ΜΕΛΑΝΕΣ ΟΠΕΣ

ΧΩΡΟΧΡΟΝΟΣ SCHWARZSCHILD

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ BIRKHOFF:</u>

Η ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ, ΣΤΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΕΠΙΠΕΔΗ ΛΥΣΗ ΚΕΝΟΥ ΣΤΗ ΓΘΣ ΕΙΝΑΙ Ο ΧΩΡΟΧΡΟΝΟΣ SCHWARZSCHILD.

ΣΤΙΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ SCHWARZSCHILD, Η ΜΕΤΡΙΚΗ ΕΙΝΑΙ

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

<u>Η ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ $r=2M$:</u>

ΣΤΟ $r=2M$ Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΜΕΤΡΙΚΗ ΕΜΦΑΝΙΖΕΙ ΑΝΩΜΑΛΙΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ, ΚΑΘΩΣ $g_{rr}\to\infty$. (ΔΕΝ ΠΡΟΚΕΙΤΑΙ ΓΙΑ ΦΥΣΙΚΗ ΑΝΩΜΑΛΙΑ).

ΑΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΤΟΝ ΤΑΝΥΣΤΗ RIEMANN ΣΕ ΚΑΤΑΛΛΗΛΕΣ ΤΟΠΙΚΑ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ, BRIΣΚΟΥΜΕ ΟΤΙ ΕΙΝΑΙ ΟΜΑΛΟΣ ΣΤΟ $r=2M$.

ΦΩΤΟΝΙΑ ΠΟΥ ΕΚΠΕΜΠΟΝΤΑΙ ΜΕ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ω_* ΣΕ ΑΠΟΣΤΑΣΗ r, ΟΤΑΝ ΦΘΑΝΟΥΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΕΧΟΥΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

$$\omega_\infty = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2}\omega_*$$

ΕΝΩ Ο ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ ΕΡΥΘΡΟΜΕΤΑΘΕΣΗΣ ΕΙΝΑΙ

$$z = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} - 1$$

ΕΤΣΙ, ΓΙΑ ΦΩΤΟΝΙΑ ΠΟΥ ΕΚΠΕΜΠΟΝΤΑΙ ΑΚΤΙΝΙΚΑ ΑΠΟ ΤΟ $r=2M$: $\omega_\infty = 0$ ΚΑΙ $z=\infty$. ΓΙΑ ΤΟ ΛΟΓΟ ΑΥΤΟ, Η ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ $r=2M$ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΚΑΙ <u>ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΑΠΕΙΡΗΣ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΘΕΣΗΣ</u>.

Μια άλλη συνέπεια της άπειρης μετάθεσης είναι η εξής:

Σε κάποια σταθερή απόσταση $r \geq 2M$ ο ίδιος χρόνος ενός παρατηρητή δίνεται από τη σχέση

$$d\tau = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{dt = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} d\tau}$$

Ένας παρατηρητής κοντά στην θέση $r = 2M$ φαίνεται "παγωμένος" για έναν μακρινό παρατηρητή, καθώς ένας πεπερασμένος ίδιος χρόνος $d\tau$ αντιστοιχεί σε άπειρο χρόνο dt για $r = 2M$. Οπότε, ένας μακρινός παρατηρητής δε θα δει ποτέ έναν "αστροναύτη" να περνά την $r = 2M$. Αυτό που θα παρατηρήσει είναι το ίχνος του να "σβήνει" εντελώς καθώς πλησιάζει την $r = 2M$.

Η επιφάνεια άπειρης μετάθεσης ονομάζεται και <u>στατικό όριο</u> διότι σε αυτήν κανένας παρατηρητής δε μπορεί να μείνει στάσιμος ακόμη κι αν είχε άπειρη ενέργεια (από τη στιγμή που φθάσει στο $r = 2M$ υποχρεούται να εισέλθει στη μελανή οπή).

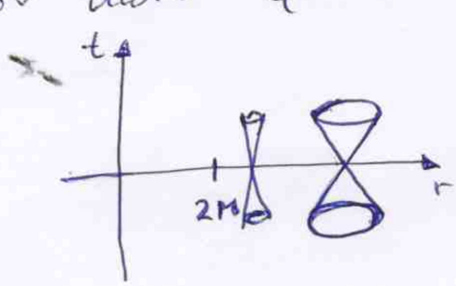
Φωτοειδείς γεωδαισιακές / Κώνος φωτός

Οι φωτοειδείς γεωδαισιακές προκύπτουν από το μετρικό στοιχείο θέτοντας $ds = 0$ (για $\theta, \varphi =$ σταθ) οπότε

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \pm\left(1-\frac{2M}{r}\right)$$

Για $r > 2M$, οι γεωδαισιακές $\frac{dr}{dt} = +\left(1-\frac{2M}{r}\right)$ και $\frac{dr}{dt} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)$ περιγράφουν την τροχιά ενός φωτονίου που φεύγει από (outgoing) ή πέφτει προς (ingoing) τη μελανή οπή και σχηματίζουν τον κώνο φωτός (χρονοειδείς καμπύλες υπάρχουν μόνο εσωτερικά του κώνου)



Το άνοιγμα του κώνου φωτός εξαρτάται από την απόσταση r. Όταν $r \to 2M$ $\frac{dr}{dt} \to \pm 0$ οπότε ο κώνος στο $r = 2M$ γίνεται μια φωτοειδής επιφάνεια του χωρόχρονου (null surface) (μια κάθετη ευθεία στο διάγραμμα $t-r$). Φωτόνια που εκπέμπονται ακριβώς στο $r = 2M$ παραμένουν εκεί.

