ΚΕΦ. 7. : ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΕΣ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ SCHWARZSCHILD

Α. Κανονικά, οι εξισώσεις που περιγράφουν τις γεωδαισιακές είναι διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης ως προς τον ίδιο χρόνο τ (ή την αφινική παράμετρο λ). Όμως, επειδή η λύση Schwarzschild είναι στατική και σφαιρικά συμμετρική, υπάρχουν τα αντίστοιχα διανύσματα Killing

$$t^\alpha = (1,0,0,0)$$

$$\phi^\alpha = (0,0,0,1)$$

και οι αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες

$$t^\alpha u_\alpha = -e$$

$$\phi^\alpha u_\alpha = l$$

$$\Rightarrow \quad e = -u_t = -g_{tt}u^t = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

$$l = u_\varphi = g_{\varphi\varphi}u^\varphi = r^2\sin^2\theta\,\frac{d\varphi}{d\tau}$$

Τι αντιπροσωπεύουν οι ποσότητες e και l;
Είδαμε ότι στην ΕΘΣ η ολική μάζα-ενέργεια ενός σωματιδίου είναι

$$E = p^t = mu^t = m\frac{dt}{d\tau}$$

οπότε η ενέργεια ανά μονάδα μάζας είναι

$$\frac{E}{m} = \frac{dt}{d\tau}$$

Επειδή $\lim\limits_{r\to\infty} e = \lim\limits_{r\to\infty}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau}$

έπεται ότι η σταθερά e είναι η γενίκευση, στη ΓΘΣ, της ενέργειας ανά μονάδα μάζας (ηρεμίας).

Αντιστοίχως, επειδή

$$l = r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\tau} = r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{d\tau}$$

στο Νευτώνειο όριο είναι

$$l = r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt} \qquad \left(\frac{dt}{d\tau} \to 1\right)$$

οπότε η l είναι η στροφορμή ανά μονάδα μάζας (ηρεμίας) σε συντεταγμένες r, θ, φ.

B. ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ

Όλες οι γεωδαισιακές της λύσης Schwarzschild είναι επίπεδες, δηλ. η κάθε μία βρίσκεται επί ενός συγκεκριμένου επιπέδου. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα ως εξής: Ας πούμε ότι σε κάποιο σημείο μιας τροχιάς είναι $\frac{d\varphi}{d\tau} \neq 0$ για $\tau = 0$. Τότε μπορώ (λόγω σφαιρικής συμμετρίας) να στρέψω το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε $\frac{d\varphi'}{d\tau} = 0$ (όπου φ' η νέα συντεταγμένη) $\Rightarrow l = 0$. Επειδή όμως η l διατηρείται, θα είναι πάντοτε $\frac{d\varphi'}{d\tau} = 0$ $\Rightarrow \varphi' = \text{σταθ.} \Rightarrow$ η τροχιά παραμένει σ'ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Επειδή σε σφαιρική συμμετρία όλα τα επίπεδα που περνούν από το $r = 0$ είναι ισοδύναμα, αρκεί να μελετήσουμε τροχιές στο επίπεδο $\theta = \pi/2$ (ισημερινό επίπεδο).

Γ. ΤΡΙΤΗ ΣΤΑΘΕΡΑ ΚΙΝΗΣΗΣ - ΥΠΟΘΕΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Ανεξάρτητα των συμμετριών του χωροχρόνου, υπάρχει πάντοτε η σταθερά κίνησης

$$u^\alpha u_\alpha = -\kappa$$

όπου

$$\kappa = \begin{cases} 1, & \text{χρονοειδής τροχιές (σωματίδια)} \\ 0, & \text{φωτοειδής τροχιές (φωτόνια)} \end{cases}$$

Οπότε

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -\kappa$$

$$\Rightarrow g_{tt}(u^t)^2 + g_{rr}(u^r)^2 + g_{\theta\theta}(u^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(u^\varphi)^2 = -\kappa$$

$$\Rightarrow -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\cancel{\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2} + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = -\kappa$$

$$\Rightarrow -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{e^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2} + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\cancel{\sin^2\theta}\cdot\frac{l^2}{r^4\cancel{\sin^4\theta}} = -\kappa$$

$$\Rightarrow -\frac{e^2}{1-\frac{2M}{r}} + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} = -\kappa$$

$$\Rightarrow e^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{l^2}{r^2}+\kappa\right)$$

