις πεδίου και να ισχύει πάλι $G_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0$, δηλ. μπορούμε να γράψουμε
$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$
όπου Λ κάποια σταθερά. Η πιο γενική αυτή μορφή των εξισώσεων πεδίου χρησιμοποιείται στην κοσμολογία καθώς το Λ (κοσμολογική σταθερά) αν δεν είναι ακριβώς μηδέν, πρέπει να έχει μικρή τιμή, ώστε η επίδρασή του να γίνεται αντιληπτή μόνο σε κοσμολογικές αποστάσεις.

Εάν μεταφέρουμε τον όρο $\Lambda g_{\alpha\beta}$ στο δεξί μέλος, δηλ.

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{\Lambda}{8\pi} g_{\alpha\beta} \right)$$

τότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε τον όρο $-\frac{\Lambda}{8\pi} g_{\alpha\beta}$ ως την ενέργεια του κενού χώρου.

ΣΤ. ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΕΔΙΟΥ ΣΤΟ ΚΕΝΟ

Μία εναλλακτική μορφή των εξισώσεων πεδίου προκύπτει ως εξής:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

$$\Leftrightarrow \quad R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \quad R_{\alpha}{}^{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\alpha}{}^{\alpha} R = 8\pi T_{\alpha}{}^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad R - \frac{4}{2} R = 8\pi T \qquad (g_{\alpha}{}^{\alpha} = \delta_{\alpha}{}^{\alpha} = 4)$$

$$\Rightarrow \quad R = -8\pi T$$

όπου θέσαμε $T_{\alpha}{}^{\alpha} \equiv T$. Οπότε:

$$R_{\alpha\beta} + \frac{8\pi}{2} g_{\alpha\beta} T = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_{\alpha\beta} = 8\pi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right)}$$

Έτσι, στο κενό, όπου $T_{\alpha\beta} = 0$, $T = 0$ ισχύει $R = 0$ και

$$\boxed{R_{\alpha\beta} = 0}$$

Η τελευταία σχέση είναι απλούστερη της $G_{\alpha\beta} = 0$.

Ζ. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ – ΟΡΜΗΣ

Η διατήρηση του τανυστή ενέργειας-ορμής, δηλ. η εξίσωση

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$$

μπορεί να αναλυθεί σε δυο ανεξάρτητες εξισώσεις. Η μία (βαθμωτή) εξίσωση προκύπτει από την προβολή της εξίσωσης στην 4-ταχύτητα u^α, δηλ.

$$u_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$$

$$\Rightarrow u_\alpha\left[(\varepsilon+P)_{;\beta}u^\alpha u^\beta+(\varepsilon+P)\left(u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta+u^\alpha u^\beta{}_{;\beta}\right)+P_{;\beta}g^{\alpha\beta}\right]=0$$

$$\Rightarrow -(\varepsilon+\cancel{P})_{;\beta}u^\beta+(\varepsilon+P)\left(u_\alpha u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta-u^\beta{}_{;\beta}\right)+\cancel{P_{;\beta}u^\beta}=0$$

Αλλά

$$u^\alpha u_\alpha=-1$$

$$\Rightarrow u^\beta(u^\alpha u_\alpha)_{;\beta}=0$$

$$\Rightarrow u^\beta u^\alpha u_{\alpha;\beta}+u^\beta u^\alpha{}_{;\beta}u_\alpha=0$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\,u_\alpha u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta=0$$

οπότε προκύπτει

$$\boxed{\varepsilon_{;\beta}u^\beta+(\varepsilon+P)u^\beta{}_{;\beta}=0}$$

Η εξίσωση εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας (στην περίπτωση ισεντροπικής ροής συμπίπτει με τη διατήρηση του αριθμού των βαρυονίων). Στο Νευτώνειο όριο γίνεται

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\,\mathrm{div}\vec{u}=0$$

που είναι η γνωστή εξίσωση συνέχειας της κλασσικής υδροδυναμικής.