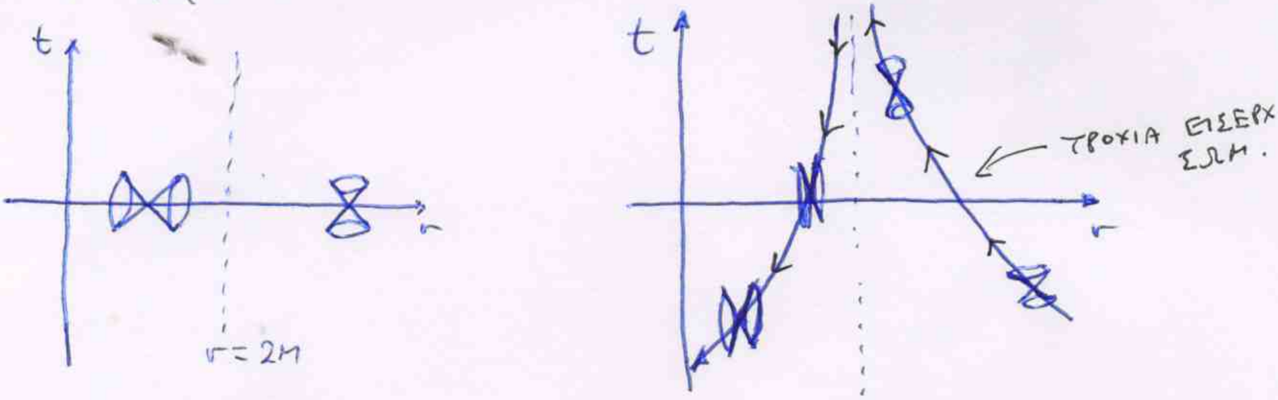
ΤΙ ΓΙΝΕΤΑΙ ΓΙΑ $r<2M$;

Για $r<2M$ παρατηρούμε ότι $g_{tt}<0$ και $g_{rr}>0$. Άρα οι συντεταγμένες t και r αλλάζουν χαρακτήρα στο $r=2M$, η r γίνεται χρονοειδής ενώ η t γίνεται χωροειδής.

Για τη συντεταγμένη γραμμή r $(t, \theta, \varphi = σταθ.)$ είναι

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \begin{cases} <0, \text{ χωροειδής}, & r>2M \\ >0, \text{ χρονοειδής}, & r<2M \end{cases}$$

οπότε, για $r<2M$ ο κώνος φωτός έχει ξαφνικά αλλάξει προσανατολισμό



Η απότομη αλλαγή του προσανατολισμού του κώνου φωτός στο $r=2M$ δείχνει ότι οι συντεταγμένες Schwarzschild δεν είναι οι καταλληλότερες για την περιγραφή σύγχρονα του εσωτερικού και του εξωτερικού της Μ.Ο.

Επίσης, βλέπουμε ότι η περιοχή $r<2M$ εξαρτάται από το "χρόνο" (ο οποίος τώρα είναι το r!). Αυτό συμβαίνει σε οποιεσδήποτε συντεταγμένες χρησιμοποιήσουμε (όχι μόνο στις συντεταγμ. Schwarzschild)

ΤΕΛΙΚΑ, ΕΝΑ ΦΩΤΟΝΙΟ Η' ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΠΟΥ ΘΑ ΠΕΡΑΣΕΙ ΤΗΝ $r=2M$ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ ΘΑ ΤΑΞΙΔΕΨΕΙ ΠΡΟΣ ΤΟ $r=0$ (ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΩΜΑΛΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΡΙΚΗΣ) <u>ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΙΔΙΟ ΧΡΟΝΟ.</u>

ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $r=0$ ΕΙΝΑΙ <u>ΧΩΡΟΕΙΔΗΣ ΑΝΩΜΑΛΙΑ</u>, ΔΙΟΤΙ Η ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΗ t ΕΚΕΙ ΕΙΝΑΙ ΧΩΡΟΕΙΔΗΣ.

ΓΙΑ ΦΩΤΟΝΙΑ, ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΤΡΟΧΙΑ ΤΟΥΣ, ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΟΝΤΑΣ ΤΗΝ

$$\frac{dr}{dt} = \pm\left(1-\frac{2M}{r}\right)$$

Η ΛΥΣΗ ΕΙΝΑΙ

$$t = \pm r \pm 2M \ln\left|\frac{r}{2M}-1\right| + \text{σταθ.}$$

ΟΠΟΥ $\begin{cases} + & : \text{ΕΞΕΡΧ.} \\ - & : \text{ΕΙΣΕΡΧ.} \end{cases}$

ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

ΕΠΕΙΔΗ Ο ΚΩΝΟΣ ΦΩΤΟΣ ΑΛΛΑΖΕΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ ΓΙΑ $r<2M$ ΚΑΙ ΚΑΤΕΥΘΥΝΕΤΑΙ ΠΡΟΣ ΤΟ $r=0$, ΚΑΝΕΝΑ ΦΩΤΟΝΙΟ ΠΟΥ ΕΚΠΕΜΠΕΤΑΙ ΑΠΟ ΚΑΠΟΙΟ ΣΗΜΕΙΟ $r<2M$ ΔΕ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΔΙΑΦΥΓΕΙ ΤΗΣ ΜΕΛΑΝΗΣ ΟΠΗΣ. ΟΠΟΤΕ, ΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΤΗΣ Μ.Ο. ΔΕ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΗΣΕΙ ΜΕ ΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΤΗΣ ΚΙ ΕΤΣΙ Η $r=2M$ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ.