Διαιρώντας με 2:

$$\frac{e^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{r^2} - \frac{2M}{r}\kappa - \frac{2Ml^2}{r^3} + \kappa\right)$$

$$\Rightarrow \frac{e^2-\kappa}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{r^2} - \frac{2M}{r}\kappa - \frac{2Ml^2}{r^3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \tilde{V}} \qquad (1)$$

όπου ορίσαμε την υποθετική ενέργεια

$$\tilde{E} = \frac{e^2-\kappa}{2}$$

και το υποθετικό δυναμικό

$$\tilde{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell^2}{r^2} - \frac{2M}{r}\kappa - \frac{2M\ell^2}{r^3}\right)$$

Η εξίσωση ① είναι απλώς η εξίσωση της ισοδύναμης μονοδιάστατης κίνησης σ'ένα υποθετικό δυναμικό $\tilde{V}$ με υποθετική ενέργεια $\tilde{E}$, οπότε μπορούν να μελετηθούν οι τροχιές όπως και στην κλασική δυναμική.

Δ. ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΤΡΟΧΙΩΝ ΣΤΟ ΥΠΟΘΕΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι το υποθετικό δυναμικό συμπίπτει με αυτό της κίνησης σ'ένα πεδίο κεντρικών δυνάμεων στο Νευτώνειο όριο $\left(\frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M}{r}\right)$ για $\kappa=1$ (σωματίδια) με την προσθήκη όμως του σχετικιστικού όρου $-\frac{M\ell^2}{r^3}$. Ο όρος αυτός αλλάζει τόσο ποσοτικά όσο και ποιοτικά τις τροχιές των σωματιδίων ή φωτονίων.

ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ $(\kappa=1)$:

Βρίσκουμε τα ακρότατα του δυναμικού:

$$\frac{d\tilde{V}}{dr} = 0 \Rightarrow Mr^2 - \ell^2 r + 3M\ell^2 = 0$$

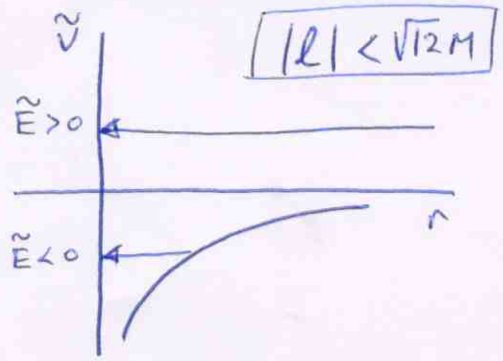
$$\Rightarrow \boxed{r_\pm = \frac{\ell^2 \pm \ell\sqrt{\ell^2-12M^2}}{2M}}$$

Για να υπάρχουν πραγματικές λύσεις $r_\pm$, θα πρέπει να ισχύει $l^2 > 12M^2 \Rightarrow |l| > \sqrt{12}M$. Αν ισχύει αυτή η σχέση, τότε υπάρχουν ένα τοπικό μέγιστο στο $r=r_-$ με τιμή $\tilde{V}_- = \tilde{V}(r_-)$ κι ένα τοπικό ελάχιστο στο $r=r_+$ με τιμή $\tilde{V}_+ = \tilde{V}(r_+)$. Στο τοπικό μέγιστο είναι $\frac{d^2\tilde{V}}{dr^2}<0$ ενώ στο τοπικό ελάχιστο είναι $\frac{d^2\tilde{V}}{dr^2}>0$.

Εάν η τροχιά τέτοια ώστε $\tilde{E}<0$, τότε είναι δέσμια (bound) αλλιώς, αν $\tilde{E}>0$, είναι αδέσμευτη (unbound).