Η άλλη (δυναμική) εξίσωση προκύπτει από την προβολή της $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$ <u>κάθετα</u> προς την u^α. Προς τούτο, ορίζουμε τον <u>τανυστή προβολής</u>

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta$$

ο οποίος έχει την ιδιότητα

$$h_{\alpha\beta}u^\alpha = g_{\alpha\beta}u^\alpha + u_\alpha u_\beta u^\alpha$$

$$= u_\beta - u_\beta \qquad (u_\alpha u^\alpha = -1)$$

$$\Rightarrow \quad h_{\alpha\beta}u^\alpha = 0$$

οπότε,

$$h_{\alpha\gamma}T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad h_{\alpha\gamma}\left[(\varepsilon+p)_{;\beta}u^\alpha u^\beta + (\varepsilon+p)(u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta + u^\alpha u^\beta{}_{;\beta}) + p_{;\beta}g^{\alpha\beta}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad h_{\alpha\gamma}(\varepsilon+p)u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta + h_{\alpha\gamma}p_{;\beta}g^{\alpha\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (g_{\alpha\gamma} + u_\alpha u_\gamma)(\varepsilon+p)u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta + h^\beta{}_\gamma p_{;\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\varepsilon+p)u_{\gamma;\beta}u^\beta + (\varepsilon+p)u_\gamma \overbrace{u_\alpha u^\alpha{}_{;\beta}}^{0}u^\beta + h^\beta{}_\gamma p_{;\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_{\alpha;\beta}u^\beta = -\frac{h^\beta{}_\alpha p_{;\beta}}{\varepsilon+p}}$$

Η εξίσωση αυτή εκφράζει τη διατήρηση της ορμής και στο Νευτώνειο όριο γίνεται

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{g} - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho}$$

όπου $\vec{g}$ η επιτάχυνση του πεδίου βαρύτητας, που είναι η γνωστή εξίσωση κίνησης Euler της κλασσικής υδροδυναμικής.

ΚΕΦ 6. ΣΦΑΙΡΙΚΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ

Α. Μια πρώτη λύση των εξισώσεων πεδίου στον κενό χώρο (δηλ. εξωτερικά της πηγής του βαρυτικού πεδίου) προκύπτει εάν υποθέσει κανείς σφαιρική συμμετρία και στατικότητα της λύσης (ανεξαρτησία από το χρόνο). Τότε, όλες οι συνιστώσες της μετρικής εξαρτώνται μόνο από την ακτινική συντεταγμένη r. Η πιο γενική γραφή της μετρικής είναι τότε

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + h(r)\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

όπου t, r, θ, φ είναι οι συντεταγμένες Schwarzschild. Στις συντεταγμένες αυτές η περιφέρεια ενός κύκλου σε σταθερή ακτίνα r είναι

$$l = \oint ds = \int_0^{2\pi} r\,d\varphi = 2\pi r$$

οπότε η r είναι περιφερειακή ακτίνα.

Μια άλλη μορφή της μετρικής στην περίπτωση σφαιρικής συμμετρίας και στατικότητας είναι η

$$ds^2 = -f(\tilde r)\,dt^2 + h(\tilde r)\left[d\tilde r^2 + \tilde r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta)\,d\varphi^2\right]$$

όπου τώρα οι συντεταγμένες $t, \tilde r, \theta, \varphi$ ονομάζονται ισοτροπικές (διότι το χωρικό μέρος της μετρικής είναι σύμμορφο προς τον Ευκλείδιο χώρο).

Στις συντεταγμένες αυτές, όμως, η περιφέρεια ενός κύκλου σταθερής ακτίνας $\tilde r$ είναι

$$\begin{aligned} l = \oint ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\varphi\varphi}}\, d\varphi \\ &= \sqrt{h(\tilde r)}\,\tilde r \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \sqrt{h(\tilde r)}\,\tilde r \\ &\neq 2\pi \tilde r \quad (!) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, θα βρούμε τη μορφή των συναρτήσεων $f(r)$ και $h(r)$ στις συντεταγμένες Schwarzschild.

Οι εξισώσεις πεδίου στο κενό προκύπτουν:

$$
\begin{cases}
R_{tt} = 0 = \frac{1}{2}(fh)^{-1/2}\frac{d}{dr}\left[(fh)^{-1/2}f'\right] + (rfh)^{-1}f' & (1) \\
R_{rr} = 0 = -\frac{1}{2}(fh)^{-1/2}\frac{d}{dr}\left[(fh)^{-1/2}f'\right] + (rh^2)^{-1}f' & (2) \\
R_{\theta\theta} = 0 = -\frac{1}{2}(rfh)^{-1}f' + \frac{1}{2}(rh^2)^{-1}h' + r^{-2}(1-h^{-1}) & (3) \\
R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta} & \\
R_{ij} = 0 \ , i \neq j &
\end{cases}
$$

