

ΚΕΦ. 8ο: ΣΗΜΑΝΤΙΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΑ  
ΣΧΕΤΙΜΙΣΤΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ  
ΣΤΗ ΜΕΤΡΙΚΗ SCHWARZSCHILD

A. ΜΕΤΑΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΑΣΤΡΟΥ ΔΕΣΜΙΑΣ ΤΡΟΧΙΑΣ

Στη ΓΘΣ ελλειπτικές τροχιές γύρω από ένα κέντρο μάζας δεν είναι κλειστές, αλλά υπάρχει μια μεταπτώση των ακίδων της τροχιάς. Για να μελετήσουμε τη μεταπτώση, πρέπει να βρούμε μια διαφορική εξίσωση που να περιγράφει την τροχιά στο χώρο π.χ.  $\phi = \phi(r)$ . Θα χρησιμοποιήσουμε δύο εξισώσεις:

① τον ορισμό της γεωδαιτικής στη μορφή του υποθετικού δυναμικού:

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 + \tilde{V}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dz} = \pm \sqrt{2(\tilde{E} - \tilde{V})}$$

② τον ορισμό της ερωροφικής ανά μονάδα μάζας

$$l = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{dz} \quad (\text{στο } \theta = \pi/2)$$

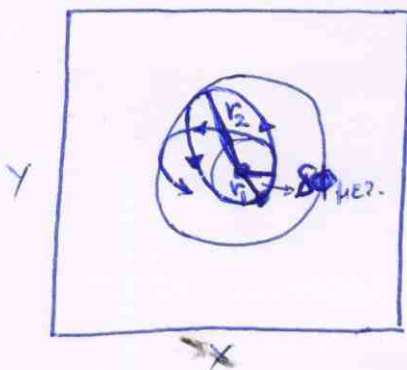
Διακρίνοντας βρίσκουμε:

$$\frac{d\phi/dz}{dr/dz} = \pm \frac{l/r^2}{\sqrt{2(\tilde{E} - \tilde{V})}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{l}{r^2} \left[ e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) \right]^{-1/2}}$$

Αν η κίνηση γίνεται μεταξύ δύο ~~μοσχα~~   
 μοσχαίων  $r_1$  και  $r_2$ , τότε η γωνία που   
 διαγράφεται είναι  $\int_{r_1}^{r_2} \frac{d\phi}{dr} dr$ . Αν οι  $r_1$  και  $r_2$    
 είναι η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση της   
 τροχιάς από το κέντρο, τότε για μια "ηλίξη"   
 γωνιά, η αυτίνα που διαγράφεται από το  $r_1$    
 μέχρι των επόμενης φορά που το εωκεκτίδιο επιπέφει   
 σε απόσταση  $r_1$  είναι (λόγω συντηρείας)

$$\Delta\phi \approx 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\phi}{dr} dr$$



Στο Νευτώνειο όριο, όπου η   
 ελλειπτική τροχιά εως εωκεκτίδιου   
 είναι κλειστή, είναι  $\Delta\phi = 2\pi$ .   
 Οπότε η γωνία μετακίνησης

ορίζεται ως

$$\Delta\phi_{κερ.} = \Delta\phi - 2\pi$$

Στην περίπτωση αδρανούς βαροστικού πεδίου (όπως   
 του Ηλίου) η τροχιά είναι σχεδόν ελλειπτική   
 με ημιάξονα  $a$  και εκκενρότητα   
 $\approx \epsilon = \frac{r_2}{a} - 1 < 1$ . Εάν αναζητούμε την  $\Delta\phi$    
 για  $M/R \ll 1$  τότε βρίσκουμε

$$\Delta\phi_{κερ.} = \frac{6\pi M}{a(1-\epsilon^2)}$$

Για τον πλανήτη Ερμής η θεωρητική πρόβλεψη είναι   
 $\Delta\phi_{κερ.} = 42.98''/\alpha\iota\omega\nu\alpha$ , το οποίο επαληθεύεται με   
 ακρίβεια  $\pm 0.04''/\alpha\iota\omega\nu\alpha$ .