ΕΙΔΗ ΤΡΟΧΙΩΝ:

①



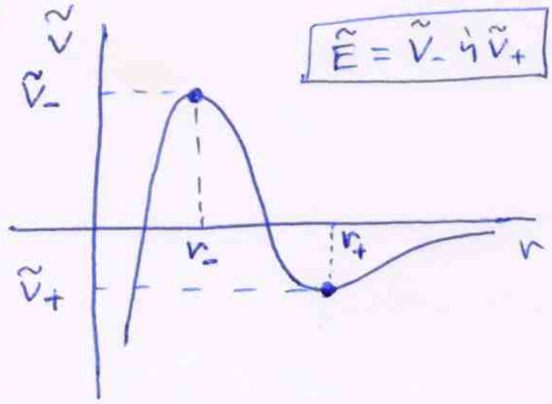
ΤΡΟΧΙΑ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ

Είτε $\tilde{E}>0$, είτε $\tilde{E}<0$, η στροφορμή δεν είναι αρκετά μεγάλη, οπότε δεν υπάρχουν κυρτώματα και η τροχιά καταλήγει στο $r=0$ (για εισερχόμενο σωματίδιο)

Ένα εξερχόμενο σωματίδιο με $\tilde{E}>0$ μπορεί να φθάσει στο $r\to\infty$, ενώ με $\tilde{E}<0$ είναι δέσμιο και θα επιστρέψει στο $r=0$ αφού φθάσει μέχρι μια μέγιστη απόσταση.

$$\boxed{|\ell| > \sqrt{12}\,M}$$

(2) $\boxed{\tilde{E} = \tilde{V}_- \text{ ή } \tilde{V}_+}$



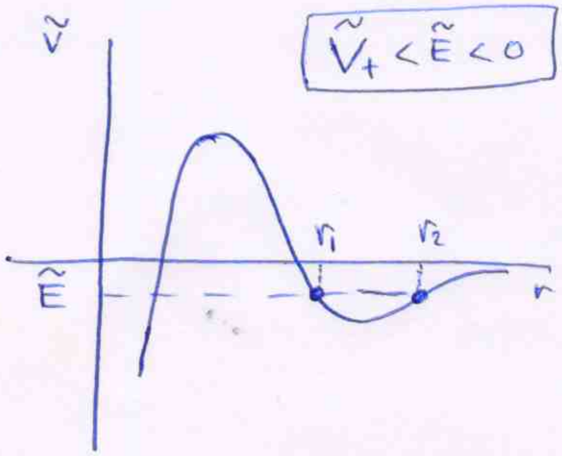
ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ

Αν $\tilde{E} = \tilde{V}_-$ ή $\tilde{E} = \tilde{V}_+$ η τροχιά είναι κυκλική $\left(\frac{dr}{d\tau} = 0\right)$.

Στο r_- : $\frac{d^2\tilde{V}}{dr^2} < 0 \Rightarrow$ ασταθής

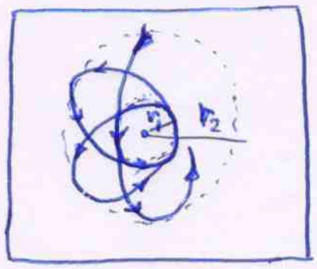
r_+ : $\frac{d^2\tilde{V}}{dr^2} > 0 \Rightarrow$ ευσταθής

(3) $\boxed{\tilde{V}_+ < \tilde{E} < 0}$



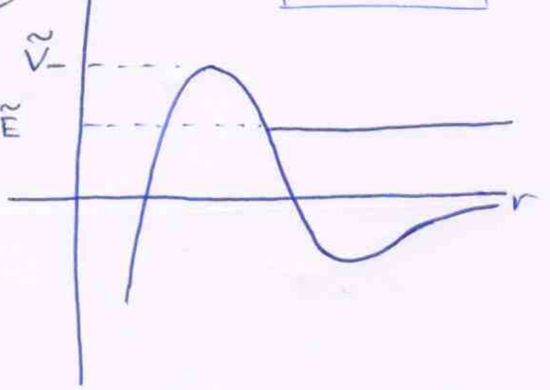
ΑΝΟΙΚΤΗ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗΣ ΤΡΟΧΙΑ