ΓΙΑ ΤΟ ΧΩΡΟΧΡΟΝΟ SCHWARZSCHILD, Η $r=2M$ ΕΙΝΑΙ ΑΡΑ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ i) ΕΠΙΦ. ΑΠΕΙΡΗΣ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΘΕΣΗΣ ii) ΣΤΑΤΙΚΟ ΟΡΙΟ iii) ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ.

"ΝΕΥΤΩΝΕΙΟ ΑΝΑΛΟΓΟ"

Ο MITCHELL (1784) ΠΡΟΒΛΕΨΕ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΕΝΟΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΜΕ ΕΠΙΦ. ΑΠΕΙΡΗΣ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΘΕΣΗΣ, ΥΠΟΘΕΤΟΝΤΑΣ ΟΤΙ ΤΟ ΦΩΣ ΜΕ ΤΑΧΥΤΗΤΑ c ΔΕ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΔΙΑΦΥΓΕΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΕΝΟΣ ΑΣΤΕΡΑ ΜΑΖΑΣ M ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑΣ r.

$$v_{διαφ.} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = c$$

$$\Rightarrow r = \frac{2GM}{c^2} \rightarrow \underline{2M} \quad (!)$$

Eddington-Finkelstein

$$\boxed{v = t + r + 2M \ln\left|\frac{r}{2M}-1\right|}$$

$$\Rightarrow \quad ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2\,dv\,dr + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΚΩΝΟΥ ΦΩΤΟΣ

$$ds^2 = 0 \ , \ d\theta = d\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(1-\frac{2M}{r}\right)dv^2 = 2\,dv\,dr$$

$$\Rightarrow \quad dv\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)dv - 2\,dr\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} v = \text{σταθ.} \\ \dfrac{dv}{dr} = 2\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)^{-1} \Rightarrow v - 2\left(r + 2M\ln\left|\dfrac{r}{2M}-1\right|\right) = \text{σταθ.} \end{cases}$$

- Οι $v=\text{σταθ.}$ είναι μόνο εισερχόμενες διότι όταν το t μεγαλώνει, μικραίνει το r.
- Οι $v - 2\left(r+2M\ln\left|\frac{r}{2M}-1\right|\right)$ είναι $\begin{cases} \text{εξερχόμενες}, & r>2M \\ \text{εισερχόμενες}, & r<2M \end{cases}$

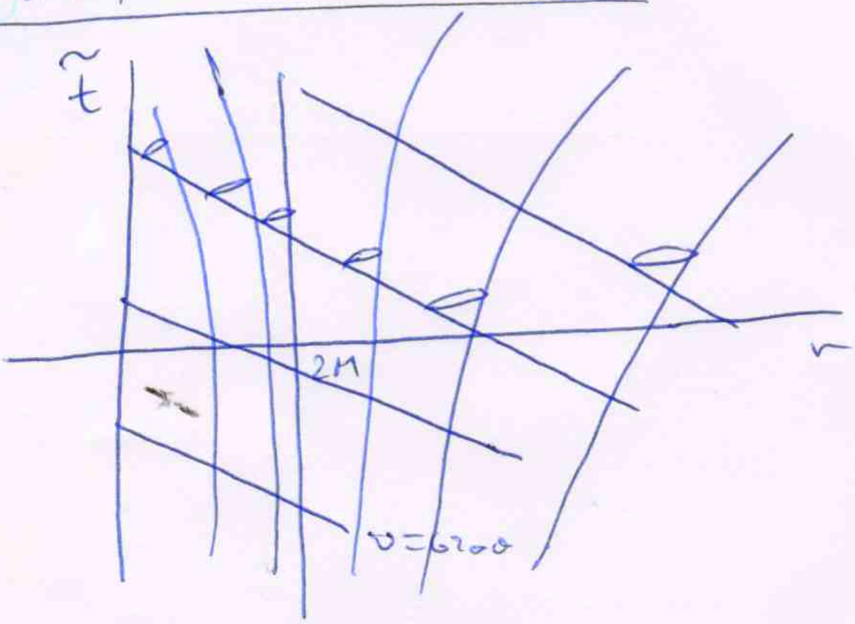
Ορίζουμε μια άλλη "χρονική" μεταβλητή

$$\tilde{t} = v - r = t + 2M \ln\left|\frac{r}{2M} - 1\right|$$

Τότε $\quad v = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \tilde{t} = -r + \sigma\tau\alpha\theta.$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{t}}{dr} = -1$$

ΧΩΡΟΧΡΟΝΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ



Εμβαδόν του ορίζοντα

Στο $r = 2M \Rightarrow dv = 0$ και για τις εξερχ. φωτ. γεωδ.