Από τις (1)+(2) $\Rightarrow \dfrac{f'}{f} + \dfrac{h'}{h} = 0$

$$\Rightarrow f = \frac{k}{h} \quad , \quad k = \text{σταθ.}$$

Μετασχηματίζοντας το χρόνο σε $t \to k^{1/2} t$ έχουμε

$$f = \frac{1}{h} .$$

Επίσης, (3) $\Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{f'}{r} + \frac{f^2}{2r}\left(-\frac{1}{f^2}\right)f' + \frac{1}{r^2}(1-f) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{f'}{r} + \frac{1}{r^2}(1-f) = 0$$

$$\Rightarrow -f' + \frac{1}{r}(1-f) = 0$$

$$\Rightarrow f + rf' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}(rf) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{f = 1 + \frac{C}{r}}$$

όπου $C = \text{σταθ.}$

οπότε, η μετρική γίνεται

$$ds^2 = -\left(1+\frac{c}{r}\right)dt^2 + \left(1+\frac{c}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

παρατηρούμε πως

$$\lim_{r\to\infty} g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (\text{Minkowski})$$

δηλ. η μετρική είναι ασυμπτωτικά επίπεδη, όπως οφείλει να είναι κάθε μετρική που περιγράφει ένα απομονωμένο αστέρα.

Συγκρίνοντας την παραπάνω μετρική με το Νευτώνειο όριο, στο οποίο $g_{tt} \to -(1+2\Phi)$ όπου $\Phi = -M/r$ προκύπτει ότι η σταθερά c είναι

$$c = -2M$$

όπου M είναι η ολική μάζα-ενέργεια του αστέρα.
Τελικά, η μορφή της μετρικής σε συντεταγμένες Schwarzschild είναι

$$\boxed{ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)}$$

η οποία ονομάζεται λύση Schwarzschild.

Η λύση αυτή περιγράφει τον εξωτερικό χωρόχρονο μόνο ενός αστέρα (στο εσωτερικό ενός αστέρα η λύση είναι διαφορετική). Περιγράφει όμως και μελανές οπές, όπως θα δούμε σε άλλο κεφάλαιο.

Β. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ BIRKHOFF

Ακόμη κι αν υποθέσει κανείς ότι υπάρχει χρονική εξάρτηση της μετρικής σε σφαιρική συμμετρία, δηλ. $f=f(r,t)$ και $h=h(r,t)$, τότε πάλι η μοναδική λύση των εξισώσεων Einstein στο κενό παραμένει η λύση Schwarzschild (θεώρημα Birkhoff, 1926).

Αυτό έχει π.χ. ως συνέπεια, ο εξωτερικός χωρόχρονος ενός σφαιρικού αστέρα που καταρρέει να παραμένει αμετάβλητος. Ένα σωματίδιο σε τροχιά γύρω από έναν τέτοιο αστέρα δε θα καταλάβει ότι ο αστέρας κατέρρευσε κι έγινε μελανή οπή (αρκεί η κατάρρευση να γίνει ακριβώς σε σφαιρική συμμετρία).

Μια δεύτερη συνέπεια είναι ότι δεν υπάρχει βαρυτική ακτινοβολία μονοπόλου (στην πραγματικότητα, δεν υπάρχει ούτε διπολική βαρυτική ακτινοβολία).

Γ. ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΛΥΣΗ

Η λύση Schwarzschild περιγράφει μόνο το εξωτερικό ενός αστέρα (κενός χώρος). Για να βρούμε τον χωρόχρονο στο εσωτερικό ενός αστέρα πρέπει να λύσουμε πάλι τις εξισώσεις πεδίου, αυτή τη φορά με μη-μηδενικό τανυστή ενέργειας-ορμής στο δεξί μέλος. Οι κατάλληλες εξισώσεις είναι οι:

$$G_{tt} = 8\pi T_{tt} \Rightarrow \quad h(r) = \left[1-\frac{2m(r)}{r}\right]^{-1}$$

όπου $\boxed{\dfrac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon}$ ①

$$G_{rr} = 8\pi T_{rr} \Rightarrow \boxed{\frac{d\nu}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r[r-2m(r)]}} \qquad (2)$$

όπου θέσαμε $f = e^{2\nu}$

και

$$G_{\theta\theta} = 8\pi T_{\theta\theta} \Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dr} = -(\varepsilon + P)\frac{d\nu}{dr}} \qquad (3)$$

(Εννοείται ότι οι συναρτήσεις ν, P, ε εξαρτώνται μόνο από το r). Οι ①, ② και ③ ονομάζονται σύστημα εξισώσεων Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) και περιγράφουν πλήρως τη δομή ενός σφαιρικού αστέρα. Στο Νευτώνειο όριο ανάγονται στις αντίστοιχες εξισώσεις υδροστατικής ισορροπίας, δηλ. στις

$$① \rightarrow \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$② \rightarrow \frac{d\Phi}{dr} = \frac{m}{r^2}$$ [ΑΣΚΗΣΗ]

$$③ \rightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{\rho m}{r^2}$$

(όπου $G=1$).