## B. Η ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Για φωτόνια, η κορυφή της τροχιάς  $\varphi = \varphi(r)$  βρίσκεται ομοίως:

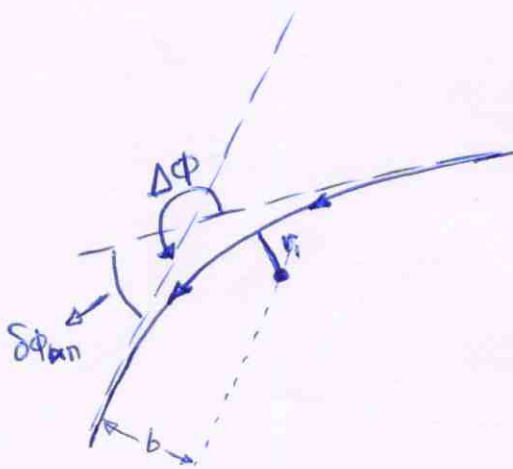
$$\begin{cases} \int \tilde{E}_\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \tilde{V}_\varphi \\ l = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi/d\lambda}{dr/d\lambda} = \frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{l/r^2}{\sqrt{2(\tilde{E}_\varphi - \tilde{V}_\varphi)}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{l}{r^2} \left[ e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l^2}{r^2} \right]^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right]^{-1/2}}, \quad b = \left| \frac{l}{e} \right|$$

Βλέπουμε ότι η κορυφή της τροχιάς εξαρτάται από την νεωτώνιο κρούση  $b$  και όχι μετακινείται από τα  $\lambda$  και  $e$ .



Η γωνία απόκλισης είναι  $\gamma$

$$\delta\varphi_{\pi\pi} = \Delta\varphi - \pi$$

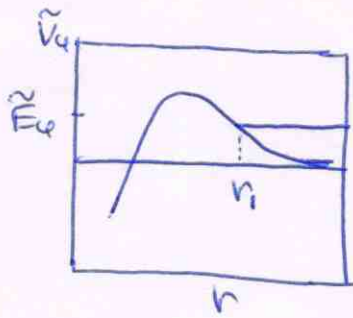
(Για Νεύτωνιο όριο  $\Delta\varphi \rightarrow \pi \Rightarrow \delta\varphi_{\pi\pi} \rightarrow 0$ ).

Λόγω συμμετρίας:

$$\Delta\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{dr} dr = 2 \int_{-\infty}^{r_1} \frac{d\varphi}{dr} dr$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{d\varphi}{dr} dr}$$

όπου  $r_1$  είναι το βυθίο ελάχιστης προσέγγισης (βυθίο κατάνης).



Στο  $r=r_1$ , είναι:  $\tilde{E}_\phi = \tilde{V}_\phi(r=r_1)$   
 από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το  $v_1$ , για συνάρτηση των  $M$ ,  $e$  και  $\ell$ . [ΑΣΥΝΗΤΗ]

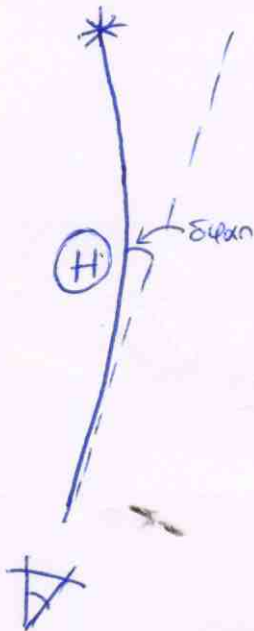
Για αδρανές βαρυτικό πεδίο βρίσκουμε ότι

$$\delta\phi_{\text{αν}} = \frac{4M}{b}$$

Για τον Ήλιο βρίσκουμε θεωρητικά:

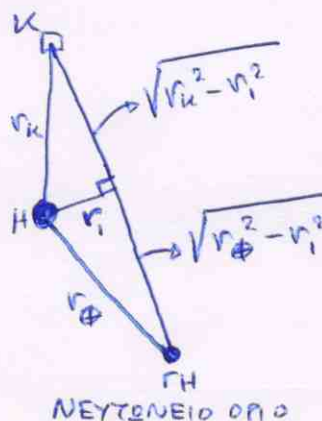
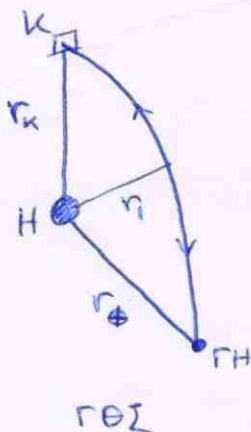
$$\delta\phi_{\text{αν}} = 1.7''$$

Αυτό επιβεβαιώθηκε πειραματικά το 1919 από τον Eddington 624 διαμήκη έυδειχσε Ηλίου.