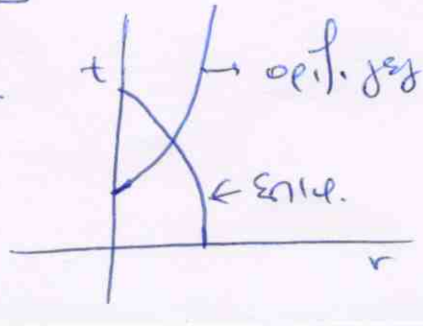
Οπότε $ds^2 = (2M)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) \rightarrow$ 2-D χωροειδής επιφάνεια

$$= 4M^2 d\Sigma^2$$

$$\Rightarrow A = 4M^2 \cdot 4\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 16\pi M^2}$$

ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗ ΑΣΤΡΟΥ



KRUSKAL - SZEKERES

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \begin{cases} \sqrt{\frac{r}{2M}-1}\, e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) &, r>2M \\ \sqrt{1-r/2M}\, e^{r/4M} \cosh\left(t/4M\right) &, r<2M \end{cases} \\ U &= \begin{cases} \sqrt{\frac{r}{2M}-1}\, e^{r/4M} \cosh\left(t/4M\right) &, r>2M \\ \sqrt{1-r/2M}\, e^{r/4M} \sinh\left(t/4M\right) &, r<2M \end{cases} \end{aligned}}$$

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M}\left(-dV^2+dU^2\right) + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

H συντεταγμένη $r = r(V,U)$ από τη σχέση

$$\boxed{U^2 - V^2 = \left(\frac{r}{2M}-1\right)e^{r/2M}}$$

<u>ΓΡΑΜΜΕΣ ΣΤΑΘ. r</u> : $U^2 - V^2 =$ σταθ. ⇒ υπερβολές

Ειδικές περιπτώσεις: <u>$r = 2M$</u> ⇒ $U^2 - V^2 = 0$

⇒ $V = \pm U$ → ευθείες

<u>$r = 0$</u> ⇒ $U^2 - V^2 = -1$

⇒ $V = \pm\sqrt{U^2+1}$ → υπερβολές

ΓΡΑΜΜΕΣ ΣΤΑΘ. t :

$$\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \begin{cases} \dfrac{V}{U} & , r > 2M \\ \dfrac{U}{V} & , r < 2M \end{cases}$$