Εάν $\tilde{V}_+ < \tilde{E} < 0$ τότε το σωματίδιο θα κινείται σε ανοικτή ελλειψοειδής τροχιά μεταξύ των ορίων r_1 και r_2



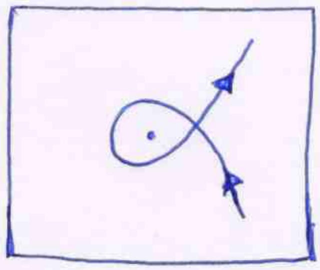
Στη Νευτώνεια δυναμική η τροχιά θα ήταν μια κλειστή έλλειψη. Όμως ο σχετικιστικός όρος $-\frac{M\ell^2}{r^3}$ στο υποθετικό δυναμικό προκαλεί μια μετάπτωση των αψίδων της τροχιάς.

(4) $\boxed{0<\tilde{E}<\tilde{V}_-}$



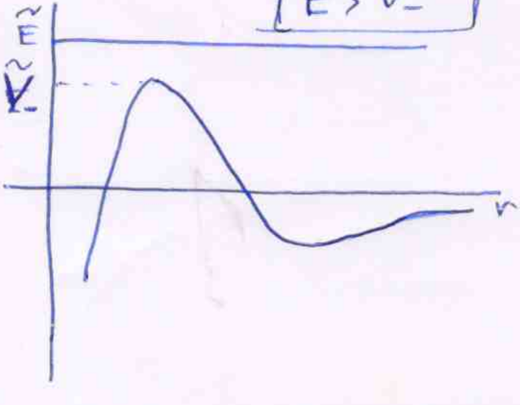
ΤΡΟΧΙΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ

Επειδή $\tilde{E}>0$, ένα εισερχόμενο σωματίδιο δεν μένει δέσμιο, αλλά απλώς σκεδάζεται από το κεντρόφυγο φράγμα του υποθετικού δυναμικού.



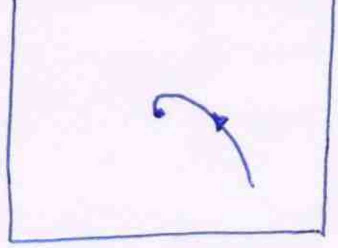
Το φαινόμενο της σκέδασης είναι πολύ πιο έντονο απ'ότι στο Νευτώνειο όριο.

(5) $\boxed{\tilde{E}>\tilde{V}_-}$

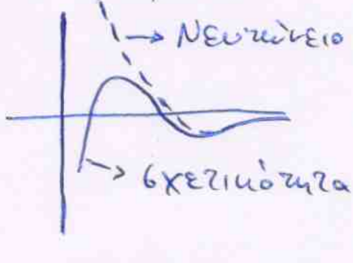


ΤΡΟΧΙΑ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ

Αν $\tilde{E}>\tilde{V}_-$ ένα εισερχόμενο σωματίδιο δεν έχει αρκετή στροφορμή για να αποφύγει την πτώση στο $r=0$.



Αντιθέτως, στο Νευτώνειο όριο αυτού του είδους η τροχιά δεν υπάρχει, διότι εκεί το κεντρόφυγο φράγμα υπάρχει πάντοτε για οποιοδήποτε $\tilde{E}>0$ ~~για οποιαδήποτε στροφορμή~~ όταν $|l|>\sqrt{12}M$.



E. ΕΣΩΤΑΤΗ ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗ ΤΡΟΧΙΑ

Η ευσταθής κυκλική τροχιά στο $r = r_+$ υπάρχει μόνο εφ' όσον $|l| > \sqrt{12}M$ και είναι

$$r_+ = \frac{l^2 + l\sqrt{l^2 - 12M^2}}{2M}$$

Οπότε, στο όριο όπου $|l| = \sqrt{12}M$ είναι:

$$r_{ISCO} = \frac{l^2}{2M} = \frac{12M^2}{2M}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{ISCO} = 6M}$$

όπου ISCO = innermost stable circular orbit.