Για να βρεθεί μια λύση, η διαδικασία είναι η εξής:

1. Επιλέγουμε τη σχέση $P = P(\varepsilon)$ (καταστατική εξίσωση)
2. καθορίζουμε π.χ. την κεντρική πυκνότητα ενέργειας ε_c
3. Λύνουμε το σύστημα ①, ②, ③ με αρχικές συνθήκες στο κέντρο του αστέρα $m(0)=0$, $\nu(0)=\nu_c$, $P(0)=P_c$. Η $\nu(0)=\nu_c$ είναι μια αυθαίρετη τιμή ενώ η P_c καθορίζεται από την ε_c μέσω της $P=P(\varepsilon)$.
4. Στην επιφάνεια του αστέρα ($P=0$) συγκρίνουμε τη λύση με τη λύση Schwarzschild, ώστε να καθοριστεί η σωστή τιμή ν_c.

Δ. ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΑΣΤΕΡΑΣ

Αν υποθέσουμε $\varepsilon = \varepsilon_0 = $ σταθ. για $r \leq R$ τότε ο αστέρας έχει ομογενή κατανομή πυκνότητας (η πίεση όμως συνεχίζει να είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της απόστασης r). Σ' αυτή την περίπτωση το σύστημα εξισώσεων TOV μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Η λύση είναι:

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \varepsilon_0$$

$$P(r) = \varepsilon_0 \left[\frac{(1-2M/R)^{1/2} - (1-2Mr^2/R^3)^{1/2}}{\left(1-\frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2} - 3(1-2M/R)^{1/2}} \right]$$

όπου R είναι η ακτίνα του αστέρα ($P(R)=0$).

Στο Νευτώνειο όριο: $P(r) = \frac{2}{3}\pi\rho_0^2 (R^2 - r^2)$ [ΑΣΚΗΣ
($\varepsilon_0 \to \rho_0$)

Η κεντρική πίεση είναι:

$$P_c = \varepsilon_0 \left[\frac{1-(1-2M/R)^{1/2}}{3\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2} - 1} \right]$$

(με Νευτώνειο όριο: $P_c = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} M^{2/3} \rho_0^{4/3}$). [ΑΣΚΗΣ

Βλέπουμε ότι $P_c \to \infty$ όταν $3\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2} \to 1$

$$\Rightarrow R \to \frac{9}{4} M$$

Άρα, πρέπει να ισχύει

$$\boxed{\frac{M}{R} < \frac{4}{9}}$$

ώστε ένας ομογενής αστέρας να έχει πεπερασμένη πίεση στο κέντρο (για οποιαδήποτε άλλη καταστατική εξίσωση το όριο αυτό είναι πιο αυστηρό).

Η ύπαρξη αυτού του ορίου επιβάλλει και την ύπαρξη μιας μέγιστης μάζας που μπορεί να έχει ένας σχετικιστικός αστέρας. Για ομογενή πυκνότητα η μέγιστη μάζα είναι

$$M_{max} = \frac{4}{9(3\pi)^{1/2}} \varepsilon_0^{-1/2}$$

(αν προστεθεί επιπλέον μάζα σ'ένα τέτοιο αστέρα, αυτός θα καταρρεύσει). Και για οποιαδήποτε άλλη καταστατική εξίσωση υπάρχει πάντοτε ένα μέγιστο όριο για τη μάζα, ως συνέπεια της μη-γραμμικότητας της ΓΘΣ.

Ε. ΣΥΜΒΟΛΑ CHRISTOFFEL

Για τη μετρική Schwarzschild (κενού):

$$\Gamma^t{}_{tr} = \frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

$$\Gamma^r{}_{tt} = \frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)$$

$$\Gamma^r{}_{rr} = -\frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -(r-2M)$$

$$\Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = -(r-2M)\sin^2\theta$$

$$\Gamma^\theta{}_{r\theta} = 1/r$$

$$\Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\cos\theta\sin\theta$$

$$\Gamma^\varphi{}_{r\varphi} = 1/r$$

$$\Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \cot\theta$$