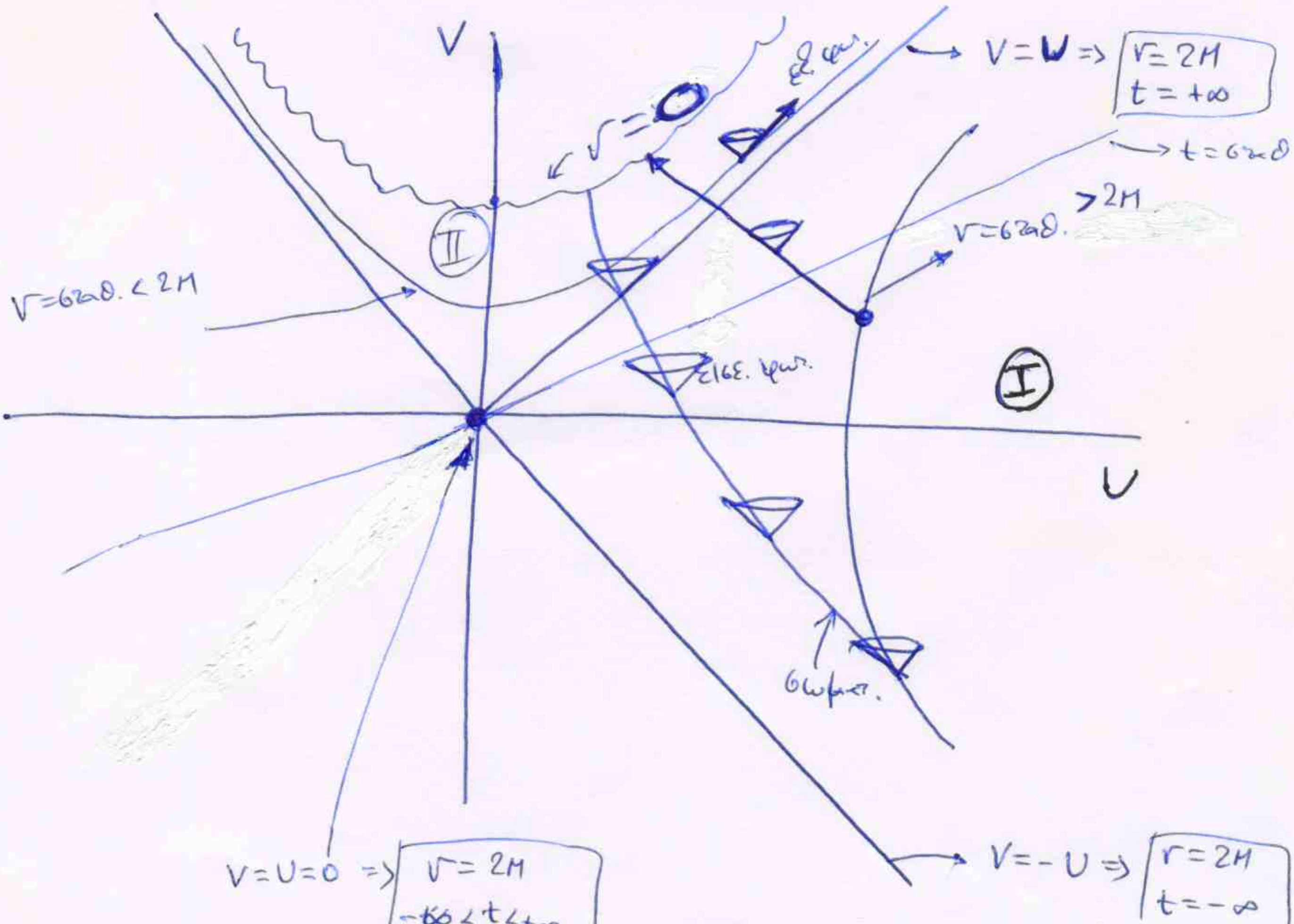
→ ευθείες

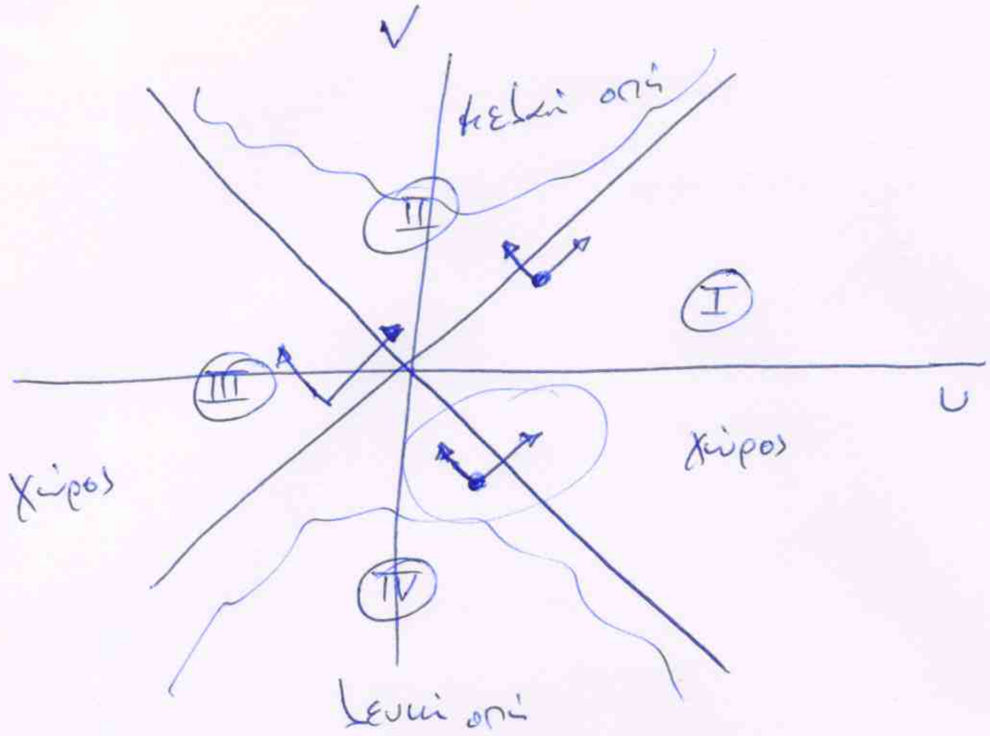
ΚΩΝΟΣ ΦΩΤΟΣ :

$$ds^2 = d\theta = d\varphi = 0 \Rightarrow -dV^2 + dU^2 = 0$$

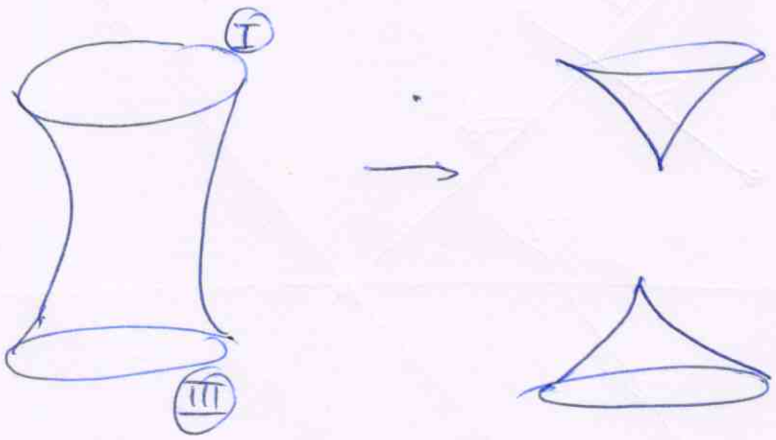
$$\Rightarrow (-dV + dU)(dV + dU) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -V + U = \text{σταθ.} \Rightarrow \dfrac{dV}{dU} = +1 \\ V + U = \text{σταθ.} \Rightarrow \dfrac{dV}{dU} = -1 \end{cases}$$





Το II, IV θα μπορούσε να είναι μια "γέφυρα" μεταξύ των χώρων I και III (Einstein-Rose bridge)
όπως αν ένα φωτόνιο προσπαθήσει να τη διασχίσει η γέφυρα θα αποκοπεί πιο γρήγορα
(ο χώρος δεν είναι στατικός!!!)



αντιστοιχεί με εξωτική "αρνητική" ενέργεια?

Η ΛΥΣΗ KERR (R. KERR 1963)

Η ΜΕΤΡΙΚΗ ΓΙΑ ΣΤΑΣΙΜΟ, ΑΞΟΝΙΚΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΧΩΡΟΧΡΟΝΟ (ΧΩΡΙΣ ΥΛΗ) ΕΙΝΑΙ

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2+a^2)\sin^2\theta\, d\varphi^2 + \frac{2Mr}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta\, d\varphi\right)^2} \qquad (1)$$

BOYER - LINDQUIST (ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤ. SCHWARZSCHILD)

ΟΠΟΥ

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

ΜΕ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΓΙΑ ΜΙΚΡΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ($a \ll 1$) ΤΑΥΤΟΠΟΙΟΥΜΕ ΟΤΙ

M = ΟΛΙΚΗ ΜΑΖΑ-ΕΝΕΡΓΕΙΑ

$a = \frac{J}{M}$, όπου J = ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

ΤΟ a ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ KERR

ΔΗΛ. ΟΤΑΝ $a \to 0 \Rightarrow \Delta \to r^2 - 2Mr = r^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$

$$\rho^2 \to r^2$$

$$\Downarrow$$

ΤΟΤΕ $(1) \Rightarrow ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$.