Οποιαδήποτε κυκλική τροχιά με $r < r_{ISCO}$ είναι ασταθής.

ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ

Για μια ευσταθή κυκλική τροχιά ορίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα (ως προς μακρινό παρατηρητή)

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{u^\varphi}{u^t}$$

όμως, $$u^t = \frac{dt}{d\tau} = \frac{e}{1-2M/r} \qquad (-e = t^\alpha u_\alpha = u^t g_{tt})$$

$$u^\varphi = \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{l}{r^2} \qquad (l = \varphi^\alpha u_\alpha = u^\varphi g_{\varphi\varphi})$$

Οπότε:

$$\boxed{\Omega = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{l}{e}\right)}$$

Για ευσταθείς κυκλικές τροχιές υπάρχει όμως άμεση σχέση μεταξύ l και e, διότι ισχύουν οι συνθήκες

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{V}}{dr} = 0 \\ \tilde{E} = \tilde{V} \Rightarrow \dfrac{dr}{d\tau} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{l^2 + l\sqrt{l^2 - 12M^2}}{2M} \\ \dfrac{e-1}{2} = \dfrac{l^2}{2r^2} - \dfrac{M}{r} - \dfrac{Ml^2}{r^3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{l}{e} = \frac{\sqrt{rM}}{1 - \frac{2M}{r}}}$$

Οπότε,

$$\boxed{\Omega^2 = \frac{M}{r^3}}$$

[ΑΣΚΗΣΗ]

Κατά σύμπτωση, προκύπτει η ίδια μορφή όπως και στο Νευτώνειο όριο.

Επειδή $u^\varphi = \Omega u^t$, η 4-ταχύτητα είναι

$$u^\alpha = (u^t, 0, 0, u^\varphi)$$
$$= u^t(1, 0, 0, \Omega)$$

Η u^t προκύπτει από τη συνθήκη κανονικοποίησης

$$u^\alpha u_\alpha = -1$$
$$\Rightarrow u^t = \left(1 - \frac{2M}{r} - r^2\Omega^2\right)^{-1/2}$$
$$\Rightarrow \boxed{u^t = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2}}$$

[ΑΣΚΗΣΗ]

ΣΤ. ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΕΣ ΦΩΤΟΝΙΩΝ

Στη γενική εξίσωση που περιγράφει γεωδαισιακές της μετρικής Schwarzschild θέτουμε $\kappa = 0$ (διότι $u^\alpha u_\alpha = 0$ για φωτόνια) και στη θέση της παραμέτρου τ χρησιμοποιούμε την αφινική παράμετρο λ, οπότε:

$$\frac{e^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\ell^2}{r^2}$$

Ορίζουμε

$$\tilde{E}_\varphi = \frac{e^2}{2} \rightarrow \text{ενέργεια φωτονίου στο άπειρο}$$

$$\tilde{V}_\varphi = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\ell^2}{r^2} \rightarrow \text{στροφορμή φωτονίου (ως προς το } r=0\text{) στο άπειρο.}$$

Τότε, η εξίσωση των γεωδαισιακών παίρνει πάλι τη μορφή

$$\boxed{\tilde{E}_\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \tilde{V}_\varphi}$$

ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ (ΑΣΤΑΘΕΙΣ)

Κυκλική τροχιά στο υποθετικό δυναμικό $\tilde{V}_\varphi$ μπορεί να υπάρξει άν

$$\frac{\partial \tilde{V}_\varphi}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2}{2}\left[-\frac{2}{r^3} + \frac{6}{r^4}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{r = 3M}$$