### Γ. ΧΡΟΝΙΚΗ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Λόγω της καμπύλωσης της τροχιάς ενός φωτονίου, ο χρόνος διάδοσης είναι μεγαλύτερος σε σχέση με το Νευτώνειο όριο



θεωρήστε την ανάλυση ενός φωτονίου το οποίο ταξιδεύει από τη ΓΗ κοντά από τον Ήλιο μέχρι την κ και κατέπειτα κ και πίσω στη ΓΗ (ο καθένας μπορεί να βρεθεί π.χ. σε κάποιο πλανήτη).

Στη Νευτώνεια θεωρία, ο ολικός χρόνος για τη διαδρομή είναι

$$\Delta t_N = 2 \left( \sqrt{r_u^2 - r_1^2} + \sqrt{r_\oplus^2 - r_1^2} \right)$$

όπου  $r_1$  είναι η απόσταση ελάχιστης προσέγγισης (που εδώ συμπίπτει με την παραμέτρο κρούσης  $b$ ). Για να βρούμε τον ολικό χρόνο στη σχετικότητα χρησιμοποιούμε:

$$+e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \quad (\text{ορισμός } e)$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{d\lambda} = \frac{e}{1 - 2M/r}$$

και

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm [2(\tilde{E}_\phi - \tilde{V}_\phi)]^{1/2} \quad (\text{γεωδ. φωτ.})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dt}{dr} &= \frac{dt/d\lambda}{dr/d\lambda} = \pm \frac{e/(1 - 2M/r)}{[2(\tilde{E}_\phi - \tilde{V}_\phi)]^{1/2}} \\ &= \pm \frac{e/(1 - 2M/r)}{[e^2 - (1 - \frac{2M}{r})l^2/r^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dt}{d\lambda} = \pm \frac{1}{b} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right]^{-1/2}}$$

Ο ολικός χρόνος είναι

$$\Delta t = 2 \left[ \int_{r_\oplus}^{r_1} \frac{dt}{d\lambda} d\lambda + \int_{r_1}^{r_u} \frac{dt}{d\lambda} d\lambda \right]$$

και κάνουμε ανάπτυξη για  $r_1/r_u \ll 1$  και  $r_1/r_\oplus \ll 1$  βεβαιούμε:

$$\Delta t_{\text{επιπέδου}} = \Delta t - \Delta t_N$$

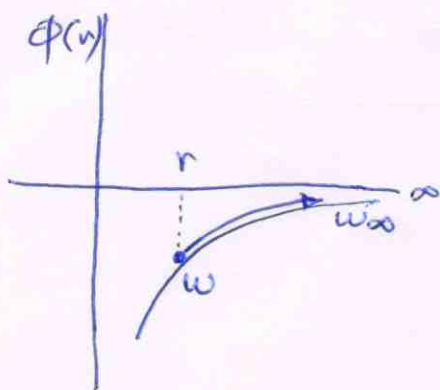
$$\Rightarrow \Delta t_{\text{επιπέδου}} \approx 4M \left[ \ln \left( \frac{4r_u r_\phi}{r_1^2} \right) + 1 \right]$$

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται χρονική καθυστέρηση Shapiro. Το 1976 χρησιμοποιήθηκαν τα διαστημόπλοια Viking όταν ήταν Άρη για να μετρηθεί η χρονική καθυστέρηση σήματος radar μεταξύ Γης και Άρη όταν αυτά περάσουν κοντά από τον Ήλιο.



Σε συνολικό χρόνο διαδρομής 41 δεπτών η χρονική καθυστέρηση λόγω ΓΘΣ μετρήθηκε ως 247 ns. Η μέτρηση αυτή επιβεβαιώνει το θεωρητικό αποτέλεσμα με ΓΘΣ με ακρίβεια  $10^{-3}$ .