Η ΜΕΤΡΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΣΙΜΗ ΑΛΛΑ ΟΧΙ ΣΤΑΤΙΚΗ, ΔΗΛ. $\partial_t g_{\alpha\beta} = 0$, ΑΛΛΑ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΤΗΝ ΑΛΛΑΓΗ $t \to -t$.

Η ΑΛΛΑΓΗ $t \to -t$ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΜΕ $a \to -a$ (ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ).

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΣΕ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ x, y, z

ΣΤΟ ΟΡΙΟ $M \to 0$ (ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΧΩΡΟΧΡΟΝΟΣ MINKOWSKI)
Η ΜΕΤΡΙΚΗ KERR ΓΙΝΕΤΑΙ

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{r^2+a^2}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2+a^2)\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

ΚΑΙ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΕΙ ΣΕ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ΜΕΣΩ

$$x = \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

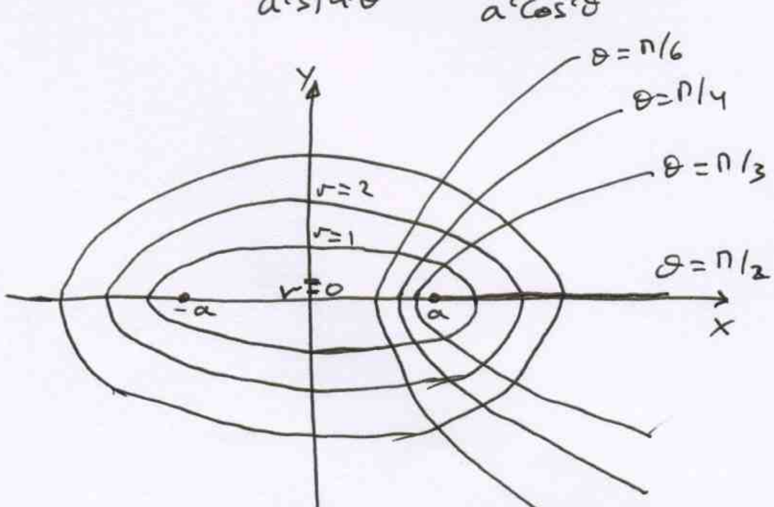
ΟΠΟΥ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΕ $r=$ σταθ. ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥΝ ΣΕ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗ ΑΠΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ z

$$\frac{x^2+y^2}{r^2+a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

ΣΤΟ ΟΡΙΟ $r \to 0$ => ΔΙΣΚΟΣ ΑΚΤΙΝΑΣ a ΣΤΟ ΙΣΗΜ. ΕΠΙΠΕΔΟ.

ΟΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ $\theta=$ σταθ. => ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΕΠΙΦ. ΑΠΟ ΠΕΡΙΣΤΡ. ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ z

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\sin^2\theta} - \frac{z^2}{a^2\cos^2\theta} = 1$$



ΓΙΑ ΤΗΝ ΚERR, Ο ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΙΝΑΙ

$$X = \sqrt{r^2 + a^2}\, \sin\theta \cos[\varphi - f(r)]$$

$$Y = \sqrt{r^2 + a^2}\, \sin\theta \sin[\varphi - f(r)]$$

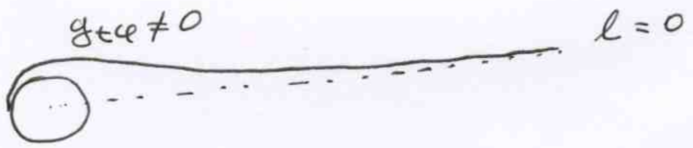
$$z = r\cos\theta$$

ΟΠΟΥ

$$f(r) = a\int_{\infty}^{r} (r^2 - 2Mr + a^2) \tan^{-1}\frac{a}{r}\, dr .$$

ΔΗΛ. ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΚΡΙΒΩΣ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΙΣ ΕΠΙΦ. ΑΛΛΑ ΠΑΡΟΜΟΙΕΣ.

ΣΥΡΜΟΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΩΝ



ΑΝ ΕΝΑΣ ΠΑΡΗΤΗΡΗΤΗΣ ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ/ΜΟΝΑΔΑ ΜΑΖΑΣ $\ell = 0$ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΠΕΣΕΙ ΕΛΕΥΘΕΡΑ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΙΚΑ (ΑΡΧΙΚΩΣ) ΠΡΟΣ ΤΗ Μ.Ο. ΚΕRR, ΤΟΤΕ Η ΤΡΟΧΙΑ ΤΟΥ ΔΕ ΘΑ ΠΑΡΑΜΕΝΕΙ ΑΚΤΙΝΙΚΗ, ΑΛΛΑ ΘΑ ΠΑΡΑΣΥΡΘΕΙ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟ ΧΩΡΟΧΡΟΝΟ.