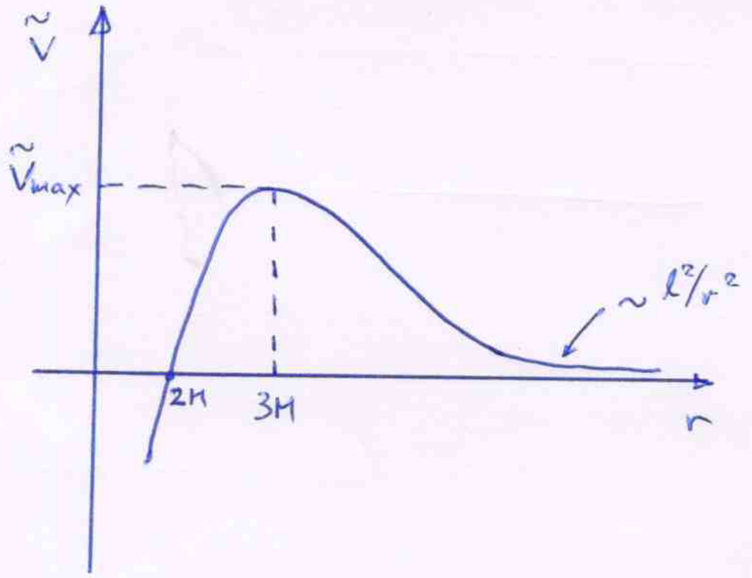
Εξετάζουμε την ευστάθεια της κυκλικής τροχιάς:

$$\left.\frac{d^2\tilde{V}_\varphi}{dr^2}\right|_{r=3M} < 0$$

άρα οι κυκλικές τροχιές στο $r=3M$ είναι <u>ασταθείς.</u> Το δυναμικό έχει <u>μέγιστη τιμή</u> στο $r=3M$ ίση με

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{max} &= \tilde{V}_\varphi(r=3M)\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{\ell^2}{(3M)^2}\\ &= \frac{\ell^2}{54M^2}\end{aligned}$$

Ένα τυπικό σχήμα του υποθετικού δυναμικού $\tilde{V}_\varphi$ για κάποια στροφορμή ℓ είναι:



Στην ασταθή κυκλική τροχιά: $\frac{dr}{d\lambda}=0 \Rightarrow \tilde{E}_\varphi = \tilde{V}_\varphi = \tilde{V}_{max}$

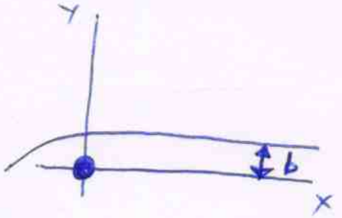
$$\Rightarrow \frac{e^2}{2} = \frac{\ell^2}{54M^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2}{e^2} = 27M^2 \Rightarrow \boxed{\left|\frac{\ell}{e}\right| = \sqrt{27}M}$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ ΚΡΟΥΣΗΣ (IMPACT PARAMETER)

Ορίζουμε την παράμετρο κρούσης ως

$$\boxed{b = \left|\frac{\ell}{e}\right|}$$



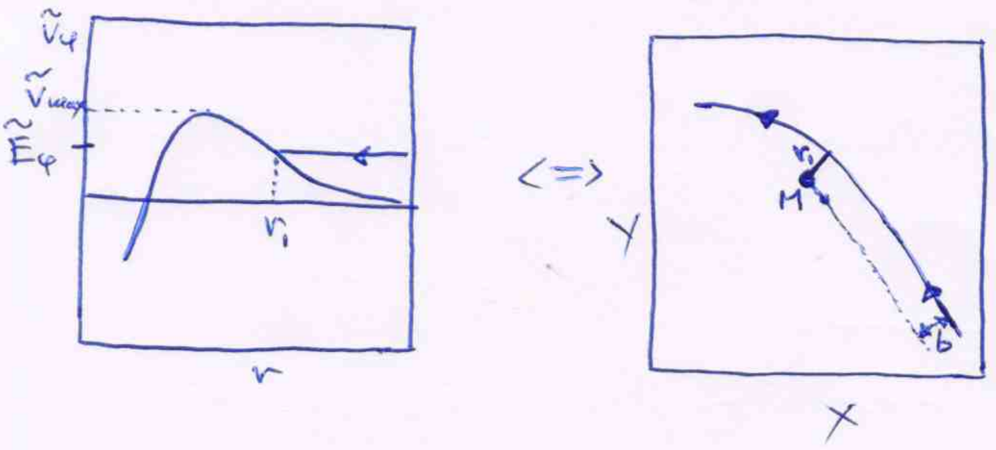
Αν π.χ. ορίσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων x, y τέτοιο ώστε η μελανή οπή να βρίσκεται στο $(x,y)=(0,0)$ τότε η παράμετρος κρούσης είναι η απόσταση από τον άξονα x της τροχιάς του φωτονίου στο άπειρο (επιλέγοντας τον άξονα x να είναι παράλληλος προς την ευθύγραμμη τροχιά του φωτονίου στο άπειρο).