# Δ. ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΜΕΤΑΘΕΣΗ ΣΤΟ ΕΡΥΘΡΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΦΩΤΟΝΙΩΝ



Έχω ένα φωτόνιο που εκπέμπεται από απόσταση  $r$  κυρίως για περιοχή Schwarzschild, με ενέργεια

$$E = h\omega = -p^a U_a(r, \varphi)$$

όπου  $p^a$  είναι η 4-ορμή του φωτονίου ενώ  $U^a(r, \varphi)$  είναι η 4-ταχύτητα ενός αμυγδάλου

παράλληλα στη διεύθυνση  $r$ . Αν  $U^t$  είναι  $t$ -συμπύκνωση της  $U^a(r, \varphi)$ , τότε

$$U^a(r, \varphi) = U^t(1, 0, 0, 0)$$

με κανονικοποίηση

$$U^a(r, \varphi) U_a(r, \varphi) = -1$$

$$\Rightarrow U^a(r, \varphi) U^b(r, \varphi) g_{ab} = -1$$

$$\Rightarrow (U^t)^2 g_{tt} = -1$$

$$\Rightarrow -(U^t)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = -1$$

$$\Rightarrow U^t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow U^a(r, \varphi) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \cdot (1, 0, 0, 0)$$

Όμως, το διάνυσμα Killing  $t^a$  της περιοχής Schwarzschild έχει συνημιτόνο  $t^a = (1, 0, 0, 0)$

Άρα:  $u^x_{(r,t)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \cdot t^x$

οπότε

$$t\omega = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} p^x t_\alpha$$

Επειδή η 4-ορμή του φωτονίου  $p^x$  είναι πάντοτε παράλληλη προς την εφαπτόμενη ευθεία σε κάθε σημείο της γεωδαιτικής του φωτονίου το  $p^x t_\alpha$  διατηρείται κατά μήκος της γεωδαιτικής (όπως και το  $u^x t_\alpha$  για βαρυτίδια).

Συμπεραίνουμε τη συχνότητα στο  $r$   $\omega$  με τη συχνότητα του φωτονίου όταν φθάσει στο άπειρο, βρισκούμε

$$\begin{aligned} \frac{t\omega}{t\omega_\infty} &= \frac{- \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} p^x t_\alpha}{- \left(1 - \frac{2M}{\infty}\right)^{-1/2} p^x t_\alpha} \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_\infty = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \omega}$$

Διαισθητικά, ένα φωτόνιο που ξεκινά με συχνότητα  $\omega$  από απόσταση  $r$  κοντά σε μια κεντρική μαύρη ή βαρυτικό αβύσσος, χάνει ενέργεια καθώς απομακρύνεται προς το άπειρο (ελαττώνεται η συχνότητά του). Βλέπουμε ότι αν ένα φωτόνιο ξεκινήσει από το  $r=0$  με οποδήποτε πεπεσμένη ενέργεια  $t\omega$ , θα φθάσει στο άπειρο με  $\omega_\infty = 0$ !



Ορίζουμε τον παράγοντα ερυθρο-μετατόπισης:

$$z = \frac{\omega - \omega_{\infty}}{\omega_{\infty}} = \frac{\omega}{\omega_{\infty}} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} - 1}$$

Για αβθέτες βαρυτικό πεδίο αρκεί να

$$z \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2M}{r}\right) - 1$$

$$\Rightarrow z \approx \frac{M}{r}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

Για έναν βαρυτικό αστερά είδατε ότι πρέπει να ισχύει

$$\frac{M}{R} < \frac{1}{2}$$

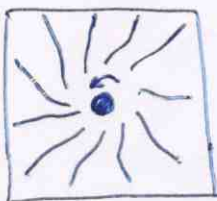
Αυτό οδηγεί σε μέγιστη ερυθρομετατόπιση

$$z_{\max} = \left(1 - \frac{2}{R}\right)^{-1/2} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{\max} = 2}$$

### ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ

Στο όριο ως αγγής περιστροφής, η κερκική ακτίνα είναι μη-δυνατόν όρο:  $g_{t\phi} = -\omega r^2 \sin^2 \theta dt d\phi$ .



Οι τροχιακές αδρανειακοί παράγοντες βύρουνται προς τη φορά περιστροφής, άρα ψευδοβλεπόμενα που ξεκινούν ως ευθείες (ακτινικά), μοιάζουν με Η.Ο. (ή αστερά νεφελών) να είναι ευθύγραμμες (βλ. βύρουντες  $(r, \theta, \phi)$  (φαινόμενο Lense-Thirring)).