ΠΡΑΓΜΑΤΙ, ΟΡΙΣΑΜΕ $\ell = \varphi^{\alpha} p_{\alpha} = p_{\varphi}$, ΕΝΩ Η ΓΩΝΙΑΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΕΙΝΑΙ (ΜΕΤΡΟΥΜΕΝΗ ΑΠΟ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ)

$$\Omega = \frac{p^{\varphi}}{p^{t}} = \frac{g^{\varphi t} p_t + g^{\varphi\varphi} p_{\varphi}}{g^{tt} p_t + g^{t\varphi} p_{\varphi}}$$

ΓΙΑ $p_{\varphi} = 0 \Rightarrow$

$$\Omega = \frac{g^{\varphi t}}{g^{tt}} := \omega(r,\theta) \neq 0 \quad !$$

ΣΤΑΤΙΚΟ ΟΡΙΟ

ΓΙΑ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ, ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ Η 4-ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΤΟΥ ΝΑ ΕΧΕΙ ΜΟΡΦΗ

$$\begin{aligned} u^\alpha &= (u^t, 0, 0, 0) \\ &= u^t(1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ

$$u^\alpha u_\alpha = -1$$

$$\Rightarrow \quad g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$$

$$\Rightarrow \quad g_{tt} (u^t)^2 = -1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad u^t &= (-g_{tt})^{-1/2} \\ &= \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

ΑΡΑ, ΣΤΑΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΕΣ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΜΟΝΟ ΟΠΟΥ

$$g_{tt} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} > 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 > 2Mr$$

$$\Rightarrow r^2 + a^2\cos^2\theta > 2Mr$$

$$\Rightarrow r^2 - 2Mr + a^2\cos^2\theta > 0$$

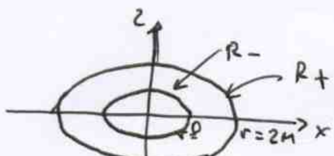
ΤΟ ΣΤΑΤΙΚΟ ΟΡΙΟ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ

$$g_{tt} = 0 \Rightarrow r^2 - 2Mr + a^2\cos^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}}$$

ΣΤΟ ΙΣΗΜΕΡΙΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ: $R_- = 0$

$R_+ = 2M$



ΕΠΕΙΔΗ Η g_{tt} ΑΛΛΑΖΕΙ ΠΡΟΣΗΜΟ ΣΤΟ R_+ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟ R_-, Η ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΗ t ΓΙΝΕΤΑΙ ΧΩΡΟΕΙΔΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ R_-, R_+.

ΕΠΙΦ. ΑΠΕΙΡΗΣ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΘΕΣΗΣ

ΕΠΕΙΔΗ ΓΙΑ ΑΚΤΙΝΙΚΩΣ ΕΞΕΡΧΟΜΕΝΑ ΦΩΤΟΝΙΑ

$$\frac{\nu}{\nu_\infty} = \left(\frac{g_{tt}}{g_{tt}|_\infty} \right)^{1/2}$$

Η ΕΠΙΦ. ΟΠΟΥ $g_{tt} = 0$ ΑΠΟΤΕΛΕΙ ΚΑΙ ΕΠΙΦ. ΑΠΕΙΡΗΣ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΘΕΣΗΣ (ΔΗΛ. ΣΥΜΠΙΠΤΕΙ ΜΕ ΤΟ ΣΤΑΤΙΚΟ ΟΡΙΟ).

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

Ο ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΦΩΤΟΕΙΔΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ , ΔΗΛ. ΜΙΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

$$f(r,\theta) = 0$$

ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ~~ΤΟ~~ ΚΑΘΕΤΟ 4-ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΙΝΑΙ ΦΩΤΟΕΙΔΕΣ

$$n_\alpha = \nabla_\alpha f = \partial_\alpha f$$

ΩΣΤΕ $n_\alpha n^\alpha = 0$

$$\Rightarrow g^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = 0$$

$$\Rightarrow g^{rr}(\partial_r f)^2 + g^{\theta\theta}(\partial_\theta f)^2 = 0$$

Η ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ (r,θ) ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΓΙΝΕΙ ΕΤΣΙ ΩΣΤΕ

$$g^{rr}(\partial_r f)^2 = 0$$

ΟΠΟΤΕ Ο ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΘΗΚΗ

$$\boxed{g^{rr} = 0} \Leftrightarrow g_{rr} = \infty$$

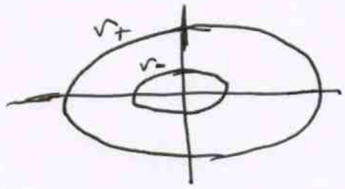
ΓΙΑ ΤΗΝ KERR

$$\Rightarrow g_{rr} = -\frac{\rho^2}{\Delta} = \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = 0}$$

ΣΗΜ. Η ΜΕΤΡΙΚΗ KERR ΣΕ B-L ΣΥΝΤΕΤ. ΕΧΕΙ ΠΑΘΟΓΕΝΕΙΑ ΓΙΑ $\Delta=0$!

$$\Rightarrow \quad r^2 - 2Mr + a^2 = 0$$



$$\Rightarrow \quad \boxed{r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}}$$

ΦΩΤΟΝΙΑ ΠΟΥ ΕΚΠΕΜΠΟΝΤΑΙ ΩΣ ΕΞΕΡΧΟΜΕΝΑ ΣΤΑ r_+, ΠΑΡΑΜΕΝΟΥΣ ΣΤΗ ΦΩΤΟΕΙΔΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΔΗΛ. $\frac{dr}{dt} = 0$.