Για την ευσταθή κυκλική τροχιά στο $r=3M$, όπου $\tilde{V}_\varphi = \tilde{V}_{max}$, είναι $b=\sqrt{27}\,M$.

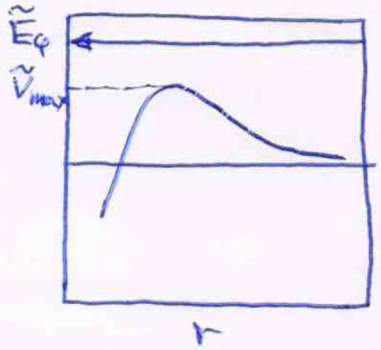
ΕΙΔΗ ΤΡΟΧΙΩΝ

- ΕΙΣΕΡΧΟΜΕΝΑ ΦΩΤΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

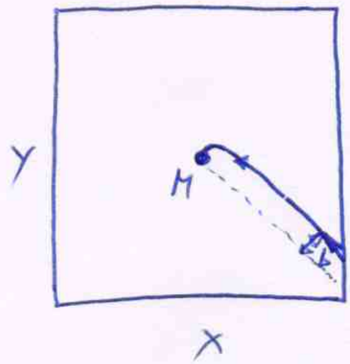
① $\tilde{E}_\varphi < \tilde{V}_{max} \Leftrightarrow b > \sqrt{27}\,M \Rightarrow$ <u>ΣΚΕΔΑΣΗ</u>



(2) $\tilde{E}_\varphi > \tilde{V}_{max} \Rightarrow b < \sqrt{27}M \Rightarrow$ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗ

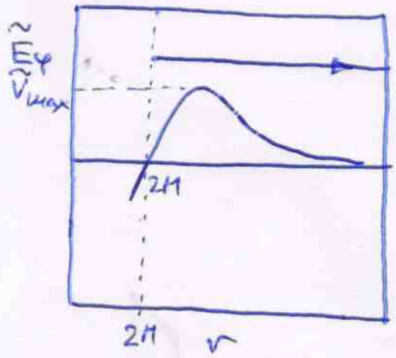


$\Longleftrightarrow$

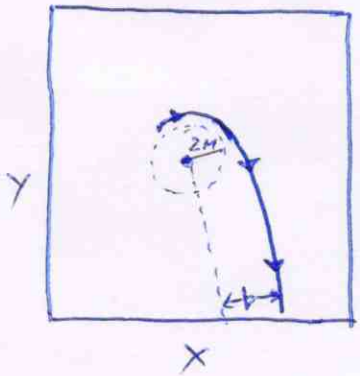


• ΕΞΕΡΧΟΜΕΝΑ ΦΩΤΟΝΙΑ

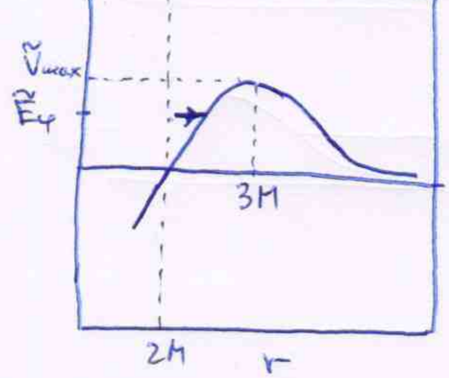
(3) $b < \sqrt{27}M$ με $r > 2M \Rightarrow$ ΔΙΑΦΥΓΗ



$\Longleftrightarrow$



(4) $b > \sqrt{27}M$ με $2M < r < 3M \Rightarrow$ ΣΥΛΛΗΨΗ



$\Longleftrightarrow$