ΔΑΚΤΥΛΕΙΟΕΙΔΗΣ ΑΝΩΜΑΛΙΑ (RING SINGULARITY)

ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΣ ΤΟ $R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΟΤΙ ΑΠΕΙΡΙΖΕΤΑΙ ΣΤΟ

$$\boxed{\rho = 0}$$

$$\Rightarrow \quad r^2 + a^2\cos^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r = 0 \ \text{στο} \ \theta = \frac{\pi}{2}.} \quad \rightarrow \ \text{ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ}$$

ΑΚΡΑΙΑ Μ.Ο. KERR (ΜΕΓΙΣΤΗ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ)

ΓΙΑ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΞΩΤ. ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ, ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ

$$M^2 - a^2 > 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2 < M^2$$

$$\Rightarrow \quad |a| < M$$

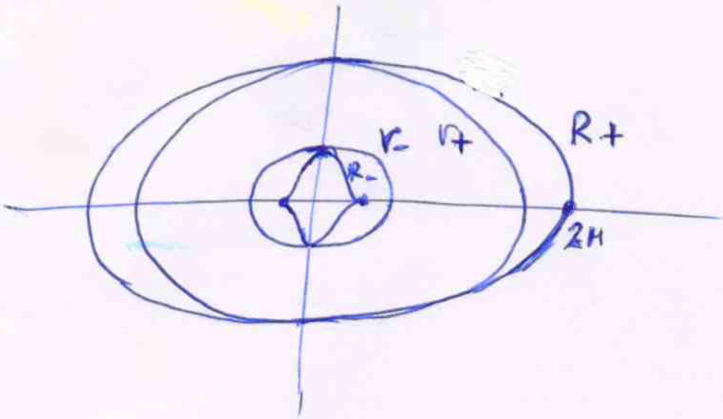
$$\Rightarrow \quad \left|\frac{J}{M}\right| < M$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left|\frac{J}{M^2}\right| < 1}$$

WHEN $|J|/M^2 = 1 \Rightarrow r_+ = r_- = M$.

ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΝΤΑΙ Μ.Ο. ΜΕΧΡΙ $\frac{|J|}{M^2} \simeq 0.998$.

Συνολικά



ΚΩΝΟΣ ΦΩΤΟΣ (ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

Στο $\theta = \pi/2$: $ds^2 = 0$

$$\Rightarrow \; g_{tt}\, dt^2 + g_{\varphi\varphi}\, d\varphi^2 + g_{rr}\, dr^2 + 2 g_{t\varphi}\, dt\, d\varphi = 0$$

Σε κάποια απόσταση r:

$$g_{tt}\, dt^2 + g_{\varphi\varphi}\, d\varphi^2 + 2 g_{t\varphi}\, dt\, d\varphi = 0$$

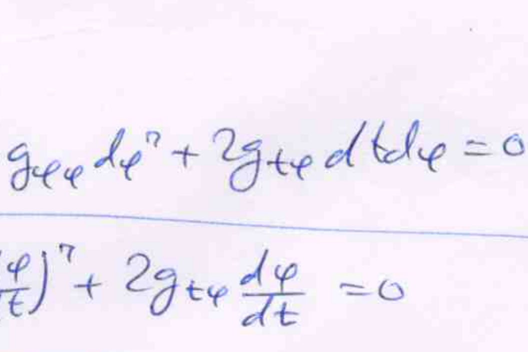
$$\Rightarrow \; \boxed{g_{tt} + g_{\varphi\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2 g_{t\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = 0}$$

→ Μπορεί να υπολογίσει κανείς το $\frac{d\varphi}{dt}$.

π.χ. στο στατικό όριο $g_{tt} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = 0 \\[2ex] \dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{2 g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \end{cases}$$

⇒



ο κώνος φωτός ανοίγει προς τη διεύθυνση περιστροφής.

ΓΩΝΙΑΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΤΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

Ο Ο.Γ. ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΦΩΤΟΕΙΔΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ, ΔΗΛ.

$$ds^2 = 0$$

ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΕΝΑ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟ 4-ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ $r = r_+ = \text{σταθ.}$

$$\ell^\alpha = (\ell^t, 0, \ell^\theta, \ell^\varphi) \qquad (\ell^r = 0)$$

ΘΑ ΕΙΝΑΙ ΦΩΤΟΕΙΔΕΣ, ΑΝ

$$\ell^\alpha \ell_\alpha = 0$$

$$\Rightarrow g_{\alpha\beta}\,\ell^\alpha \ell^\beta = 0$$

$$\Rightarrow g_{tt}(\ell^t)^2 + 2g_{t\varphi}\ell^t\ell^\varphi + g_{\theta\theta}(\ell^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(\ell^\varphi)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{2Mr_+\sin\theta}{\rho_+}\right)^2\left(\ell^\varphi - \frac{a}{2Mr_+}\ell^t\right)^2 + \rho_+^2(\ell^\theta)^2 = 0}$$

[ΑΣΚΗΣ

ΟΠΟΥ $\rho_+^2 = r_+^2 + a^2\cos^2\theta$.

Η ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΙΝΑΙ

$$\ell^\theta = 0$$

$$\ell^\varphi = \frac{a}{2Mr_+}\ell^t = \Omega_H \ell^t$$

ΩΣΤΕ $\ell^\alpha = \ell^t(1, 0, 0, \Omega_H)$

ΟΠΟΥ

$$\boxed{\Omega_H = \frac{a}{2Mr_+}}$$

ΕΙΝΑΙ Η ΓΩΝΙΑΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΤΟΥ Ο.Γ.